



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 8: Εφαρμογές παραγώγων – Μελέτη και
βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής
(Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Εφαρμογές των παραγώγων

Υποενότητα 1

Σκοποί 1^{ης} υποενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής και να κατανοήσουν τις οικονομικές εφαρμογές του



Περιεχόμενα 1^{ης} υποενότητας

- Ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής και οικονομικές εφαρμογές του



Ποσοστιαίος ή σχετικός ρυθμός μεταβολής

$$\frac{\text{οριακό μέγεθος}}{\text{ολικό μέγεθος}} = \frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

- Πολλαπλασιάζεται συνήθως επί 100 για να μας δώσει τον επί τοις εκατό ρυθμό μεταβολής της $f(x)$



Παράδειγμα 1

- Ποιος είναι ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης ολικών εσόδων $R(q)=50q-2q^2$;
- Ερμηνεύστε τι γίνεται όταν πουλάμε 2 ($q=2$) και όταν πουλάμε 4 ($q=4$) τόνους



Παράδειγμα 2

- Ποιος είναι ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής των παρακάτω συναρτήσεων;

1. $f(t) = Ke^{rt}$

2. $g(t) = K(1 + r)^t$



Ιδιότητες των ποσοσταιών ρυθμών μεταβολής (1/4)

- 3 χρήσιμες ιδιότητες...



Ιδιότητες των ποσοσταιών ρυθμών μεταβολής (2/4)

- Αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ τότε $P_f = P_g + P_h$

όπου P_f , P_g και P_h οι ποσοσταιοί ρυθμοί μεταβολής των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$, αντίστοιχα.



Ιδιότητες των ποσοσטיαίων ρυθμών μεταβολής (3/4)

- Αν $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ τότε $P_f = P_g - P_h$

όπου P_f , P_g και P_h οι ποσοσטיαίοι ρυθμοί μεταβολής των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$, αντίστοιχα.



Ιδιότητες των ποσοσטיαίων ρυθμών μεταβολής (4/4)

- Αν $f(x) = g(x)+h(x)$ τότε

$$P_f = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)} P_g + \frac{h(x)}{g(x) + h(x)} P_h$$

όπου P_f , P_g και P_h οι ποσοσטיαίοι ρυθμοί μεταβολής των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$.



Παράδειγμα 3

- Αν οι τιμές των βιομηχανικών προϊόντων αυξάνουν σύμφωνα με τη συνάρτηση $g(t) = 100e^{0,5\sqrt{t}}$ και η παραγωγή αυξάνει σύμφωνα με τη συνάρτηση $h(t) = 1000000e^{0,2\sqrt{t}}$ να προσδιοριστεί το ποσοστό αύξησης στο εισόδημα του βιομηχανικού τομέα της οικονομίας το χρόνο $t=4$



Παράδειγμα 4

- Έστω ότι το εθνικό εισόδημα μιας χώρας αυξάνει σύμφωνα με τη συνάρτηση
$$Y = g(t) = Ae^{0,1\sqrt{t}},$$
 όπου $A=200$ δισεκατομμύρια ευρώ και ο πληθυσμός της σύμφωνα με τη συνάρτηση $P = h(t) = 20000000e^{0,03t}$.
- Να υπολογιστεί ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εθνικού εισοδήματος όταν $t=4$



Παράδειγμα 5

- Οι εξαγωγές f μιας χώρας σε λάδι g και σταφίδα h στο χρόνο t_0 ήταν $g(t_0) = 20$ δισ. ευρώ και $h(t_0) = 25$ δισ. ευρώ.
- Αν η παραγωγή της σταφίδας αυξάνει με ετήσιο ρυθμό **5%** και του λαδιού με **7%**, ποιος θα είναι ο ποσοστιαίος ρυθμός αύξησης των εξαγωγών από τα προϊόντα αυτά;



Τέλος Υποενότητας 1

Μελέτη και βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής

Υποενότητα 2

Σκοποί 2^{ης} υποενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια της αύξουσας και φθίνουσας συνάρτησης
- Να μάθουν οι φοιτητές τις βασικές έννοιες της βελτιστοποίησης συναρτήσεων
- Να μπορούν οι φοιτητές να βρίσκουν τα τοπικά βέλτιστά και τα σημεία καμπής με οριζόντια εφαπτομένη μιας συνάρτησης
- Να μπορούν οι φοιτητές να βρίσκουν τα σφαιρικά βέλτιστα σημεία μιας συνάρτησης
- Να μπορούν οι φοιτητές να βρίσκουν σε ποια διαστήματα μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής που έχει



Περιεχόμενα 2^{ης} υποενότητας

- Αύξουσες, φθίνουσες συναρτήσεις
- Βασικές έννοιες βελτιστοποίησης
- Τοπικά βέλτιστά σημεία και σημεία καμψής με οριζόντια εφαπτομένη
- Σφαιρικά βέλτιστα σημεία
- Κυρτότητα, καμπυλότητα και σημεία καμψής



Αύξουσες, φθίνουσες συναρτήσεις (1/2)

- Αν για κάθε $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ τότε η f είναι αύξουσα
- Αν για κάθε $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα
- Αν για κάθε $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε η f είναι φθίνουσα
- Αν για κάθε $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα



Αύξουσες, φθίνουσες συναρτήσεις (2/2)

- Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι αύξουσα στο I
- Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι φθίνουσα στο I



Ολικό και τοπικό ελάχιστο (ακρότατα)

- Το $x_0 \in X$ καλείται ολικό ελάχιστο σημείο της f αν και μόνο αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$
- Το $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καλείται τοπικό ελάχιστο σημείο της f στο (α, β) αν και μόνο αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$



Ολικό και τοπικό μέγιστο (ακρότατα)

- Το $x_0 \in X$ καλείται ολικό μέγιστο σημείο της f αν και μόνο αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in X$
- Το $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καλείται τοπικό μέγιστο σημείο της f στο (α, β) αν και μόνο αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

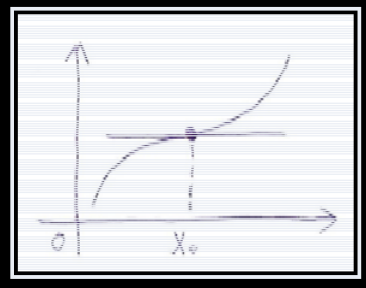
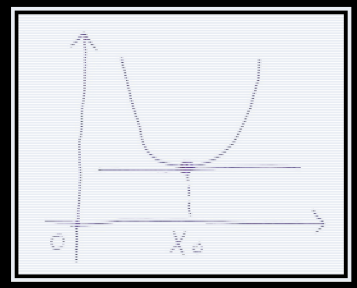
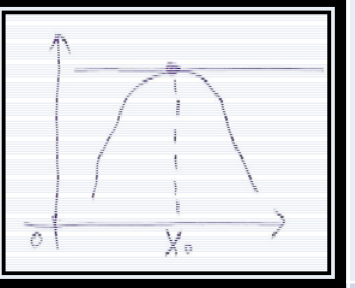
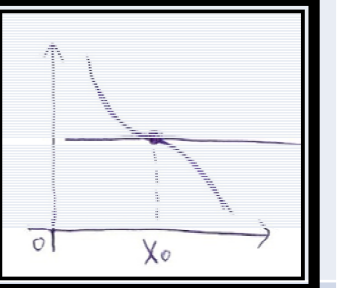
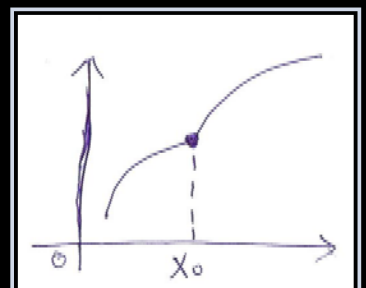
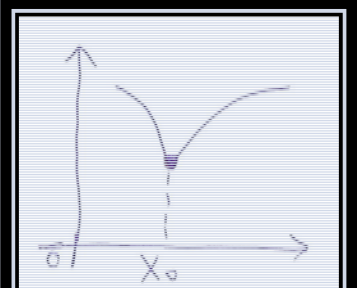
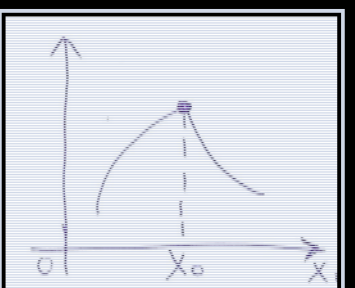
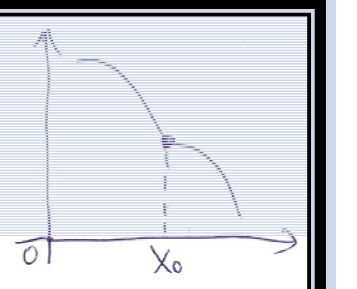


Κρίσιμα σημεία συνάρτησης

- Τα σημεία στα οποία $f'(x_0)=0$ ή το $f'(x_0)$ δεν ορίζεται
- Όταν $f'(x_0)=0$ το σημείο x_0 ονομάζεται στάσιμο ή σαγματικό σημείο



Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων στα κρίσιμα σημεία

Περίπτωση	Σημείο καμπής	Ελάχιστο	Μέγιστο	Σημείο καμπής
	$f'(x_0-h) > 0$ $f'(x_0+h) > 0$	$f'(x_0-h) < 0$ $f'(x_0+h) > 0$	$f'(x_0-h) > 0$ $f'(x_0+h) < 0$	$f'(x_0-h) < 0$ $f'(x_0+h) < 0$
$f'(x_0) = 0$				
Η f' είναι ασυνεχής στο x_0 (δηλαδή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει)				



Παράδειγμα 6

- Προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

με βάση την τιμή της 1^{ης} παραγώγου



Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων με βάση τη 2^η παράγωγο (1/3)

- Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I :
 - αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$, τότε το x_0 είναι ένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο σημείο



Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων με βάση τη 2^η παράγωγο (2/3)

- Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I :
 - αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$, τότε το x_0 είναι ένα αυστηρά τοπικό μέγιστο σημείο



Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων με βάση τη 2^η παράγωγο (3/3)

- Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I :
 - αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)=0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε και απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση



Προσδιορισμός τοπικών ακρότατων με βάση τη n -οστή παράγωγο

- Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα I και παραγωγίσιμη $n \geq 2$ φορές σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του I , με $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ και $f^n(x_0) \neq 0$, τότε το x_0 είναι:
 - Τοπικό ελάχιστο αν $f^n(x_0) > 0$ και n άρτιος
 - Τοπικό μέγιστο αν $f^n(x_0) < 0$ και n άρτιος
 - Σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη αν n περιττός



Παράδειγμα 7

- Βρείτε τι είδους ακρότατο ή σημείο καμπής έχουν στο $x_0=0$ οι παρακάτω συναρτήσεις:
 1. $f(x)=x^3$
 2. $f(x)=x^4$
 3. $f(x)=-x^4$



Κυρτότητα, κοιλότητα και σημεία καμπής (1/2)

- Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα I και διπλά παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο $x \in I$:
 1. Η f είναι κυρτή στο I και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$
 2. Η f είναι κοίλη στο I και μόνο αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in I$



Κυρτότητα, κοιλότητα και σημεία καμπής (2/2)

Η $f''(x)$ είναι στο διάστημα I	Μαθηματική ιδιότητα	Οικονομική ιδιότητα
Θετική	Η $f(x)$ είναι κυρτή στο I	Η $f(x)$ έχει αύξουσες οριακές αποδόσεις στο I
Αρνητική	Η $f(x)$ είναι κοίλη στο I	Η $f(x)$ έχει φθίνουσες οριακές αποδόσεις στο I



Παράδειγμα 8

- Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση ολικών εσόδων

$$R(q) = -2q^3 + 35q^2 - 100q$$

είναι κυρτή ή κοίλη και τα τυχόν σημεία καμπής



Προσδιορισμός σημείων καμπής με τη 2^η παράγωγο

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $f'(x)$, δηλαδή τα σημεία x_0 για τα οποία $f''(x_0)=0$ ή η $f''(x_0)$ δεν υπάρχει
2. Τα σημεία καμπής είναι τα σημεία x_0 αυτού του συνόλου για τα οποία η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο



Παράδειγμα 9

- Οι ολικές πωλήσεις σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ μιας μεγάλης επιχείρησης εξαρτώνται από το μέγεθος της διαφημιστικής δαπάνης που διατίθενται για την προώθηση των προϊόντων της σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$R(x) = -0,02x^3 + 1,2x^2 + 1000, \quad 0 \leq x \leq 1000$$

- Ζητείται να βρεθούν τυχόν σημεία καμπής της $R(x)$ και να ερμηνευτούν οικονομικά



Προσδιορισμός σημείων καμπής με τη n -οστή παράγωγο

- Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του (α, β) με $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ και $f^n(x_0) \neq 0$
- Τότε το σημείο x_0 είναι θέση σημείου καμπής αν n είναι περιττός και ισχύει
 - αν $f^n(x_0) > 0$ η f είναι κοίλη αριστερά του x_0 και κυρτή δεξιά του x_0
 - αν $f^n(x_0) < 0$ η f είναι κυρτή αριστερά του x_0 και κοίλη δεξιά του x_0



Παράδειγμα 10

- Να προσδιοριστούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$$f(x)=x^3-3x^2$$



Παράδειγμα 11

- Να βρεθούν τυχόν τοπικά βέλτιστα ή σημεία καμπής της συνάρτησης

$$f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$$

χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο της **f**



Παράδειγμα 12

- Βρείτε τι είδους ακρότατα ή σημεία καμπής έχει η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$$

χρησιμοποιώντας την 1^η και τη 2^η παράγωγο της συνάρτησης



Παράδειγμα 13

- Να βρεθούν τυχόν τοπικά βέλτιστα ή σημεία καμπής της συνάρτησης

$$f(x)=x^x$$

χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο της **f**



Τέλος Υποενότητας 2

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



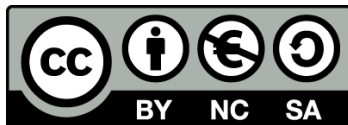
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Εφαρμογές παραγώγων – Μελέτη και βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

