



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 2: Γραμμικές συναρτήσεις (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών  
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

# Σκοποί ενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές τα βασικά χαρακτηριστικά των γραμμικών συναρτήσεων
- Να μπορούν να προσδιορίζουν μια ευθεία από ένα σημείο της και την κλίση της και από δύο σημεία της
- Να μπορούν να επιλύσουν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους
- Να γνωρίσουν τι είναι οι γραμμικές ανισότητες
- Να μάθουν τις βασικές γραμμικές οικονομικές συναρτήσεις και που χρησιμοποιούνται



# Περιεχόμενα ενότητας

- Βασικά χαρακτηριστικά γραμμικών συναρτήσεων
- Προσδιορισμός της ευθείας
- Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους
- Γραμμικές ανισότητες
- Γραμμικές οικονομικές συναρτήσεις



# Ορισμός γραμμικής συνάρτησης

- Μία συνάρτηση  $f$  με  $y=f(x)=\alpha+\beta x$ , όπου οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι αριθμητικές σταθερές
  - $\alpha$ : σταθερός όρος
  - $\beta$ : συντελεστής



# Ορισμός ευθείας γραμμής

- Ένα σύνολο σημείων με την ιδιότητα ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχόντα σημεία της έχει την ίδια κλίση



# Κλίση ευθύγραμμου τμήματος (1/2)

- Έστω το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  με  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$
- Η κλίση του  $AB$  ισούται με:

$$\frac{\text{μεταβολή στην } y}{\text{μεταβολή στην } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$$



# Κλίση ευθύγραμμου τμήματος (2/2)

- Αν  $y_2 > y_1 \Rightarrow$  θετική κλίση
- Αν  $y_2 < y_1 \Rightarrow$  αρνητική κλίση
- Αν  $y_2 = y_1 \Rightarrow$  μηδενική κλίση (οριζόντιο τμήμα)
- Αν  $x_2 = x_1 \Rightarrow$  δεν ορίζεται (κάθετο τμήμα)



# Κλίση γραμμικής συνάρτησης

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(\alpha + \beta x_2) - (\alpha + \beta x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{\beta x_2 - \beta x_1}{x_2 - x_1} = \beta \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \beta$$





# Μετασχηματισμοί γραμμικών συναρτήσεων

- Διαφορετική κλίση
  - Κοινό σημείο το  $(0, \alpha)$
- Ίδια κλίση
  - Η μία ευθεία είναι παράλληλη μετατόπιση της άλλης



# Προσδιορισμός ευθείας από σημείο και κλίση

- Έστω η κλίση της ευθείας  $\beta$  και το σημείο  $A(x_1, y_1)$  από το οποίο περνάει η ευθεία
- Έστω ένα άλλο αυθαίρετο σημείο  $B(x, y)$
- Άρα:

$$\beta = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow y - y_1 = \beta(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y = y_1 + \beta(x - x_1), \quad x \neq x_1$$



# Παράδειγμα 1

- Έστω ότι μια ασφαλιστική επιχείρηση είχε το 2005, 25.000 ασφαλισμένους και ότι η τάση είναι γραμμική με ένα μέσο ετήσιο ρυθμό αύξησης 2.800 ασφαλισμένους.
- Να προσδιοριστεί η εξίσωσή της ευθείας που περιγράφει την τάση αύξησης των ασφαλισμένων της επιχείρησης και να προσδιοριστεί ο αριθμός των ασφαλισμένων τα έτη 2000 και 2010



# Προσδιορισμός ευθείας από δύο σημεία

- Έστω ότι η ευθεία περνάει από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$

- Άρα:  $\beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

$$y - y_1 = \beta(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), x_2 \neq x_1$$



## Παράδειγμα 2

- Έστω ότι η συνολική δαπάνη για διαφήμιση στην τηλεόραση το 2000 ήταν 80 εκατομμύρια ευρώ και ότι η δαπάνη αυτή αύξανε με ένα σταθερό ετήσιο ρυθμό.
- Έστω ακόμη ότι το 2008 η συνολική δαπάνη για διαφήμιση ανήλθε στο ποσό των 120 εκατομμυρίων ευρώ.
- Να προσδιοριστεί η ευθεία που περνά από τα δύο αυτά σημεία και να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της ετήσιας δαπάνης για το έτος 2012



# Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους (1/2)

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

- $x = \frac{\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$
- $y = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$
- $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$



# Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους (2/2)

- Αν  $\Delta \neq 0$ , τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση
- Αν  $\Delta = 0$  και οι αριθμητές είναι και αυτοί ίσοι με το μηδέν το σύστημα είναι απροσδιόριστο και έχει άπειρες λύσεις
- Αν  $\Delta = 0$  και οι αριθμητές είναι διάφοροι του μηδενός το σύστημα είναι αδύνατο και δεν έχει λύση



# Παράδειγμα 3

- Έστω ότι μια μέρα αγοράζουμε 5 κιλά ενός προϊόντος A και 3 κιλά ενός προϊόντος B και πληρώνουμε συνολικά 34 ευρώ.
- Την επόμενη μέρα αγοράζουμε 2 κιλά A και 5 κιλά B και πληρώνουμε 25 ευρώ.
- Αν οι τιμές των δύο προϊόντων διατηρούνται σταθερές κατά τη διάρκεια των δύο ημερών, πόσο πληρώσαμε τη μονάδα του A και πόσο του B;





# Γεωμετρική απεικόνιση γραμμικού συστήματος

- Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο
  - Μία λύση
- Οι ευθείες συμπίπτουν
  - Άπειρες λύσεις
- Οι ευθείες είναι παράλληλες
  - Το σύστημα δεν έχει λύση



# Γραμμικές ανισότητες (1/2)

- $ax+by \leq c$  ή  $ax+by \geq c$
- Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού



# Γραμμικές ανισότητες (2/2)

- Μια επιχείρηση παράγει προϊόντα Α και Β χρησιμοποιώντας τους συντελεστές παραγωγής εργασία και κεφάλαιο με τα εξής δεδομένα παραγωγής

Κατηγορία πόρου	Παραγωγή Α	Παραγωγή Β	Ανώτατα όρια διαθέσιμων ποσοτήτων
Εργασία	2	5	10
Κεφάλαιο	4	3	12



# Γραμμικές οικονομικές συναρτήσεις (1/2)

- Συναρτήσεις ζήτησης
  - $Q_d = D(P) = \alpha - \beta P$ ,  $Q \geq 0$ ,  $P \geq 0$  και  $\beta > 0$



# Παράδειγμα 4

- Σε τιμή 80 € ενός προϊόντος η ζητούμενη ποσότητα είναι 10 μονάδες, ενώ σε τιμή 60 € είναι 20 μονάδες. Να προσδιορίσετε:
  1. Τη συνάρτηση ζήτησης
  2. Την τιμή στην οποία το προϊόν παρουσιάζει μηδενική ζήτηση
  3. Τη ζητούμενη ποσότητα όταν το προϊόν είναι ελεύθερο, δηλαδή όταν η τιμή του είναι μηδενική



# Γραμμικές οικονομικές συναρτήσεις (2/2)

- Συναρτήσεις προσφοράς
  - $Q_s = S(P) = \gamma + \delta P$ ,  $Q \geq 0$ ,  $P \geq 0$  και  $\delta > 0$



# Παράδειγμα 5

- Όταν η τιμή ενός προϊόντος είναι 20 € δεν προσφέρεται καμία ποσότητα στην αγορά. Με κάθε αύξηση 5 € της τιμής μονάδας προσφέρονται 10 επί πλέον μονάδες.
- Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση προσφοράς.



# Ισορροπία αγοράς

- Η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με την προσφερόμενη ποσότητα
- $P^*$ : τιμή ισορροπίας
  - Η τιμή στην οποία οι καταναλωτές επιθυμούν να αγοράσουν την ίδια ποσότητα ενός προϊόντος την οποία οι προμηθευτές προσφέρονται να πουλήσουν (στην τιμή αυτή)
- $Q^*$ : ποσότητα ισορροπίας





# Παράδειγμα 6

- Έστω οι παρακάτω γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς:

$$Q_d = 50 - 2P \text{ και } Q_s = 30 + 3P$$

- Ποια είναι η τιμή και ποια η ποσότητα ισορροπίας;



# Σημείο ισορροπίας σε παραμετρική μορφή

- Συνάρτηση ζήτησης
  - $Q_d = \alpha - \beta P$
- Συνάρτηση προσφοράς
  - $Q_s = \gamma + \delta P$
- $P^* = \frac{\alpha - \gamma}{\delta + \beta}, Q^* = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\delta + \beta}$



# Απλός τοκισμός

- Τόκος
  - το ποσό που πληρώνουμε για τη χρησιμοποίηση ενός χρηματικού ποσού
- Επιτόκιο
  - Το ποσό που χρεώνεται στους δανειολήπτες για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (%)
- Δανείζομαι  $K$  € με επιτόκιο  $r$ . Μετά από  $n$  έτη τι θα πληρώσω;

$$A = K + rKn = K(1 + rn)$$



# Παράδειγμα 7

- Αν δανειστούμε 20000 € με απλό επιτόκιο  $r=0,08$ , πόσο θα είναι οφειλόμενο ποσό μετά από  $n$  έτη;
- Ποιο είναι το ποσό των τόκων που προστίθεται κάθε έτος;



# Παράδειγμα 8

- Ένας δανείζεται 1000 € για 9 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 10%. Τι θα επιστρέψει στο τέλος των 9 μηνών (αρχικό ποσό + τόκους);



# Παράδειγμα 9

- Κάποιος δανείζεται 1000 € για 6 μήνες. Ποιο είναι το απλό επιτόκιο δανεισμού αν το τελικό ποσό  $A$  που θα πληρώσει μετά από τους 6 μήνες είναι 1045 €;



# Απλή προεξόφληση

- Για να πάρουμε  $K$  € μετά από  $n$  έτη με επιτόκιο  $r$  τι ποσό θα πρέπει να καταθέσουμε σήμερα;

$$P = K - Krn = K(1 - rn)$$



# Παράδειγμα 10

- Ένας δανειζόμενος συμφωνεί να πληρώσει 1000 € σε 9 μήνες με επιτόκιο απλής προεξόφλησης 10%. Πόσο είναι το ποσό που θα λάβει σήμερα;





# Γραμμική απόσβεση

- Αν  $C$  είναι το αρχικό κόστος ενός προς απόσβεση στοιχείου και αποσβένεται γραμμικά σε  $N$  χρόνια, η υπολειμματική αξία  $V$  στο τέλος των  $n$  χρόνων δίνεται από τη σχέση:

$$V = C - \frac{C}{N}n \Leftrightarrow V = C \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$



# Παράδειγμα 11

- Αν ένα μηχάνημα έχει αξία 10000 € και αποσβένεται σε 10 χρόνια, πόση είναι η αναπόσβεστη αξία του μετά από  $n$  έτη;
- Τι συμβαίνει όταν  $n=10$ ;



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



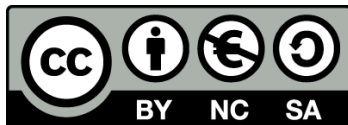
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Γραμμικές συναρτήσεις (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

