



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 3: Μη γραμμικές συναρτήσεις (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών

Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

# Σκοποί ενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τη δομή και τη χρήση των μη γραμμικών συναρτήσεων
- Να μάθουν οι φοιτητές τις οικονομικές τετραγωνικές συναρτήσεις και που αυτές χρησιμοποιούνται
- Να μπορούν οι φοιτητές να αναγνωρίζουν και να διαχειρίζονται κυβικές συναρτήσεις, ρητές συναρτήσεις, συναρτήσεις δύναμης και γενικά πολυώνυμα



# Περιεχόμενα ενότητας

- Τετραγωνικές συναρτήσεις
- Προσδιορισμός μιας τετραγωνικής συνάρτησης από τρία σημεία
- Συστήματα δύο τετραγωνικών συναρτήσεων
- Κυβικές συναρτήσεις
- Γενικά πολυώνυμα
- Ρητές συναρτήσεις
- Συναρτήσεις δύναμης



# Τετραγωνικές συναρτήσεις (1/6)

- Πολυώνυμα 2<sup>ου</sup> βαθμού
- **$f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$**



# Τετραγωνικές συναρτήσεις (2/6)

- Το πόσες ρίζες έχει εξαρτάται από την τιμή της διακρίνουσας  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- **$\Delta > 0$** 
  - 2 πραγματικές ρίζες
- **$\Delta = 0$** 
  - 1 διπλή πραγματική ρίζα
- **$\Delta < 0$** 
  - 2 μιγαδικές ρίζες



# Τετραγωνικές συναρτήσεις (3/6)

- $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

- $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$



# Τετραγωνικές συναρτήσεις (4/6)

- Αν  $\alpha > 0$  το  $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$  είναι θέση ελάχιστου σημείου με τιμή  $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$



# Τετραγωνικές συναρτήσεις (5/6)

- Αν  $\alpha < 0$  το  $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$  είναι θέση μέγιστου σημείου με τιμή  $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$





# Τετραγωνικές συναρτήσεις (6/6)

- Γεωμετρική αναπαράσταση
  - 6 διαφορετικές περιπτώσεις
    - $\alpha > 0$  και  $\Delta > 0$
    - $\alpha > 0$  και  $\Delta = 0$
    - $\alpha > 0$  και  $\Delta < 0$
    - $\alpha < 0$  και  $\Delta > 0$
    - $\alpha < 0$  και  $\Delta = 0$
    - $\alpha < 0$  και  $\Delta < 0$



# Παράδειγμα 1

- Μεγιστοποίηση εσόδων μιας ατελώς ανταγωνιστικής επιχείρησης
- Έστω η συνάρτηση ολικών εσόδων της επιχείρησης  $R(Q)=\alpha Q-\beta Q^2$ , όπου  $Q$  η ποσότητα προϊόντος
- Ποια είναι η ποσότητα που πρέπει να πωληθεί ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα;
- Για ποιες τιμές της ποσότητας  $Q$  μηδενίζονται τα συνολικά έσοδα;



## Παράδειγμα 2

- Έστω ότι η συνάρτηση ολικών εσόδων ισούται με  $R(Q)=200Q-4Q^2$
- Ποια είναι η ποσότητα που μεγιστοποιεί τα ολικά έσοδα και ποια είναι αυτά τα μέγιστα ολικά έσοδα;



# Παράδειγμα 3

- Έστω ότι έχουμε ένα φράχτη  $A$  μέτρων και θέλουμε να φράξουμε μια ορθογώνια παραλληλόγραμμη περιοχή
- Προσδιορίστε τις διαστάσεις της περιοχής που μεγιστοποιούν το εμβαδόν της



# Παράδειγμα 4

- Έστω ότι μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης  $P=83-2Q$  και συνάρτηση ολικού κόστους  $TC(Q)=3Q+(1/2)Q^2$
- Ζητείται να προσδιοριστεί η ποσότητα  $Q^*$  στην οποία μεγιστοποιούνται τα συνολικά κέρδη, καθώς και η τιμή των μέγιστων συνολικών κερδών



# Παραδείγματα οικονομικών συναρτήσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού

- Συνάρτηση ολικού κόστους
  - $TC(Q) = \alpha_1 Q + \alpha_2 Q^2$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 > 0$
- Συνάρτηση ολικών εσόδων
  - $R(Q) = \beta_1 Q - \beta_2 Q^2$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 > 0$
- Συνάρτηση ολικών κερδών
  - $\pi(Q) = R(Q) - TC(Q) = (\beta_1 - \alpha_1)Q - (\beta_2 + \alpha_2)Q^2$



# Προσδιορισμός πολυωνύμου $k$ βαθμού από σημεία

- Ένα πολυώνυμο  $k$  βαθμού προσδιορίζεται από ένα σύνολο  $k+1$  σημείων επιλύοντας ένα αντίστοιχο σύστημα  $k+1$  πολυωνυμικών εξισώσεων με  $k+1$  αγνώστους
- Άρα μια τετραγωνική συνάρτηση προσδιορίζεται από 3 σημεία



# Κυβικές συναρτήσεις (1/2)

- Πολυώνυμα 3<sup>ου</sup> βαθμού
- $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha \neq 0$





# Κυβικές συναρτήσεις (2/2)

- Μία πραγματική ρίζα
- Δύο πραγματικές ρίζες
- Τρεις πραγματικές ρίζες



# Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις (1/5)

- 1<sup>η</sup> κατηγορία
  - Αυξάνουν με φθίνοντα ρυθμό από  $x=0$  έως  $x=x_0$  (στο οποίο σημείο ο ρυθμός μεταβολής ελαχιστοποιείται) και στη συνέχεια αυξάνουν με αύξοντα ρυθμό
  - $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$  και  $3\alpha\gamma > \beta^2$



# Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις (2/5)

- 1<sup>η</sup> κατηγορία
  - Π.χ. η βραχυχρόνια συνάρτηση ολικού κόστους  
 $TC(Q)=Q^3-9Q^2+30Q+25$
- Οι συναρτήσεις αυτές έχουν ένα σημείο καμπής και κανένα στάσιμο σημείο



# Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις (3/5)

- 2<sup>η</sup> κατηγορία

- Αυξάνουν με αύξοντα ρυθμό από  $x=0$  έως  $x=x_0$  (στο οποίο σημείο ο ρυθμός μεταβολής μεγιστοποιείται) και στη συνέχεια αυξάνουν με φθίνοντα ρυθμό
- $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$  και  $3\alpha\gamma > \beta^2$



# Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις (4/5)

- 2<sup>η</sup> κατηγορία

- Π.χ. η συνάρτηση ολικού προϊόντος

$$f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 3x^2$$

- όπου  $f(x)=Q$  είναι η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος και  $x$  είναι η χρησιμοποιούμενη ποσότητα ενός συντελεστή παραγωγής

- Οι συναρτήσεις αυτές έχουν ένα σημείο καμπής και ένα στάσιμο σημείο στο οποίο μεγιστοποιούνται



# Κυβικές οικονομικές συναρτήσεις (5/5)

- 3<sup>η</sup> κατηγορία
  - Έχουν ένα σημείο  $x_1$  στο οποίο ελαχιστοποιούνται και ένα σημείο  $x_2$  στο οποίο μεγιστοποιούνται.
  - Άρα μεταξύ των  $x_1$  και  $x_2$  υπάρχει ένα σημείο καμπής



# Γενικά πολυώνυμα

- $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_n \neq 0$



# Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας (1/2)

- Κάθε πολυώνυμο  $f(x)$ ,  $n$ -οστού βαθμού, με ρητούς, πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα





# Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας (2/2)

- Άμεση συνέπεια
  - Κάθε πολυωνυμική εξίσωση μιας μεταβλητής  $n$ -οστού βαθμού, μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο  $n$  γραμμικών παραγόντων



# Θεώρημα του υπολοίπου (1/3)

- Για οποιαδήποτε δύο πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$ , τέτοια ώστε ο βαθμός του  $P(x)$  να μην είναι μικρότερος από το βαθμό του  $Q(x)$  υπάρχει ένα και μόνο ένα ζεύγος πολυωνύμων  $g(x)$  και  $R(x)$  που ικανοποιούν την ταυτότητα

$$P(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

όπου ο βαθμός του  $R(x)$  είναι μικρότερος από το βαθμό του  $Q(x)$



# Θεώρημα του υπολοίπου (2/3)

- Όταν  $Q(x)=x-\alpha$  τότε το  $R(x)$  είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή αριθμητική σταθερά και ισχύει:

$$P(x)=g(x)(x-\alpha)+r$$

- Αν  $x=\alpha$  τότε  $P(x)=r$



# Θεώρημα του υπολοίπου (3/3)

- Επομένως, το  $P(x)$  διαιρείται ακριβώς με το  $x-\alpha$  αν και μόνο αν  $P(\alpha)=0$
- Δηλαδή το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει έναν παράγοντα  $x-\alpha$  αν και μόνο αν  $P(\alpha)=0$



# Παράδειγμα 5

- Έστω ότι  $x=-1$  είναι μια ρίζα του πολυωνύμου  $f(x)=x^3+8x^2+17x+10$
- Να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του και να το παραγοντοποιήσετε



# Παράδειγμα 6

- Να βρεθούν τα πολυώνυμα των οποίων οι ρίζες είναι οι:
  1.  $-3, 2$  και  $4$
  2.  $2+4i, 2-4i$



# Ρητές συναρτήσεις

- $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , με  $Q(x) \neq 0$
- Τα  $P(x)$  και  $Q(x)$  πρέπει να είναι πολυώνυμα



# Παραδείγματα ρητών συναρτήσεων (1/4)

- Υπερβολή
- $R(x) = \frac{A}{x} = \frac{Ax^0}{x}, x \neq 0$





# Παραδείγματα ρητών συναρτήσεων (2/4)

- Συναρτήσεις ζήτησης σταθερής ελαστικότητας
- $y = Ax^{-\beta} = \frac{Ax^0}{x^\beta}, A, \beta > 0$



# Παραδείγματα ρητών συναρτήσεων (3/4)

- Συνάρτηση μέσου κόστους

- $f(x) = \frac{900+200x}{x}$



# Παραδείγματα ρητών συναρτήσεων (4/4)

- Συνάρτηση συχνότητας
  - Χρησιμοποιείται στη στατιστική

- $$y = \frac{1}{1+(x-4)^2}$$



# Συναρτήσεις δύναμης

- $y = A\alpha^x$ ,  $\alpha, A \in \mathbb{R}$  και  $x \geq 0$



# Συνάρτηση ανατοκισμού

- $A = A_0(1 + r)^t$ 
  - $r$ : επιτόκιο ανατοκισμού
  - $t$ : χρόνος ανατοκισμού
  - $A_0$ : αρχικό ποσό
  - $A$ : τελικό ποσό
- Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο τόκος ενός κεφαλαίου προστίθεται στο κεφάλαιο και το άθροισμα που προκύπτει γίνεται το κεφάλαιο που τοκίζεται στη νέα περίοδο



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:





# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Μη γραμμικές συναρτήσεις (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

