



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 4: Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
(Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί 1^{ης} ενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές να αναγνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις ανατοκισμού, απόσβεσης και πληθυσμού
- Να μάθουν οι φοιτητές να διαχειρίζονται και να χρησιμοποιούν τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τις εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων



Περιεχόμενα 1^{ης} ενότητας

- Οι συναρτήσεις ανατοκισμού, απόσβεσης και πληθυσμού
- Φυσικές εκθετικές συναρτήσεις
- Λογαριθμικές συναρτήσεις
- Φυσικές λογαριθμικές συναρτήσεις
- Προσδιορισμός φυσικής εκθετικής συνάρτησης από δύο σημεία
- Οικονομικές εφαρμογές φυσικών εκθετικών συναρτήσεων



Ορισμός εκθετικής συνάρτησης

- Η οικογένεια των μη γραμμικών εξισώσεων που έχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή x ως εκθέτη μιας σταθεράς b , που ονομάζεται βάση.
- $f(t) = Ab^t$
- όπου A και $b \neq 1$ είναι θετικές σταθερές



Βασικό χαρακτηριστικό

- Η τιμή μιας εκθετικής συνάρτησης f στο χρόνο $t+1$ ισούται προς την τιμή της f στο χρόνο t πολλαπλασιασμένη επί τη βάση b .
- Εναλλακτικά, η βάση b είναι ο παράγοντας με τον οποίο η $f(t)$ μεταβάλλεται όταν η t αυξηθεί κατά μία μονάδα.



Εφαρμογή σε οικονομικά μεγέθη

- Οι εκθετικές συναρτήσεις της μορφής $f(t) = \mathbf{A}b^t$ μπορούν να εκφράσουν οικονομικά μεγέθη, οι τιμές των οποίων μεταβάλλονται συνήθως με το χρόνο και που αυξάνουν ή φθίνουν με ένα σταθερό παράγοντα για κάθε μονάδα χρόνου



Περιπτώσεις (1/2)

- Αν $b > 1$:
 - η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και ονομάζεται συνάρτηση μεγέθυνσης
 - το b ονομάζεται παράγοντας μεγέθυνσης
 - Παραδείγματα:
 - συνάρτηση ανατοκισμού
 - συνάρτηση πληθυσμού



Περιπτώσεις (2/2)

- Αν $0 < b < 1$:
 - η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και ονομάζεται συνάρτηση φθίσης
 - το b ονομάζεται παράγοντας φθίσης
 - Παραδείγματα:
 - απόσβεση περιουσιακών στοιχείων



Ασυνεχής ανατοκισμός

- Στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, ο τόκος ενός κεφαλαίου προστίθεται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει από το άθροισμά τους είναι το κεφάλαιο που θα τοκιστεί την επόμενη χρονική περίοδο



Παρούσα αξία

- Το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε στην αρχή του 1^{ου} έτους προκειμένου να εισπράξουμε το ποσό A_t μετά την ολοκλήρωση t ετών, όταν το επιτόκιο είναι r



Ανατοκισμός περισσότερες από μία φορές το χρόνο

- $n \geq 2$
- Αν ο ανατοκισμός γίνεται n φορές το χρόνο, το ισοδύναμο επιτόκιο είναι r/n .



Απόσβεση παγίων περιουσιακών στοιχείων

- Υπολογίζει την απομένουσα αξία του εξοπλισμού μετά από t έτη.
- Πως βρίσκουμε τις αποσβέσεις που έχουν γίνει μετά από t έτη;



Παράδειγμα 1

- Έστω ότι έχουμε ένα μηχάνημα αξίας 40000€ που αποσβένεται 15% ετησίως.
- Ζητούνται:
 1. Η απομένουσα αξία του μηχανήματος μετά το τέλος του 8^{ου} έτους.
 2. Οι συνολικές αποσβέσεις των 8 ετών.



Μεγέθυνση πληθυσμού

- Διέπει τη συμπεριφορά μεγέθυνσης διαφόρων ειδών πληθυσμών από βακτήρια μέχρι ανθρώπους



Παράδειγμα 2

- Έστω ότι ένας αρχικός πληθυσμός 10 εκατομμυρίων αυξάνει σταθερά με ένα ετήσιο ρυθμό αύξησης 0,75%. Πόσος θα είναι ο πληθυσμός μετά το πέρας 8 ετών;



Φυσικές εκθετικές συναρτήσεις

- $e^u = \exp(u)$
- $e = 2,718281 \dots$
(άρρητος)



Συνεχής ανατοκισμός

- Ο τόκος υπολογίζεται στιγμιαία, δηλαδή το n (πλήθος ανατοκισμών στη διάρκεια του έτους) τείνει στο άπειρο



Παράδειγμα 3

- Να υπολογιστούν τα ποσά που θα εισπράξουμε στο τέλος των 10 ετών, όταν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος, εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος, ημερήσιος και τέλος συνεχής, αν καταθέσουμε σήμερα 100000€ με ετήσιο επιτόκιο 8%



Προεξόφληση

- Τι ποσό **A** πρέπει να καταθέσουμε σήμερα για να πάρουμε το ποσό **V** μετά από **t** έτη, όταν το επιτόκιο είναι **r**;
- Ποια είναι δηλαδή η παρούσα αξία **A** ενός ποσού **V** μετά από **t** έτη, όταν το επιτόκιο είναι **r**;



Σύνοψη

- $f(t) = \begin{cases} Ae^{rt}, & \text{αν η } f(t) \text{ είναι αύξουσα} \\ Ae^{-rt}, & \text{αν η } f(t) \text{ είναι φθίνουσα} \end{cases}$



Ονομαστικό VS Πραγματικό επιτόκιο

- Το πραγματικό επιτόκιο υπολογίζεται από το ονομαστικό σε σχέση με το πόσες φορές τοκίζεται το κεφάλαιο μέσα σε ένα έτος
- Η εξίσωση για συνεχή ανατοκισμό είναι διαφορετική από την εξίσωση για διακριτό ανατοκισμό



Παράδειγμα 4

- Η τράπεζα Α προσφέρει ετήσιο επιτόκιο 5,5% με τριμηνιαίο ανατοκισμό, ενώ η τράπεζα Β προσφέρει 5,2% με συνεχή ανατοκισμό
- Να επιλεγεί η τράπεζα με την καλύτερη προσφορά



Λογαριθμική συνάρτηση

- **Αντίστροφη της εκθετικής**

$$- b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b y$$

- **Δεκαδικός λογάριθμος:**

$$- 10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$$

- **Νεπέρειος ή φυσικός λογάριθμος:**

$$- e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$



Θεμελιώδης λογαριθμική ταυτότητα

- $b^{\log_b x} = x$

και

- $x = \log_b b^x$



Σχέση γραφημάτων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

- Σχέση γραφημάτων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων
 - Είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x=y$ επειδή οι συναρτήσεις είναι αντίστροφες



Ιδιότητες λογαριθμικών συναρτήσεων

- Η απόδειξή τους προκύπτει άμεσα από το συνδυασμό της θεμελιώδους λογαριθμικής ταυτότητας και τις ιδιότητες των δυνάμεων



Χρήση λογαρίθμων στη συνάρτηση συνεχούς ανατοκισμού

- Να βρεθεί ο αριθμός των ετών t που απαιτούνται, ώστε ένα αρχικό κεφάλαιο A , με ασυνεχή ανατοκισμό επιτοκίου r να γίνει ίσο με y



Παράδειγμα 5

- Σε πόσα χρόνια ένα αρχικό ποσό 10.000€ γίνεται 21.170€, όταν το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $r=0,05$;



Παράδειγμα 6

- Να λυθεί η εξίσωση $3^{2x} = 2^{x+1}$



Φυσικές λογαριθμικές συναρτήσεις

- $e^y = a \Leftrightarrow y = \log_e a = \ln a$
- $e^y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln f(x)$



Γραφήματα φυσικών, εκθετικών και λογαριθμικών, συναρτήσεων

- Είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x=y$ επειδή οι συναρτήσεις είναι αντίστροφες



Χρησιμότητα φυσικών εκθετικών συναρτήσεων

- Κάθε συνάρτηση $f(x) > 0$, εκθετική ή μη, συνεχούς ή ασυνεχούς μεταβλητής, μπορεί να αναχθεί σε μια φυσική εκθετική συνάρτηση της μορφής $e^{\ln f(x)}$.
- Παραδείγματα...



Προσδιορισμός εκθετικής συνάρτησης από σημεία

- Πόσα σημεία απαιτούνται;
- Τι πρέπει να κάνουμε αρχικά για να μπορέσουμε να επιλύσουμε το σύστημα των δύο εκθετικών συναρτήσεων;



Προσδιορισμός λογαριθμικής συνάρτησης από σημεία

- Πόσα σημεία απαιτούνται;
- Τι πρέπει να κάνουμε αρχικά για να μπορέσουμε να επιλύσουμε το σύστημα των δύο λογαριθμικών συναρτήσεων;



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (1/6)

- **1^η Κατηγορία:**

- Οικονομικές συναρτήσεις απεριόριστης μεγέθυνσης

- $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$



Παράδειγμα 7

- Έστω ότι ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνει με σταθερό ετήσιο ρυθμό $r=0,03$ ως συνάρτηση του χρόνου t
- Ζητούνται:
 - Ποιος προβλέπεται να είναι ο πληθυσμός της πόλης το 2020, όταν ο πληθυσμός της το 2010 ήταν 100000;
 - Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός της πόλης αυτής θα διπλασιαστεί;



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (2/6)

- **2^η Κατηγορία:**

- Οικονομικές συναρτήσεις περιορισμένης μεγέθυνσης
- Εκφράζουν συχνά σχέσεις μεταξύ της αποτελεσματικότητας με την οποία ένα άτομο εκτελεί ένα έργο και του μεγέθους της εμπειρίας ή της εκπαίδευσης που το άτομο αυτό έχει συσσωρεύσει



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (3/6)

- 2^η Κατηγορία:

- Υποκατηγορία 2.1 (καμπύλες μάθησης):

- Οικονομικές συναρτήσεις οι τιμές των οποίων αρχικά αυξάνουν γρήγορα και στη συνέχεια προσεγγίζουν ασυμπτωτικά ένα ανώτατο όριο b με φθίνοντα ρυθμό.

$$y = f(t) = b - ae^{-rt}$$

με a, b και $r > 0$



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (4/6)

- 2^η Κατηγορία:

- Υποκατηγορία 2.2 (καμπύλες μάθησης):

- Οικονομικές συναρτήσεις οι τιμές των οποίων αρχικά φθίνουν γρήγορα και στη συνέχεια προσεγγίζουν ασυμπτωτικά ένα κατώτατο όριο b με φθίνοντα ρυθμό.

$$y = f(t) = b - ae^{-rt}$$

με $a < 0$ και $b, r > 0$



Παράδειγμα 8

- Έστω ότι η ποσότητα παραγωγής Q ενός προϊόντος είναι συνάρτηση των ημερών απασχόλησης t σύμφωνα με τη σχέση:
- $Q = f(t) = 80 - 60e^{-0,05t}$
- Ζητούνται:
 - Η παραγωγή των 10 και 20 πρώτων ημερών απασχόλησης
 - Το ποσοστό της μέγιστης παραγωγής που αντιστοιχεί στην παραγωγή των 20 πρώτων ημερών



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (5/6)

- **2^η Κατηγορία:**

- **Υποκατηγορία 2.3 (λογιστικές καμπύλες):**

- Οικονομικές συναρτήσεις των οποίων οι τιμές αυξάνουν μονοτονικά με αυξανόμενο ρυθμό μέχρι ένα σημείο $t=t^*$, στο οποίο ο ρυθμός αύξησης μεγιστοποιείται. Μετά από αυτό το σημείο οι τιμές εξακολουθούν να αυξάνουν αλλά με φθίνοντα ρυθμό προσεγγίζοντας ασυμπτωτικά ένα ανώτατο όριο b
 - Στο σημείο t^* έχουν σημείο καμπής

$$y = f(t) = \frac{b}{1 + ae^{-rt}}$$

με $a, b, r > 0$



Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων (6/6)

- **2^η Κατηγορία:**
 - Υποκατηγορία 2.3 (λογιστικές καμπύλες)



Παράδειγμα 9

- Οι πωλήσεις ενός νέου προϊόντος σε σχέση με το χρόνο t δίνονται από τη συνάρτηση

$$y = f(t) = \frac{15000}{1 + 50e^{-1,2t}}$$

όπου t μετράται σε χρόνια

- Ζητείται να αναλυθεί η συμπεριφορά των πωλήσεων του προϊόντος αυτού



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

