

Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών

- Μεταβλητές: X_1, X_2, \dots, X_n
- Πεδία ορισμού: D_1, D_2, \dots, D_n
- Περιορισμοί: C_1, C_2, \dots, C_m
- Κατάσταση προβλήματος
 - Ανάθεση τιμών: $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \dots\}$
- Πλήρης ανάθεση
 - Ανάθεση που περιλαμβάνει όλες τις μεταβλητές
- Συνεπής (ή νόμιμη) ανάθεση
 - Δεν παραβιάζει κανένα περιορισμό
- Λύση
 - Πλήρης και συνεπής ανάθεση
- Προαιρετικά: Μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών

■ Αυξητική διατύπωση

■ Αρχική κατάσταση

- Η κενή ανάθεση τιμών {}, όπου δεν έχει δοθεί τιμή σε καμία από τις μεταβλητές

■ Συνάρτηση διαδόχων

- Μπορεί να δοθεί τιμή σε οποιαδήποτε μεταβλητή δεν έχει δοθεί, εφόσον αυτό δε συγκρούεται με προηγούμενες αναθέσεις τιμών σε μεταβλητές

■ Έλεγχος στόχου

- Η τρέχουσα ανάθεση τιμών είναι πλήρης;

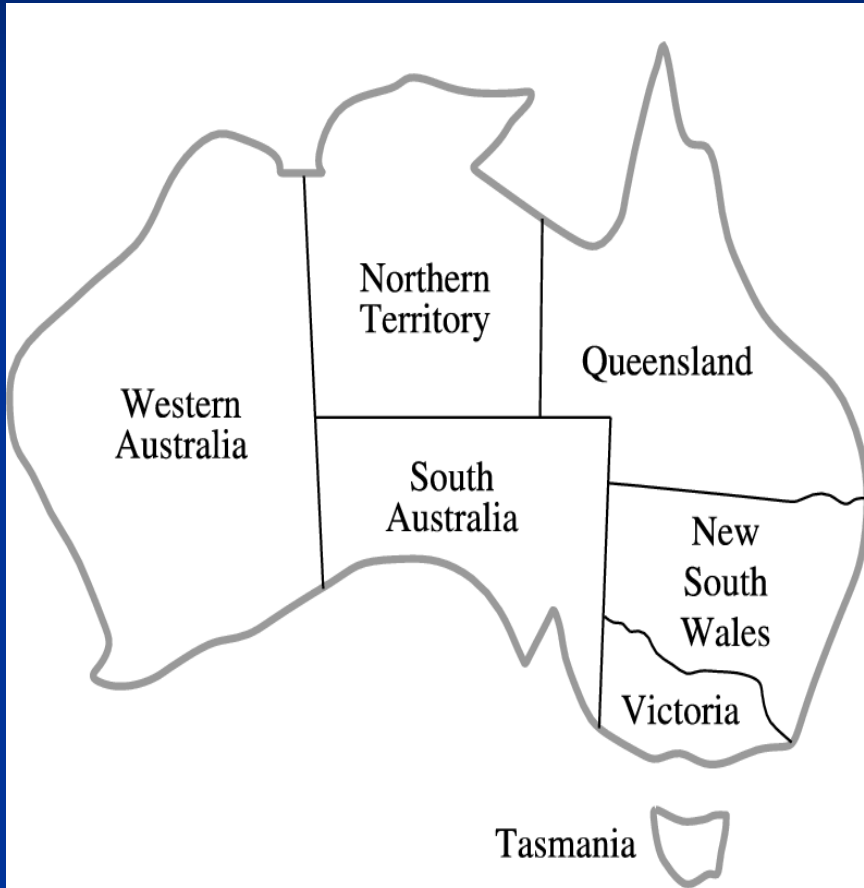
■ Κόστος διαδρομής

- Ένα σταθερό κόστος (π.χ. 1) για κάθε βήμα

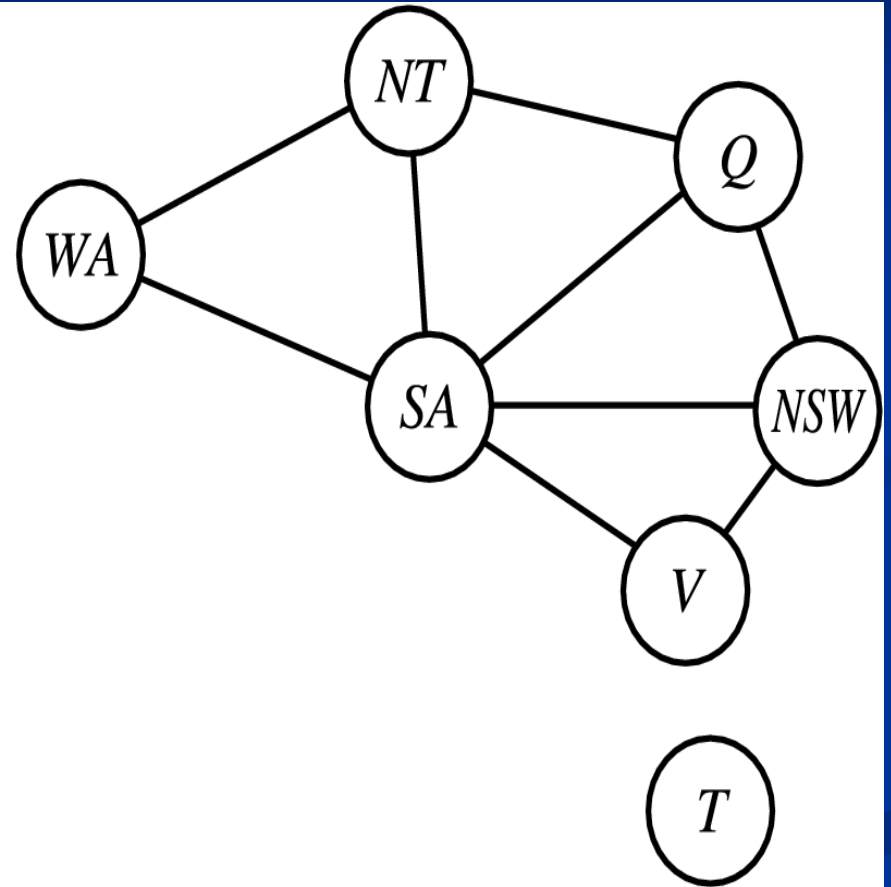
Γράφος περιορισμών

- Τι είναι:
 - Τρόπος αναπαράστασης ενός προβλήματος περιορισμών
- Τι δείχνει:
 - Οι κόμβοι του γραφήματος αντιστοιχούν σε μεταβλητές του προβλήματος και οι ακμές αντιστοιχούν σε περιορισμούς

Παράδειγμα (1)



(α)



(β)

Παράδειγμα (2)

- Μεταβλητές: WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Πεδία ορισμού: $\{\text{κόκκινο, πράσινο, μπλε}\}$ για όλες τις μεταβλητές
- Περιορισμοί: Να μην έχουν οι γειτονικές περιοχές ίδιο χρώμα
- Εναλλακτικές αναπαραστάσεις:
 - Απαρίθμηση επιτρεπτών συνδυασμών
 - $\{(\text{κόκκινο, πράσινο}), (\text{κόκκινο, μπλε}), (\text{πράσινο, κόκκινο}), (\text{πράσινο, μπλε}), (\text{μπλε, κόκκινο}), (\text{μπλε, πράσινο})\}$
 - Ειδική σημειογραφία για αναπαράσταση περιορισμού
 - $WA \neq NT$

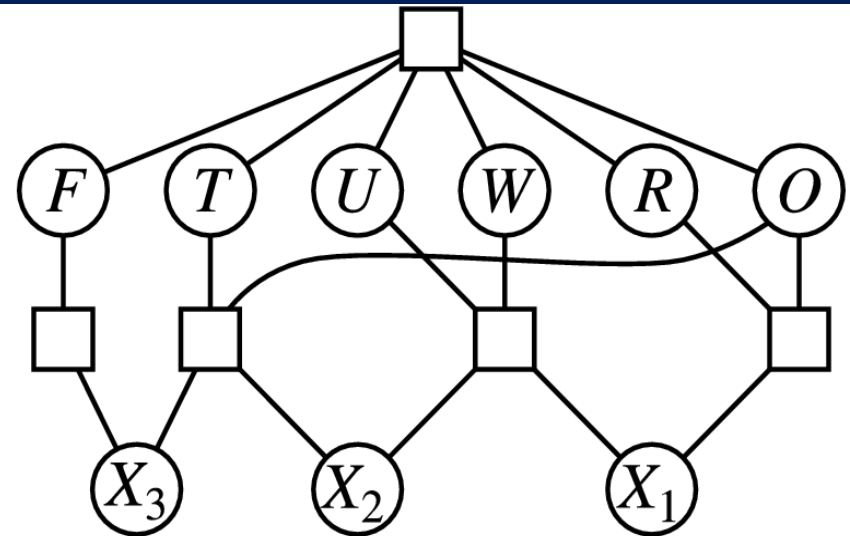
Χαρακτηριστικά

- Εναλλακτικές διατυπώσεις
 - Αυξητική (αναζήτηση πρώτα κατά βάθος)
 - Πλήρεις καταστάσεις (μέθοδοι τοπικής αναζήτησης)
- Μεταβλητές
 - Διακριτές
 - Συνεχείς
- Πεδία ορισμού
 - Πεπερασμένα
 - Άπειρα
- Περιορισμοί
 - Μοναδιαίοι
 - Δυαδικοί
- Περιορισμοί
 - Απόλυτοι
 - Προτίμησης (χαλαροί περιορισμοί με κόστος) – Βελτιστοποίηση

Ανώτερης τάξης περιορισμοί (>2)

$$\begin{array}{r}
 T \ W \ O \\
 + \ T \ W \ O \\
 \hline
 F \ O \ U \ R
 \end{array}$$

Κρυπταριθμητικός
(α) γρίφος



(β) Υπεργράφος
περιορισμών

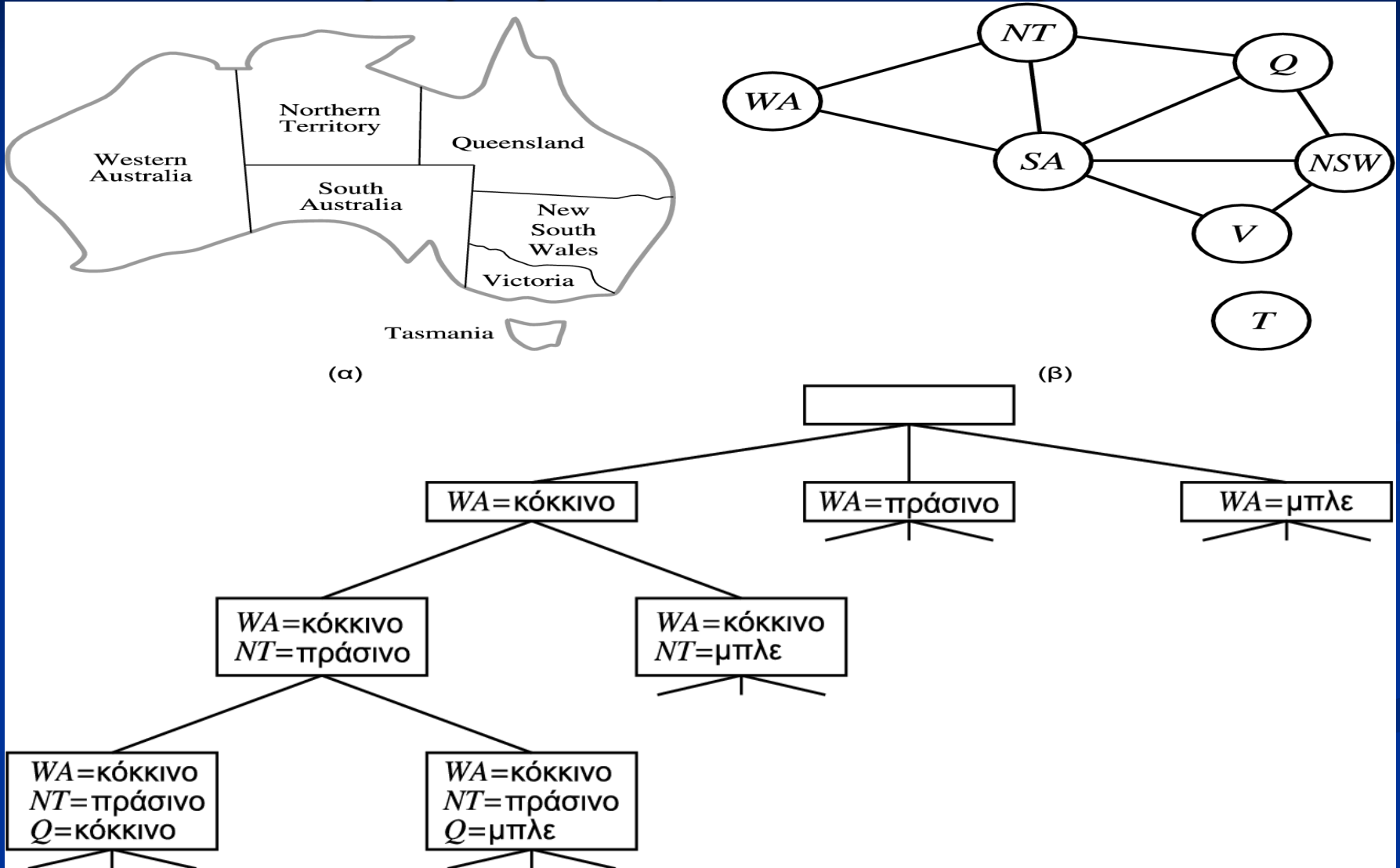
- Όλα_Διαφορετικά(F, T, U, W, R, O)
- $O + O = R + 10 \times X_1$
- $X_1 + W + W = U + 10 \times X_2$
- $X_2 + T + T = O + 10 \times X_3$
- $X_3 = F$

Αναζήτηση με υπαναχώρηση
στα προβλήματα
ικανοποίησης περιορισμών

Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος

- Όλοι οι αλγόριθμοι αναζήτησης των προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών παράγουν διαδόχους εξετάζοντας τις δυνατές αναθέσεις τιμών για μία μόνο μεταβλητή σε κάθε κόμβο του δένδρου αναζήτησης.
- Αναζήτηση με υπαναχώρηση
 - Επιλέγει από τις επιτρεπτές τιμές, με βάση τις τρέχουσες αναθέσεις
 - Επιλέγει τιμές για μία μόνο μεταβλητή τη φορά
 - Υπαναχωρεί όταν μια μεταβλητή δεν έχει άλλες νόμιμες τιμές που να μπορούν να τις ανατεθούν

Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος



Βελτιώσεις

1. Ποια είναι η επόμενη μεταβλητή στην οποία θα πρέπει να ανατεθεί τιμή και με ποια σειρά θα πρέπει να δοκιμαστούν οι τιμές της; (**Προτεραιότητα μεταβλητών και τιμών**)
2. Τι συνέπειες έχουν οι τρέχουσες αναθέσεις τιμών μεταβλητών για τις άλλες μεταβλητές στις οποίες δεν έχουν ανατεθεί τιμές; (**Διάδοση πληροφοριών μέσω περιορισμών**)
3. Όταν μια διαδρομή αποτύχει δηλαδή, φτάσει σε μια κατάσταση στην οποία μια μεταβλητή δεν έχει νόμιμες τιμές, μπορεί η αναζήτηση να αποφύγει να επαναλάβει αυτή την αποτυχία στις επόμενες διαδρομές; (**Ευφυής υπαναχώρηση**)

Προτεραιότητα μεταβλητών και τιμών

■ Επιλογή μεταβλητής

- Σπάνια οδηγεί στην πιο αποδοτική αναζήτηση

1. Ευρετικός μηχανισμός ελάχιστων απομενουσών τιμών

- Επιλογή της μεταβλητής με τις λιγότερες «νόμιμες» τιμές

2. Ευρετικός μηχανισμός βαθμού

- Επιλογή της μεταβλητής που ενέχεται στο μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών ως προς τις άλλες μεταβλητές στις οποίες δεν έχει ανατεθεί τιμή

Προτεραιότητα μεταβλητών και τιμών

■ Επιλογή τιμής

- Είναι πιο αποτελεσματική

1. Ευρετικός μηχανισμός της λιγότερο δεσμευτικής τιμής

- Προτιμάται η τιμή που αποκλείει τις λιγότερες επιλογές για τις γειτονικές μεταβλητές του γραφήματος περιορισμών
- Προσπαθεί να αφήσει τη μέγιστη δυνατή ευελιξία για τις επόμενες αναθέσεις τιμών σε μεταβλητές

Διάδοση πληροφοριών μέσω περιορισμών

■ Μέθοδος: Πρώιμος έλεγχος

- Κάθε φορά που ανατίθεται τιμή σε μια μεταβλητή X
 - ελέγχονται οι μεταβλητές Y που δεν τις έχουν ανατεθεί τιμές και συνδέονται με τη X με κάποιο περιορισμό και
 - αφαιρούνται από τα πεδία των Y οι τιμές που είναι ασυνεπείς με την τιμή που επιλέχθηκε για τη X

Διάδοση πληροφοριών μέσω περιορισμών

WA NT Q NSW V SA T

**Αρχικά πεδία
ορισμού**

Μετά από

WA=κόκκινο

Μετά από

Q=πράσινο

Μετά από

V=μπλε

R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B
R	G B	R G B	R G B	R G B	G B	R G B
R	B	G	R B	R G B	B	R G B
R	B	G	R	B		R G B

Διάδοση περιορισμών

- Τι είναι:
 - Η διάδοση των επιπτώσεων ενός περιορισμού, που ισχύει για μία μεταβλητή, σε άλλες μεταβλητές
- Πως υλοποιείται:
 - Αναδρομική επέκταση του πρώιμου ελέγχου σε όλες τις μεταβλητές, για τις οποίες υπήρξε διαγραφή τιμής σε συνδεόμενη με αυτές μεταβλητή

Διάδοση περιορισμών

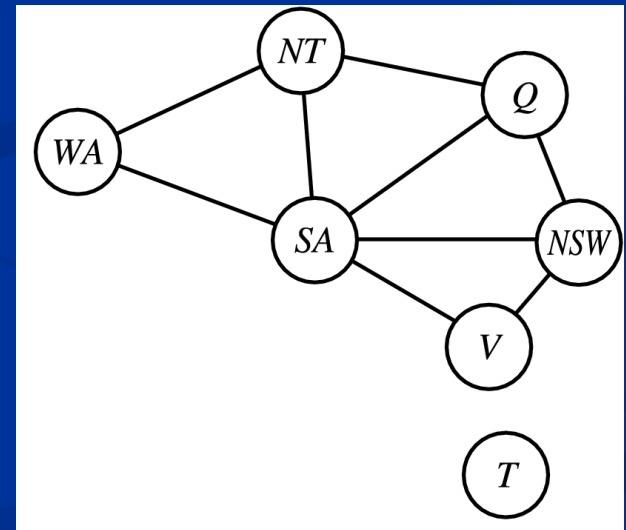
■ Μέθοδος: Συνέπεια τόξου

- Προσανατολισμένο τόξο από τη μεταβλητή X στη μεταβλητή Y : είναι συνεπές αν για κάθε τιμή της X , υπάρχει κάποια τιμή της Y που είναι συνεπής με την αντίστοιχη τιμή της X
- Τι είναι:
 - Γρήγορη μέθοδος για τη διάδοση περιορισμών που είναι σημαντικά ισχυρότερη από τον πρώιμο έλεγχο
- Πότε εφαρμόζεται:
 - Εφαρμόζεται τόσο πριν από την έναρξη της αναζήτησης, όσο και μετά από κάθε ανάθεση τιμής

Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (1)

- Επιλέγουμε να αναθέσουμε τιμή στην SA , η οποία συμμετέχει σε 5 περιορισμούς. Έστω $SA=κόκκινο$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία τιμών των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:

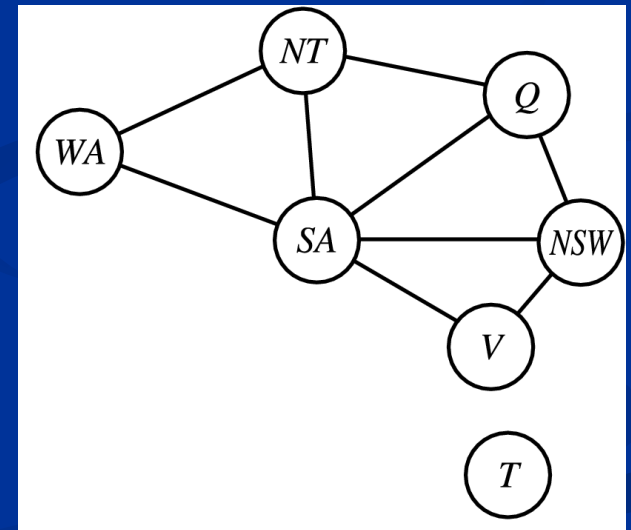
- $SA=κόκκινο$
- $WA \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
- $NT \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
- $Q \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
- $NSW \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
- $V \in \{\text{πράσινο, μπλε}\}$
- $T \in \{\text{κόκκινο, πράσινο, μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (2)

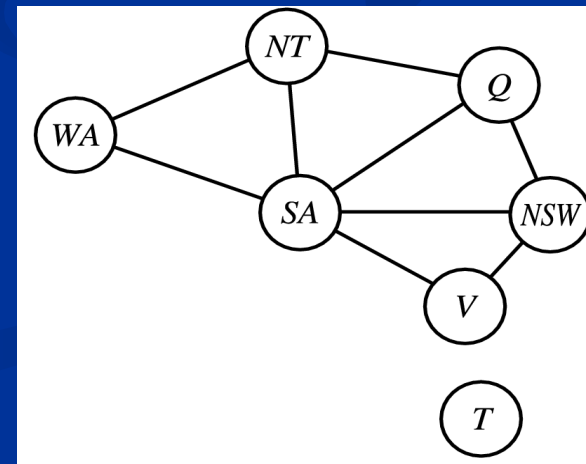
- Στη συνέχεια επιλέγουμε την NT , η οποία συμμετέχει σε τρεις περιορισμούς. Έστω $NT = \text{πράσινο}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:

- $SA = \text{κόκκινο}$
- $WA = \{\text{μπλε}\}$
- $NT = \text{πράσινο}$
- $Q = \{\text{μπλε}\}$
- $NSW \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
- $V \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
- $T \in \{\text{κόκκινο}, \text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (3)

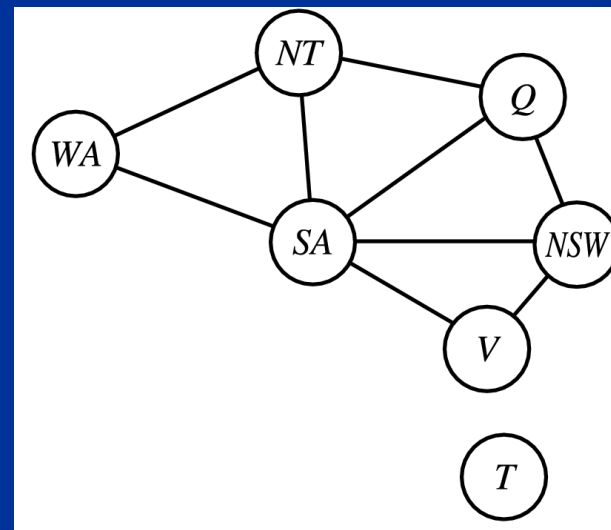
- Το γεγονός ότι η μεταβλητή WA πήρε επαγωγικά την τιμή «μπλε» δεν επηρεάζει καμία άλλη μεταβλητή.
- Το γεγονός ότι η μεταβλητή Q πήρε επίσης την τιμή «μπλε» επηρεάζει τη μεταβλητή NSW , η οποία πλέον παίρνει την τιμή «πράσινο».
- Αυτό με τη σειρά του επηρεάζει τη μεταβλητή V , η οποία τελικά παίρνει την τιμή «μπλε».
- Άρα, τα νέα πεδία τιμών των μεταβλητών διαμορφώνονται ως εξής:
 - SA = κόκκινο
 - WA = μπλε
 - NT = πράσινο
 - Q = μπλε
 - NSW = πράσινο
 - V = μπλε
 - $T \in \{\text{κόκκινο, πράσινο, μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (4)

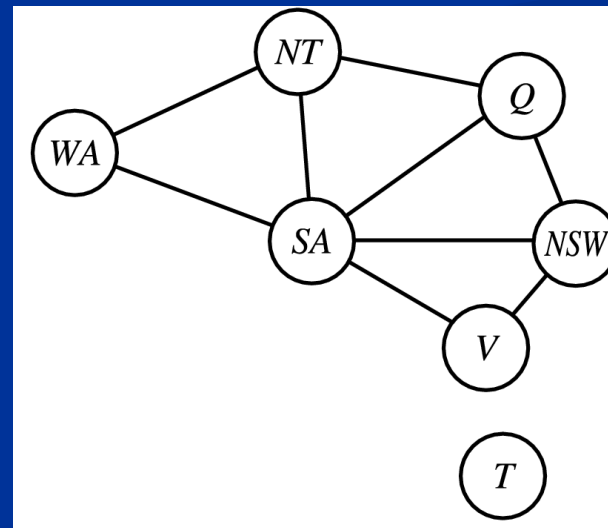
- Με δεδομένο ότι η T δεν συμμετέχει σε κανέναν περιορισμό, μπορούμε για τη μεταβλητή αυτή να επιλέξουμε τυχαία μια τιμή από το πεδίο τιμών της. Έτσι λοιπόν μια δυνατή λύση είναι η εξής:

- $SA = \text{κόκκινο}$
- $WA = \text{μπλε}$
- $NT = \text{πράσινο}$
- $Q = \text{μπλε}$
- $NSW = \text{πράσινο}$
- $V = \text{μπλε}$
- $T = \text{κόκκινο}$



Αντιμετώπιση ειδικών περιορισμών

- **Όλα_Διαφορετικά**: Καταμέτρηση του πλήθους των διαφορετικών τιμών των μεταβλητών
 - π.χ. ο περιορισμός Όλα_Διαφορετικά(NT, SA, Q) μετά την ανάθεση $\{WA=κόκκινο, NSW=κόκκινο\}$ είναι ασυνεπής



Αντιμετώπιση ειδικών περιορισμών

■ Περιορισμοί πόρων

■ π.χ. για *To_Πολύ*(10, A, B, C, D):

- αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο $\{3,4,5,6\}$, το πρόβλημα είναι ασυνεπές (γιατί;)
- αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο $\{2,3,4,5,6\}$, πρέπει να αφαιρεθούν οι τιμές 5 και 6 από όλες τις μεταβλητές (γιατί;)

Αντιμετώπιση ειδικών περιορισμών

■ Περιορισμοί πόρων

■ Διάδοση φραγμάτων

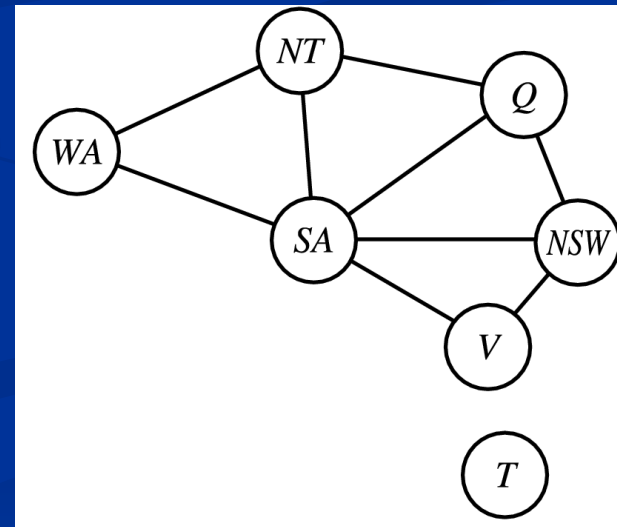
- Για μια μεταβλητή X , για τις τιμές του άνω και κάτω φράγματός της, υπάρχει κάποια τιμή της μεταβλητής Y που ικανοποιεί τον περιορισμό μεταξύ των X και Y

■ Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο πτήσεις, η A-271 και η A-272, και τα αντίστοιχα αεροσκάφη έχουν χωρητικότητες 165 και 385 επιβατών.
- Τα αρχικά πεδία για τους αριθμούς των επιβατών της κάθε πτήσης είναι:
Πτήση A-271 $\in [0, 165]$ και Πτήση A-272 $\in [0, 385]$
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε τον πρόσθετο περιορισμό ότι και οι δύο πτήσεις μαζί πρέπει να μεταφέρουν 420 επιβάτες:
Πτήση A-271 + Πτήση A-272 ≥ 420
- Εφαρμόζοντας διάδοση περιορισμών φραγμάτων μειώνουμε τα πεδία ορισμού σε *Πτήση A-271 $\in [35, 165]$ και Πτήση A-272 $\in [255, 385]$*

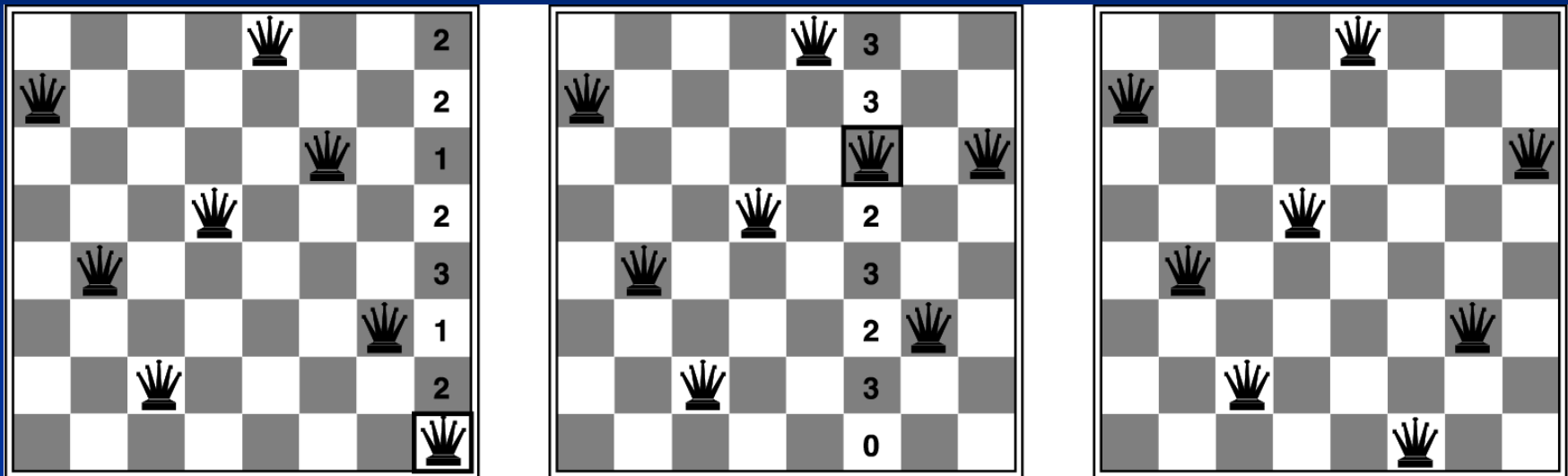
Υπαναχώρηση με άλμα

- Εναλλακτική μέθοδος του πρώιμου ελέγχου
- Για κάθε μεταβλητή Y διατηρούμε ένα σύνολο άλλων μεταβλητών στις οποίες ανατέθηκαν τιμές, και εξαιτίας των οποίων αφαιρέθηκαν τιμές από το πεδίο της Y
 - Σύνολο συγκρούσεων
- Εάν το πεδίο της Y αδειάσει, ο αλγόριθμος υπαναχωρεί στην πιο πρόσφατη μεταβλητή του συνόλου συγκρούσεων της Y
- Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε παραγάγει τη μερική ανάθεση τιμών $\{Q = \text{κόκκινο}, NSW = \text{πράσινο}, V = \text{μπλε}, T = \text{κόκκινο}\}$ και πρέπει να επιλέξουμε τιμή για την SA
 - Το σύνολο συγκρούσεων της SA είναι το $\{Q, NSW, V\}$



Τοπική Αναζήτηση στα
Προβλήματα Ικανοποίησης
Περιορισμών

Ελάχιστες συγκρούσεις



- Ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος (αν και όχι πλήρης).
- Κατάλληλη και για online προβλήματα, όπου μικρές αλλαγές στο περιβάλλον οδηγούν σε νέες λύσεις με μικρές διαφοροποιήσεις από τις προηγούμενες.