



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 1: Συναρτήσεις (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί ενότητας

- Να κατανοήσουν οι φοιτητές την έννοια της συνάρτησης, των μεταβλητών, των σταθερών και των παραμέτρων της
- Να μάθουν οι φοιτητές να σχεδιάζουν το γράφημα μιας συνάρτησης και των μετασχηματισμών της
- Να μάθουν οι φοιτητές να πραγματοποιούν πράξεις μεταξύ συναρτήσεων
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τη σύνθεση συναρτήσεων και την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης



Περιεχόμενα ενότητας

- Η έννοια της συνάρτησης
- Μεταβλητές, σταθερές, παράμετροι
- Γράφημα συνάρτησης και μετασχηματισμοί της
- Πράξεις με πραγματικές συναρτήσεις
- Σύθεση συναρτήσεων
- Αντίστροφες συναρτήσεις



Ορισμός συνάρτησης (1/2)

- Μία συνάρτηση f με $y=f(x)$ είναι ένας μετασχηματισμός που αντιστοιχεί την τιμή $f(x)$ σε κάθε τιμή x που δέχεται ως είσοδο



Ορισμός συνάρτησης (2/2)

- Η x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή
- Η y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή
- Για κάθε συγκεκριμένη τιμή x_0 της x , η $f(x_0)$ ονομάζεται τιμή ή εικόνα της f στο x_0



Πεδίο ορισμού συνάρτησης

- Οι τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x ώστε να ορίζεται η $f(x)$



Σύνολο τιμών συνάρτησης

- Οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή $y=f(x)$



Παράδειγμα 1

- Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^2+x+1$;



Ίσες συναρτήσεις

- Οι συναρτήσεις f και g που έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού X , και για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(x)=g(x)$, λέγεται ότι είναι ίσες και γράφουμε $f=g$



Παράδειγμα 2

- Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=x^3$ και $f_2(y)=y^3$, με x,y πραγματικούς αριθμούς. Είναι ίσες;
- Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=x^2$ και $f_2(y)=y^2$, με $0 \leq x \leq 4$ και $3 \leq y \leq 5$. Είναι ίσες;



Πως βρίσκουμε αν το y_0 ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης;

- Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y_0$



Παράδειγμα 3

- Να δείξετε ότι ο αριθμός 7 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{5x + 9}$



Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση που έχει ρίζα μια τιμή x_0 ;

- Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $y=f(x)$ και για $x=x_0$, $f(x)=y_0$.
- Τότε το x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)-y_0=0$



Παράδειγμα 4

- Να κατασκευαστεί μια εξίσωση που να έχει ρίζα την -1



Αντικατάσταση μεταβλητής

- Παραδείγματα...



Ταυτότητα VS Εξίσωση

- Η ταυτότητα είναι μια ισότητα που αληθεύει για κάθε τιμή του πεδίου ορισμού της μεταβλητής
- Η εξίσωση αληθεύει για ορισμένες μόνο τιμές της μεταβλητής



Συναρτήσεις 1 προς 1

- Μια συνάρτηση $f:X \rightarrow Y$ είναι μια ένα προς ένα συνάρτηση αν για κάθε $\alpha, \beta \in X$, $f(\alpha) = f(\beta)$ συνεπάγεται $\alpha = \beta$, ή ισοδύναμα αν $\alpha \neq \beta$ συνεπάγεται $f(\alpha) \neq f(\beta)$



Παράδειγμα 5

- Δείξτε αν η συνάρτηση $f(x)=-x^2+8x+40$ είναι ένα προς ένα
- Δείξτε αν η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι ένα προς ένα



Συναρτήσεις επί

- Αν για μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ ισχύει $f(X) = Y$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του Y είναι μια εικόνα τουλάχιστον ενός στοιχείου του X , τότε λέμε ότι η f είναι μια συνάρτηση επί



Παράδειγμα 6

- Δείξτε αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι συνάρτηση επί
- Δείξτε αν η συνάρτηση $f:[-1,1]\rightarrow[-1,1]$ με $f(x)=x^3$ είναι συνάρτηση επί



Μετασχηματισμοί γραφήματος συνάρτησης (1/5)

- Μετατοπίσεις
 - Κατασκευή του γραφήματος της $f(x)+\alpha$ από αυτό της $f(x)$
 - Κάθετη μετατόπιση
 - Κατασκευή του γραφήματος της $f(x+\alpha)$ από αυτό της $f(x)$
 - Οριζόντια μετατόπιση



Μετασχηματισμοί γραφήματος συνάρτησης (2/5)

- Αντανάκλασεις
 - Κατασκευή του γραφήματος της $f(-x)$ από αυτό της $f(x)$
 - Αντανάκλαση στον άξονα των y
 - Κατασκευή του γραφήματος της $-f(x)$ από αυτό της $f(x)$
 - Αντανάκλαση στον άξονα των x



Μετασχηματισμοί γραφήματος συνάρτησης (3/5)

- Αντανakλάσεις
 - Κατασκευή του γραφήματος της $-f(-x)$ από αυτό της $f(x)$
 - Αντανάκλαση μέσω της αρχής των αξόνων $(0,0)$



Μετασχηματισμοί γραφήματος συνάρτησης (4/5)

- Διαστολές – Συστολές
 - Κατασκευή του γραφήματος της $k \cdot f(x)$ από αυτό της $f(x)$
 - $|k| > 1 \Rightarrow$ διαστολή
 - $0 < |k| < 1 \Rightarrow$ συστολή κατά μήκος του άξονα των x



Μετασχηματισμοί γραφήματος συνάρτησης (5/5)

- Διαστολές – Συστολές
 - Κατασκευή του γραφήματος της $f(k \cdot x)$ από αυτό της $f(x)$
 - $k > 1 \Rightarrow$ συστολή
 - $0 < k < 1 \Rightarrow$ διαστολή κατά μήκος του άξονα των y



Πράξεις συναρτήσεων (1/4)

- Άθροισμα συναρτήσεων

$$- (f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

- Διαφορά συναρτήσεων

$$- (f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

- Γινόμενο συναρτήσεων

$$- (f_1 \cdot f_2)(x)=f_1(x) \cdot f_2(x)$$

ορίζονται για κάθε $x \in X_1 \cap X_2$



Πράξεις συναρτήσεων (2/4)

- Πηλίκο συναρτήσεων
 - $(f_1/f_2)(x) = f_1(x)/f_2(x)$

ορίζεται για κάθε $x \in X_1 \cap X_2$ εκτός από τα σημεία εκείνα για τα οποία η f_2 μηδενίζεται



Πράξεις συναρτήσεων (3/4)

- Βαθμωτό γινόμενο συνάρτησης
 - $(\lambda \cdot f_1)(x) = \lambda \cdot f_1(x)$
- Δύναμη συνάρτησης
 - $(f_1^k)(x) = [f_1(x)]^k$



Πράξεις συναρτήσεων (4/4)

- Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων
 - $(\lambda \cdot f_1 + \mu \cdot f_2)(x) = \lambda \cdot f_1(x) + \mu \cdot f_2(x)$

ορίζεται για κάθε $x \in X_1 \cap X_2$



Παράδειγμα 7

- Να βρεθεί το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των συναρτήσεων

- $f_1 = \sqrt{3 - x}$

- $f_2 = x^2 - 9$



Σύνθεση συναρτήσεων (1/2)

- Έστω δύο συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow Z$
- Η συνάρτηση $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ με τύπο $(gf)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$ ονομάζεται σύνθετη συνάρτηση και διαβάζουμε: «**g του f**»
- Η $f(x)$ ονομάζεται εσωτερική
- Η $g(x)$ ονομάζεται εξωτερική



Σύνθεση συναρτήσεων (2/2)

- Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με περισσότερους του ενός διαφορετικούς τρόπους ως σύνθεση άλλων συναρτήσεων



Παράδειγμα 8

- Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=3x+2$ και $g(x)=2x^2-1$
- Να κατασκευάσετε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις
 - $(f \circ g)(x)$
 - $(g \circ f)(x)$
 - $(g \circ g)(x)$
 - $(f \circ f)(x)$



Παράδειγμα 9

- Να γράψετε τη συνάρτηση $y=f(x)=(x^2-1)^{12}$ ως σύνθετη συνάρτηση



Αντίστροφες συναρτήσεις (1/3)

- Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την $g: Y \rightarrow X$, αν και μόνο αν δίνεται από τον εξής κανόνα:
- Για κάθε $y \in Y$ η τιμή $g(y)$ είναι το μοναδικό στοιχείο $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(g(y)) = y$
- Έχουμε δηλαδή: $g(y) = x$ αν και μόνο αν $y = f(x)$



Αντίστροφες συναρτήσεις (2/3)

- Για να έχει μία συνάρτηση αντίστροφη μία άλλη θα πρέπει να είναι **1 προς 1** και το πεδίο ορισμού της $1^{\text{ης}}$ να είναι το σύνολο τιμών της $2^{\text{ης}}$ και αντίστροφα



Αντίστροφες συναρτήσεις (3/3)

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι αντίστροφες η μία της άλλης, τότε τα γραφήματά τους είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας την ευθεία $f(x)=x$



Παράδειγμα 10

- Ελέγξτε αν οι συναρτήσεις

$$y = f(x) = \frac{900+200x}{x}$$

και

$$x = g(y) = \frac{900}{y - 200}$$

είναι αντίστροφες



Παράδειγμα 11

- Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$



Παράδειγμα 12

- Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

και

$$g(x) = x^2 + 5x + 7$$

- Να υπολογίσετε την $f \circ g$



Παράδειγμα 13

- Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x + 6}{x - 5}$$

- Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης και να εξετάσετε αν υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση



Παράδειγμα 14

- Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^2 + 2\sqrt{x-3}$$

- Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης και να εξετάσετε αν υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση



Παράδειγμα 15

- Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$



Παράδειγμα 16

- Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}$$



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



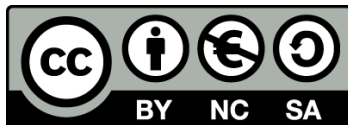
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Συναρτήσεις (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

