



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 10: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων
(Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τις οικονομικές εφαρμογές γραμμικών συστημάτων
- Να μπορούν να επιλύουν οι φοιτητές ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με τις μεθόδους Gauss και Gauss-Jordan
- Να μπορούν να επιλύουν οι φοιτητές υπερπροσδιορισμένα και υποπροσδιορισμένα συστήματα



Περιεχόμενα ενότητας

- Οικονομικές εφαρμογές γραμμικών συστημάτων
- Οι αλγόριθμοι απαλοιφής Gauss και Gauss-Jordan
- Υπερπροσδιορισμένα και υποπροσδιορισμένα συστήματα



Συνάρτηση πολλών μεταβλητών

- $y=f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
- Γραμμική πολυμεταβλητή συνάρτηση
 - $y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n$
- Γραμμική άλγεβρα
 - Περιοχή των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη των συστημάτων γραμμικών πολυμεταβλητών εξισώσεων



Παράδειγμα 1 (1/2)

- Έστω ότι μια επιχείρηση παράγει τα προϊόντα A, B, και Γ με τα εξής δεδομένα παραγωγής και κερδών:
 - για να παραχθεί μια μονάδα του A, χρησιμοποιούνται 3 μονάδες πρώτων υλών, μία μονάδα εργασίας και η πώλησή της αποφέρει κέρδη 25 €.
 - για να παραχθεί μια μονάδα του B, χρησιμοποιούνται 5 μονάδες πρώτων υλών, 2 μονάδες εργασίας και η πώλησή της αποφέρει κέρδη 15 €.
 - για να παραχθεί μια μονάδα του Γ, χρησιμοποιούνται 4 μονάδες πρώτων υλών, 3 μονάδες εργασίας και η πώλησή της αποφέρει κέρδη 30 €.



Παράδειγμα 1 (2/2)

- Έστω ότι παράγονται x_1 μονάδες του Α, x_2 μονάδες του Β και x_3 μονάδες του Γ
- Εκφράστε το παραπάνω πρόβλημα με μορφή συστήματος γραμμικών εξισώσεων
- Αν διατίθενται 38 μονάδες πρώτων υλών, 16 μονάδες εργασίας και θέλουμε να κερδίζουμε 180 € πόσες μονάδες του Α, πόσες μονάδες του Β και πόσες μονάδες του Γ θα πρέπει να παραχθούν;



Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

- Έστω m ο αριθμός των εξισώσεων και n ο αριθμός των αγνώστων
- Αν
 - $m=n \Rightarrow$ προσδιορισμένο γραμμικό σύστημα
 - $m>n \Rightarrow$ υπερπροσδιορισμένο γραμμικό σύστημα
 - $m<n \Rightarrow$ υποπροσδιορισμένο γραμμικό σύστημα



Οικονομικές εφαρμογές των γραμμικών συστημάτων (1/3)

- Επιμερισμός κόστους
 - Ο τρόπος με τον οποίο επιμερίζεται το κόστος της μονάδας ενός προϊόντος μεταξύ των συντελεστών παραγωγής



Οικονομικές εφαρμογές των γραμμικών συστημάτων (2/3)

- Ισορροπία αγοράς για πολλά αγαθά
 - Ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζεται η ζητούμενη ποσότητα κάθε προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής του και των τιμών των άλλων προϊόντων



Οικονομικές εφαρμογές των γραμμικών συστημάτων (3/3)

- Μοντέλο εισροών-εκροών
 - Εξετάζει τη δομή των σχέσεων αλληλεξάρτησης μεταξύ των διαφόρων τομέων μιας οικονομίας



Αλγόριθμος απαλοιφής Gauss

- Βήμα 1
 - Αντιμετάθεσε εξισώσεις, έτσι ώστε ο πρώτος άγνωστος x_1 να έχει μη μηδενικό συντελεστή, δηλαδή $a_{11} \neq 0$
- Βήμα 2
 - Για κάθε $i=2, \dots, m$ εφάρμοσε την πράξη

$$\mathbf{E}_i := \mathbf{E}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \mathbf{E}_1$$

όπου $\mathbf{E}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$



Παράδειγμα 2 (1/2)

- Έστω ότι πήγαμε τρεις συνεχόμενες ημέρες σε μία αγορά εμπορευόμενοι τα προϊόντα Α, Β και Γ
- Την πρώτη μέρα αγοράσαμε 2 μονάδες από το Α, τρεις μονάδες από το Γ και πουλήσαμε μια μονάδα από το Β και το συνολικό κόστος ήταν 18 €
- Τη δεύτερη μέρα αγοράσαμε 3 μονάδες από το Α, 1 μονάδα από το Γ, ενώ πουλήσαμε 2 μονάδες από το Β, και το συνολικό κόστος ήταν 9 €



Παράδειγμα 2 (2/2)

- Την τρίτη ημέρα πουλήσαμε 1 μονάδα από το A, αγοράσαμε 3 μονάδες από το B και μια μονάδα από το Γ και το συνολικό κόστος ήταν 6 €
- Αν οι τιμές των προϊόντων A, B και Γ δεν άλλαξαν τις τρεις αυτές ημέρες, ζητείται να προσδιοριστούν οι τιμές των προϊόντων αυτών στην αγορά



Πίνακας συντελεστών

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

(επαυξημένη μήτρα)



Περιπτώσεις λύσεων

- Μία λύση
- Απειρία λύσεων
- Καμία λύση (αδύνατο)



Αλγόριθμος απαλοιφής Gauss-Jordan (1/2)

1. Επιλέγουμε ένα αξονικό στοιχείο (μη μηδενικό συντελεστή της μεταβλητής x_k της εξίσωσης E_i , έστω το a_{ik}
2. Διαιρούμε κάθε όρο της εξίσωσης E_i δια του αξονικού a_{ik}
3. Θέτουμε δηλαδή $E_i \leftarrow \frac{1}{a_{ik}} E_i$, οπότε το αξονικό στοιχείο στη θέση (i,k) γίνεται μονάδα



Αλγόριθμος απαλοιφής Gauss-Jordan (2/2)

4. Στη συνέχεια απαλείφουμε τη μεταβλητή x_k από τις εξισώσεις που βρίσκονται πάνω και κάτω από την E_i θέτοντας

$$E_j = E_j - a_{jk}E_i, i \neq j$$

5. Με τον τρόπο αυτό δεν απαιτείται η διαδικασία της προς τα πίσω αντικατάστασης, αφού η λύση προκύπτει άμεσα από τον τελευταίο επαυξημένο πίνακα



Υπερπροσδιορισμένα συστήματα

- Ο αριθμός των εξισώσεων m είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αγνώστων n
- Μπορεί να έχουν μία λύση, απειρία λύσεων ή καμία λύση



Υποπροσδιορισμένα συστήματα

- Ο αριθμός των εξισώσεων m είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων n
- Δεν έχουν ποτέ μοναδική λύση
- Μπορεί να έχουν απειρία λύσεων ή και καμία λύση



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

