



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 6: Όριο και συνέχεια συναρτήσεων
(Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί 1^{ης} ενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης
- Να μάθουν οι φοιτητές να υπολογίζουν το όριο μιας συνάρτησης
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές το όριο προς άπειρο και το άπειρο όριο
- Να μπορούν οι φοιτητές να βρίσκουν τις ασύμπτωτες μιας συνάρτησης
- Να μάθουν οι φοιτητές να ελέγχουν αν μια συνάρτηση είναι συνεχής



Περιεχόμενα 1^{ης} ενότητας

- Όριο συνάρτησης
- Υπολογισμός ορίων
- Ασύμπτωτες
- Όριο προς το άπειρο και άπειρο όριο
- Συνέχεια συναρτήσεων
- Είδη ασυνέχειας



Συμβολισμός ορίου συνάρτησης

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ή

- $f(x) \rightarrow L$ καθώς $x \rightarrow a$



Ορισμός ύπαρξης ορίου

- Αν για τη συνάρτηση $y = f(x)$ ισχύουν:

i. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$

ii. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

iii. $L_1 = L_2$

τότε το όριο της $f(x)$ καθώς $x \rightarrow a$ υπάρχει και είναι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 = L_2$



Λήμμα

- Το όριο L μιας συνάρτησης $y=f(x)$, καθώς το x προσεγγίζει έναν αριθμό a , δεν εξαρτάται από την τιμή της $f(x)$ στο σημείο a



Ιδιότητες ορίων

- Απαραίτητες για την εύρεση του ορίου μιας συνάρτησης



Παράδειγμα 1

- Να υπολογιστούν τα όρια των συναρτήσεων:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 3x + 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2+3x+10} \right)$



Παράδειγμα 2

- Να υπολογιστούν τα όρια των συναρτήσεων:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + 3)^4$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x^3 + 9}$



Ασύμπτωτες (1/2)

- Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

ή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

τότε η ευθεία $y=a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη
της συνάρτησης $f(x)$



Ασύμπτωτες (2/2)

- Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \underline{\pm\infty}$

ή

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \underline{\pm\infty}$$

τότε η ευθεία $x=\alpha$ είναι κατακόρυφη
ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x)$



Παράδειγμα 3

- Να βρεθούν τυχόν κάθετες και οριζόντιες ασύμπτωτες του γραφήματος της συνάρτησης

$$y = f(x) = \frac{x}{x-2}$$



Ορισμός συνέχειας συνάρτησης (1/2)

- Μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x=a$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$



Ορισμός συνέχειας συνάρτησης (2/2)

- Για να είναι μια συνάρτηση συνεχής στο a θα πρέπει να ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες:
 1. Το a θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της, έτσι ώστε το $f(a)$ να υπάρχει
 2. Το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ να υπάρχει (να είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός)
 3. Να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



Είδη ασυνέχειας (1/3)

- **1^ο είδος**

- Το $f(a)$ δεν ορίζεται και το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ δεν υπάρχει
- Η $f(x)$ σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχει άπειρη ασυνέχεια στο $x=a$ η οποία είναι μη εξαλείψιμη



Είδη ασυνέχειας (2/3)

- 2^ο είδος

- Το $f(a)$ ορίζεται αλλά το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ δεν υπάρχει
- Η $f(x)$ σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχει πεπερασμένη ασυνέχεια στο $x=a$ η οποία είναι μη εξαλείψιμη
- Στο $x=a$ τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους, οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει ένα πήδημα στο $x=a$



Είδη ασυνέχειας (3/3)

- 3^ο είδος

- Το $f(a)$ δεν ορίζεται αλλά το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ υπάρχει
- Η $f(x)$ σε αυτή την περίπτωση έχει εξαλείψιμη ασυνέχεια στο $x=a$
- Πως εξαλείφεται αυτή η ασυνέχεια;



Παράδειγμα 4

- Ποιο είδος ασυνέχειας παρουσιάζει η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2};$$



Παράδειγμα 5

- Ποιο είδος ασυνέχειας παρουσιάζει η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}};$$



Παράδειγμα 6

- Ποιο είδος ασυνέχειας παρουσιάζει η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 11x + 12}{x - 4}, & x \neq 4; \\ 2, & x = 4 \end{cases}$$



Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- 5 χρήσιμες ιδιότητες...



Παράδειγμα 7

- Να βρεθούν τυχόν οριζόντιες ή/και κάθετες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

$$1. f(x) = \frac{4x+1}{x}$$

$$2. f(x) = \frac{4x+1}{x^2}$$



Παράδειγμα 8

- Να προσδιοριστούν τα σημεία ασυνέχειας καθώς και το είδος ασυνέχειας της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{4x}{4 - x^2}$$



Παράδειγμα 9

- Να υπολογιστούν τα σύνολα τιμών της μεταβλητής x για τα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

$$1. f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{(x+1)(x+2)}$$

$$2. f(x) = (x^3 - 1) \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{x+5}}$$



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Όριο και συνέχεια συναρτήσεων (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

