ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΤΟΥ BAYES

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Έστω ότι είναι γνωστές τόσο οι εκ των προτέρων πιθανότητες $P(\omega_j)$ όσο και οι υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p(x/\omega_j)$, $j=1,\ldots,n$.
- Ο κανόνας απόφασης του Bayes είναι:

$$P(\omega_j / x) = \frac{p(x/\omega_j)\cdot P(\omega_j)}{p(x)}$$

- όπου στην περίπτωση n κατηγοριών

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} p(x/\omega_j)\cdot P(\omega_j)$$

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Ο τύπος απόφασης του Bayes μπορεί να περιγραφεί με λόγια ως εξής:

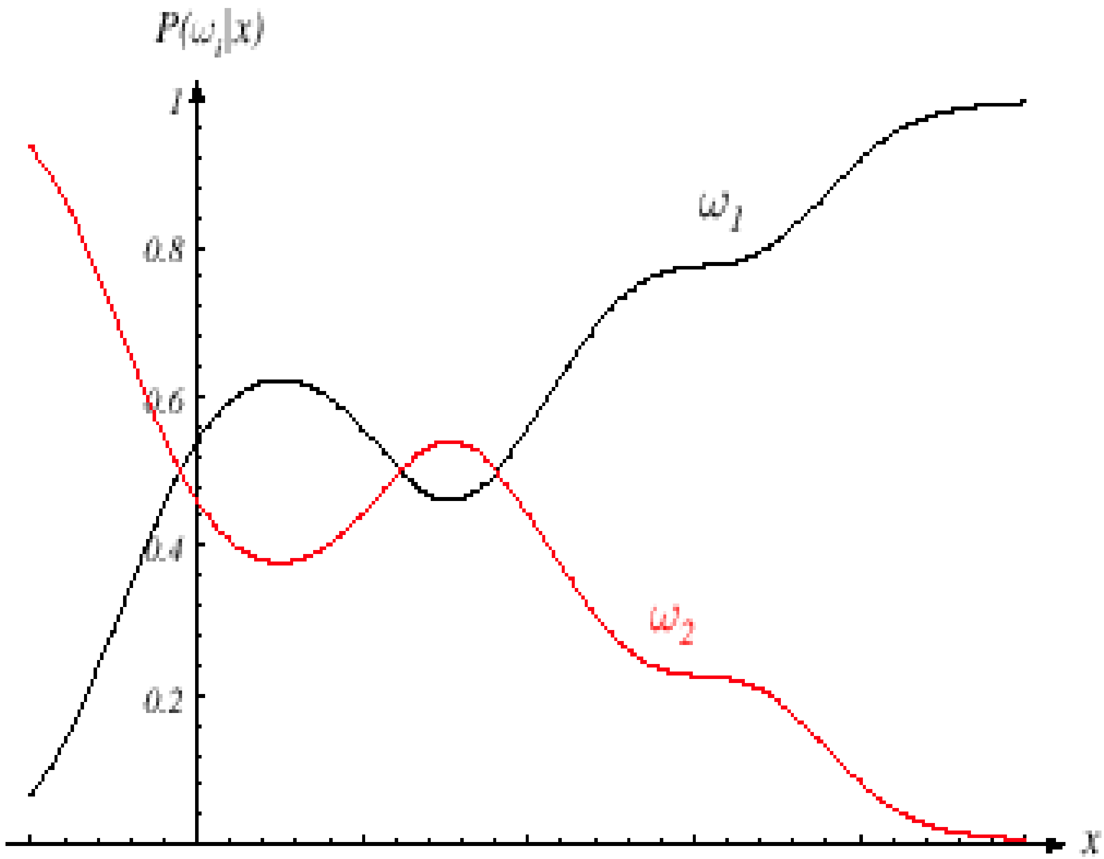
$$\text{a posteriori πιθανότητα} = \frac{\text{πιθανοφάνεια} \times \text{a priori πιθανότητα}}{\textit{γεγονός}}$$

- Ο τύπος απόφασης του Bayes δηλώνει ότι με την βοήθεια της παρατήρησης της τιμής του *x* είναι δυνατόν να μετατραπεί η εκ των προτέρων πιθανότητα $P(\omega_j)$ στην εκ των υστέρων πιθανότητα $P(\omega_j/x)$, δηλαδή την πιθανότητα η κατάσταση της φύσης να είναι η ω_j δεδομένου ότι έχει μετρηθεί η τιμή *x* για το χαρακτηριστικό.

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Η $p(x/\omega_j)$ καλείται συνάρτηση πιθανοφάνειας της ω_j σε σχέση με το x και χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι, εάν όλες οι υπόλοιποι παράμετροι είναι ίσες, η κατηγορία ω_j για την οποία η $p(x/\omega_j)$ έχει μεγάλη τιμή έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η σωστή κατηγορία.
- Να σημειωθεί ότι το γινόμενο της πιθανοφάνειας και της εκ των προτέρων πιθανότητας είναι αυτό που καθορίζει την τιμή της εκ των υστέρων πιθανότητας.
- Ο παράγοντας p(x), μπορεί να θεωρηθεί περισσότερο ως ένας παράγοντας κανονικοποίησης που εγγυάται ότι το άθροισμα των εκ των υστέρων πιθανοτήτων θα ισούται με τη μονάδα.

Κανόνας Απόφασης του Bayes



Κανόνας Απόφασης του Bayes

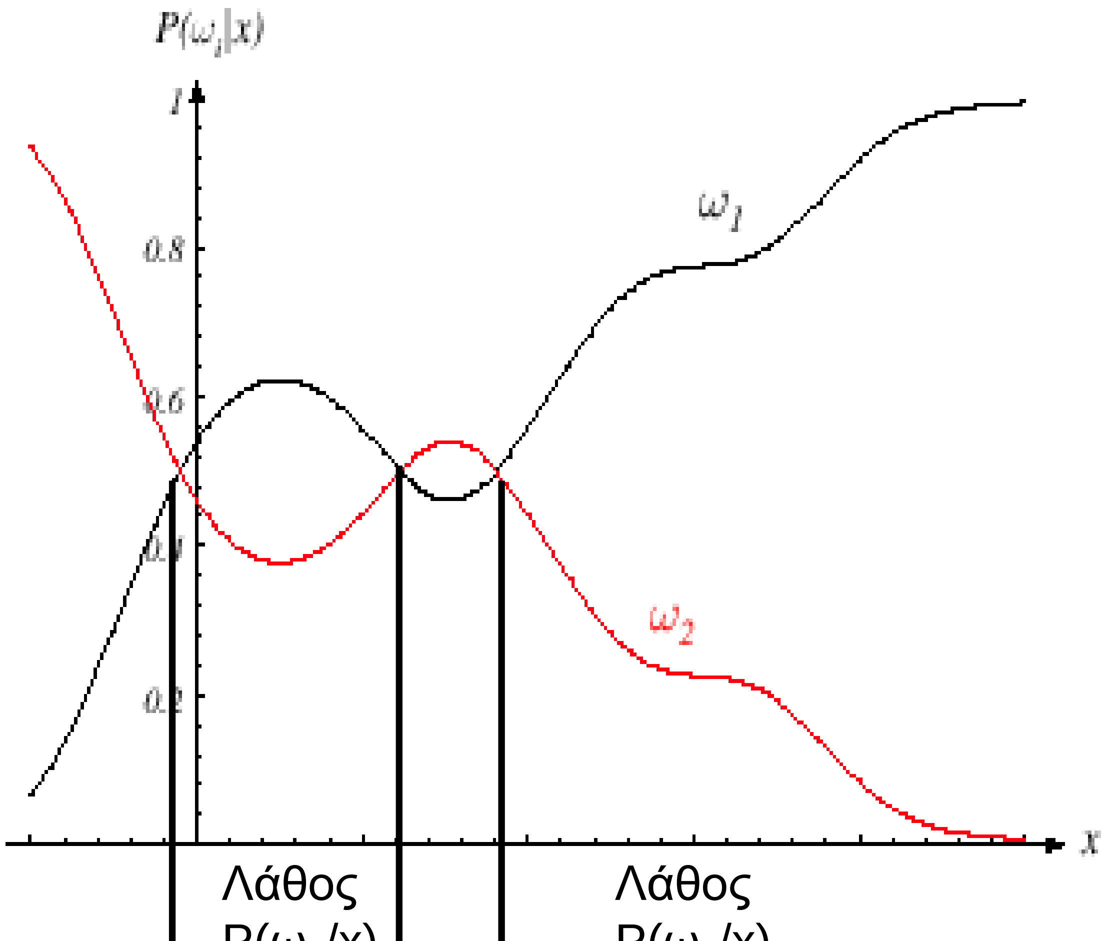
- Οποτεδήποτε μετριέται μία συγκεκριμένη τιμή του *x*, η πιθανότητα λάθους ισούται με:

$$P(\lambda \acute{\alpha} \theta o\varsigma / x) = \begin{cases} P(\omega_1 / x), & \text{εάν αποφασίζουμε } \omega_2 \\ P(\omega_2 / x), & \text{εάν αποφασίζουμε } \omega_1 \end{cases}$$

- Η μέση πιθανότητα λάθους ισούται με:

$$P(\lambda \acute{\alpha} \theta o\varsigma) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda \acute{\alpha} \theta o\varsigma, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda \acute{\alpha} \theta o\varsigma / x) \cdot p(x)\, dx$$

Κανόνας Απόφασης του Bayes



Λάθος $P(\omega_2/x)$

Λάθος $P(\omega_2/x)$

Λάθος $P(\omega_1/x)$

Λάθος $P(\omega_1/x)$

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Εάν για κάθε *x* εγγυηθούμε ότι η *P(λάθος/x)* είναι μικρότερη δυνατή, τότε το διάστημα ολοκλήρωσης θα είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Επομένως, αποδείχθηκε ο ακόλουθος κανόνας απόφασης του Bayes ο οποίος ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους:

Αποφάσισε ω_1 εάν $P(\omega_1/x) > P(\omega_2/x)$ διαφορετικά αποφάσισε ω_2

- Άρα: $$P(\lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma / x) = \min\left[P(\omega_1 / x), P(\omega_2 / x)\right]$$

Κανόνας Απόφασης του Bayes

Αποφάσισε ω_1 εάν $p(x/\omega_1)P(\omega_1) > p(x/\omega_2)P(\omega_2)$ διαφορετικά αποφάσισε ω_2

- <u>Παρατηρήσεις</u>
- Εάν για κάποια τιμή του *x* οι υπό συνθήκη πιθανότητες είναι ίσες: $p(x/\omega_1)=p(x/\omega_2)$, τότε η συγκεκριμένη παρατήρηση δεν παρέχει κάποια χρήσιμη πληροφορία για την πραγματική κατάσταση της φύσης. Σε αυτήν την περίπτωση η απόφαση εξαρτάται αποκλειστικά από τις εκ των προτέρων πιθανότητες.
- Εάν οι εκ των προτέρων πιθανότητες είναι ίσες: $p(\omega_1)=p(\omega_2)$, τότε οι καταστάσεις τις φύσης είναι ισοπίθανες. Σε αυτήν την περίπτωση η απόφαση εξαρτάται αποκλειστικά από τις συναρτήσεις πιθανοφάνειας.

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Έστω $\{\omega_1, \ldots, \omega_c\}$ το πεπερασμένο σύνολο c διαφορετικών καταστάσεων της φύσης («κατηγορίες») και $\alpha_1,\ldots,\alpha_\alpha$ το πεπερασμένο σύνολο των α πιθανών ενεργειών.
- Η συνάρτηση κόστους $\lambda(\alpha_i/\omega_j)$ περιγράφει το κόστος που αντιστοιχεί στην ενέργεια α_i όταν η κατάσταση της φύσης είναι η ω_j.
- Έστω ότι το διάνυσμα των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων **x** είναι μια d-διάστατη τυχαία μεταβλητή και $p(\mathbf{x}/\omega_j)$ είναι η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το **x**, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το **x** υπό τη συνθήκη ότι η ω_j είναι η πραγματική κατάσταση της φύσης.
- Φυσικά, με $P(\omega_j)$ παριστάνεται η εκ των προτέρων πιθανότητα ότι η κατάσταση της φύσης είναι η ω_j.

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Επομένως, η εκ των υστέρων πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί από την με βάση τον τύπο του Bayes:

$$P(\omega_j / \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}/\omega_j)\cdot P(\omega_j)}{p(\mathbf{x})}$$

- όπου $$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{c} p(\mathbf{x}/\omega_j)\cdot P(\omega_j)$$

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Έστω ότι παρατηρείται ένα συγκεκριμένο **x** και λαμβάνεται η ενέργεια α_i.
- Εάν η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_j εξ ορισμού θα έχουμε κόστος ίσο με $\lambda(\alpha_i/\omega_j)$.
- Αφού η $P(\omega_j)/\mathbf{x})$ είναι η πιθανότητα η πραγματική κατάσταση της φύσης να είναι η ω_j, το αναμενόμενο κόστος που σχετίζεται με την ενέργεια α_i θα είναι:

$$R(\alpha_i / \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i / \omega_j) \cdot P(\omega_j / \mathbf{x})$$

- Στην ορολογία της Θεωρίας Αποφάσεων το αναμενόμενο κόστος καλείται *ρίσκο* και το $R(\alpha_i/\mathbf{x})$ *υπό συνθήκη ρίσκο*.
- Οποτεδήποτε παρατηρηθεί ένα συγκεκριμένο δείγμα **x** το αναμενόμενο κόστος μπορεί να ελαχιστοποιηθεί επιλέγοντας την ενέργεια εκείνη που ελαχιστοποιεί το υπό συνθήκη ρίσκο.

Κανόνας Απόφασης του Bayes

- Για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό ρίσκο, υπολογίζουμε το υπό συνθήκη ρίσκο

$$R(\alpha_i / \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i / \omega_j) \cdot P(\omega_j / \mathbf{x})$$

- για *i = 1,…, α* και στη συνέχεια επιλέγουμε την ενέργεια α_i για την οποία το $R(\alpha_i/\mathbf{x})$ είναι ελάχιστο.
- Το ελάχιστο συνολικό ρίσκο που προκύπτει καλείται *ρίσκο του Bayes*, συμβολίζεται με R^*, και είναι η βέλτιστη απόδοση που μπορεί να επιτευχθεί.

Ταξινόμηση Δύο Κατηγοριών

- Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια α_1 αντιστοιχεί στην απόφαση ότι η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_1 και η ενέργεια α_2 στην απόφαση ότι είναι η ω_2.
- Έστω ότι $\lambda_{ij}=\lambda(\alpha_i/\omega_j)$ είναι το κόστος που υπάρχει όταν αποφασίζουμε υπέρ της ω_i ενώ η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_j.

Ταξινόμηση Δύο Κατηγοριών

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για το υπό συνθήκη ρίσκο έχουμε:

$$R(\alpha_1/\mathbf{x}) = \lambda_{11} \cdot P(\omega_1/\mathbf{x}) + \lambda_{12} \cdot P(\omega_2/\mathbf{x})$$
$$R(\alpha_2/\mathbf{x}) = \lambda_{21} \cdot P(\omega_1/\mathbf{x}) + \lambda_{22} \cdot P(\omega_2/\mathbf{x})$$

- ο βασικός κανόνας απόφασης ελάχιστου ρίσκου είναι να αποφασίσουμε ω_1 εάν:

$$R(\alpha_1/\mathbf{x}) < R(\alpha_2/\mathbf{x})$$

$$(\lambda_{21} - \lambda_{11}) \cdot P(\omega_1/\mathbf{x}) > (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \cdot P(\omega_2/\mathbf{x})$$
$$(\lambda_{21} - \lambda_{11}) \cdot p(\mathbf{x}/\omega_1) \cdot P(\omega_1) > (\lambda_{12} - \lambda_{22}) \cdot p(\mathbf{x}/\omega_2) \cdot P(\omega_2)$$

Ταξινόμηση Δύο Κατηγοριών

- Μια άλλη εναλλακτική μορφή, η οποία προκύπτει από το λογικό συλλογισμό ότι $\lambda_{21}>\lambda_{11}$ είναι να αποφασίζουμε ω_1 εάν

$$\frac{p(\mathbf{x}/\omega_1)}{p(\mathbf{x}/\omega_2)} > \frac{\lambda_{12}-\lambda_{22}}{\lambda_{21}-\lambda_{11}}\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

- Επομένως, ο κανόνας απόφασης του Bayes μπορεί να ερμηνευθεί ως απόφαση για ω_1 εάν ο λόγος πιθανοφάνειας είναι μεγαλύτερος από μία τιμή κατωφλίου, η οποία είναι ανεξάρτητη από το διάνυσμα παρατήρησης **x**.

Ταξινόμηση Ελάχιστου Ρυθμού Λάθους

- Στα προβλήματα ταξινόμησης, κάθε κατάσταση της φύσης συσχετίζεται συνήθως με μία από τις c διαφορετικές κατηγορίες, και κάθε ενέργεια α_i ερμηνεύεται συνήθως ως η απόφαση ότι η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_i.
- Εάν εκτελεστεί η ενέργεια α_i και η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_j, τότε η απόφαση είναι σωστή εάν $i=j$ και λάθος εάν $i \neq j$.
- Εάν, όπως είναι το φυσιολογικό, επιθυμούμε να αποφεύγονται τα λάθη, πρέπει να βρεθεί ένας κανόνας απόφασης ο οποίος να ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους, δηλαδή το *ρυθμό λάθους*.

Ταξινόμηση Ελάχιστου Ρυθμού Λάθους

- Η συνάρτηση κόστους για αυτήν την περίπτωση είναι η, όπως καλείται και στη βιβλιογραφία, *συμμετρική* ή *μηδέν-ένα* συνάρτηση κόστους:

$$\lambda(\alpha_i / \omega_j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, c$$

- Αυτή η συνάρτηση κόστους δεν αντιστοιχεί κανένα κόστος στις σωστές αποφάσεις ενώ αντιστοιχεί μοναδιαίο κόστος σε κάθε λανθασμένη απόφαση.
- Έτσι, όλα τα λάθη είναι ισοδύναμα από πλευράς κόστους.

Ταξινόμηση Ελάχιστου Ρυθμού Λάθους

- Το ρίσκο που αντιστοιχεί σε αυτή τη συνάρτηση κόστους είναι ακριβώς ίδιο με τη μέση πιθανότητα λάθους διότι το υπό συνθήκη ρίσκο ισούται με

$$
\begin{aligned}
R(\alpha_i / \mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i / \omega_j) \cdot P(\omega_j / \mathbf{x}) \\
&= \sum_{j \neq i} P(\omega_j / \mathbf{x}) \\
&= 1 - P(\omega_i / \mathbf{x})
\end{aligned}
$$

- Με άλλα λόγια, ο κανόνας απόφασης για *ελάχιστο ρυθμό λάθους* είναι ο εξής:

Αποφάσισε ω_i εάν $P(\omega_i/x) > P(\omega_j/x)$ για κάθε $j \neq i$

Ταξινομητές, Διακρίνουσες Συναρτήσεις και Επιφάνειες Απόφασης

- Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι για την αναπαράσταση ταξινομητών προτύπων.
- Ένας από τους πιο χρήσιμους είναι η χρήση ενός συνόλου από διακρίνουσες συναρτήσεις $g_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \ldots, c$.
- Ο ταξινομητής αναθέτει ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών $\boldsymbol{x}$ στην κατηγορία ω_i εάν

$g_i(x)>g_j(x)$ για όλα τα $i \neq j$

Ταξινομητές, Διακρίνουσες Συναρτήσεις και Επιφάνειες Απόφασης

- Η επιλογή διακρινουσών συναρτήσεων δεν είναι μοναδική.
- Εάν κάθε διακρίνουσα συνάρτηση $g_i(\mathbf{x})$ αντικατασταθεί από την $f(g_i(\mathbf{x}))$, όπου η $f(\cdot)$ είναι μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση, η ταξινόμηση θα παραμείνει ανεπηρέαστη.

$$g_i(\mathbf{x}) = P(\omega_i / \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}/\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{c} p(\mathbf{x}/\omega_j)P(\omega_j)}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}/\omega_i)P(\omega_i)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}/\omega_i) + \ln P(\omega_i)$$

Πιθανότητες Λάθους και Διαστήματα

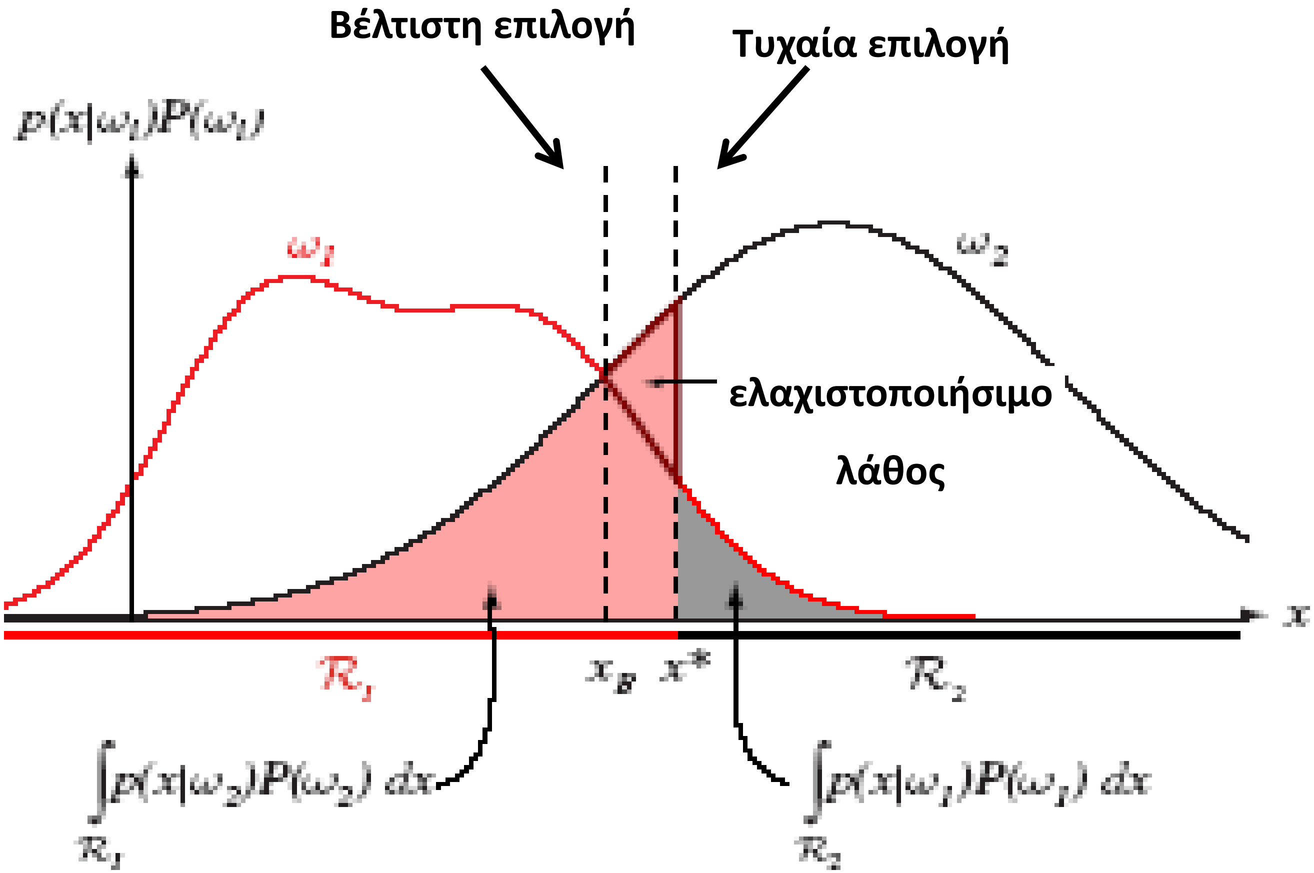
- Έστω η περίπτωση των δύο κατηγοριών όπου ο ταξινομητής (διχοτόμος) έχει χωρίσει το χώρο των χαρακτηριστικών σε δύο περιοχές απόφασης R_1 και R_2 με έναν πιθανό μη βέλτιστο τρόπο.
- Οι περιπτώσεις για τις οποίες μπορεί να συμβεί κάποιο λάθος ταξινόμησης είναι δύο.
- Είτε ένα δείγμα **x** βρίσκεται στην περιοχή R_2 ενώ η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_1, είτε βρίσκεται στην περιοχή R_1 ενώ η πραγματική κατάσταση της φύσης είναι η ω_2.

Πιθανότητες Λάθους και Διαστήματα

- Επειδή οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες και εξουδετερωμένες, η πιθανότητα του λάθους ισούται με:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda\acute{\alpha}\theta o\upsilon\varsigma) &= P(\mathbf{x} \in R_2, \omega_1) + P(\mathbf{x} \in R_1, \omega_2) \\
&= P(\mathbf{x} \in R_2 / \omega_1) P(\omega_1) + P(\mathbf{x} \in R_1 / \omega_2) P(\omega_2) \\
&= \int_{R_2} p(\mathbf{x} / \omega_1) P(\omega_1) d\mathbf{x} + \int_{R_1} p(\mathbf{x} / \omega_2) P(\omega_2) d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Πιθανότητες Λάθους και Διαστήματα

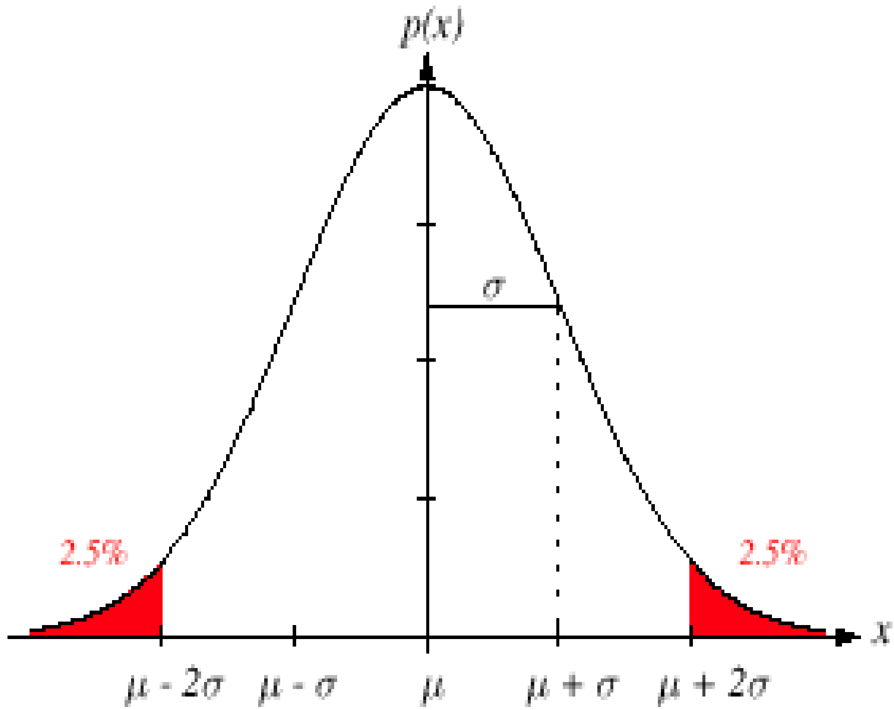
- 

Η κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

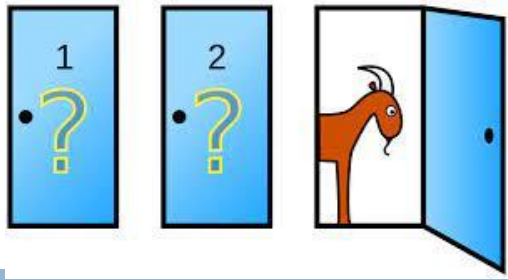
- Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Μιας Μεταβλητής

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

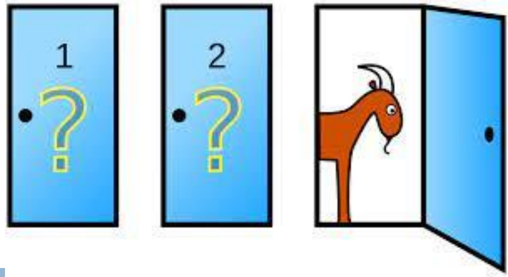
- Μία κανονική κατανομή μιας μεταβλητής έχει το 95% των τιμών της στο διάστημα $|x - \mu| \leq 2\sigma$
- Η κορυφή της κατανομής έχει τιμή $p(\mu) = 1/\sqrt{2\pi\sigma}$



Παράδειγμα



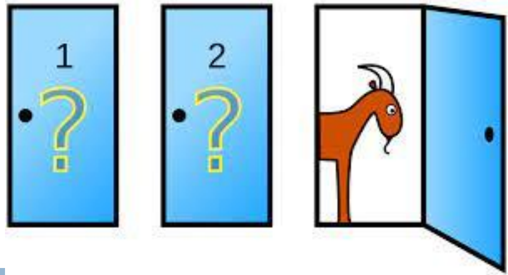
- Έστω ότι παίζετε σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι και μπροστά σας υπάρχουν τρεις κουρτίνες.
- Ο παρουσιαστής σας ενημερώνει ότι πίσω από μία από αυτές κρύβεται ένα αυτοκίνητο.
- Έστω ότι επιλέγετε την κουρτίνα *Α*. Ο παρουσιαστής που γνωρίζει που βρίσκεται το αυτοκίνητο, ανοίγει την κουρτίνα *Γ* για να σας δείξει ότι το αυτοκίνητο δε βρίσκεται πίσω από αυτή.
- Μήπως πρέπει να αλλάξετε γνώμη και να επιλέξετε την κουρτίνα *Β*;
- Ορίστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας όρους από τη θεωρία απόφασης του Bayes. Ποια είναι η εκ των προτέρων γνώμη σας και ποια η εκ των υστέρων, μετά δηλαδή από το άνοιγμα της κουρτίνας *Γ*; Ποιος είναι ο κανόνας απόφασης που πρέπει να χρησιμοποιήσετε;



Παράδειγμα

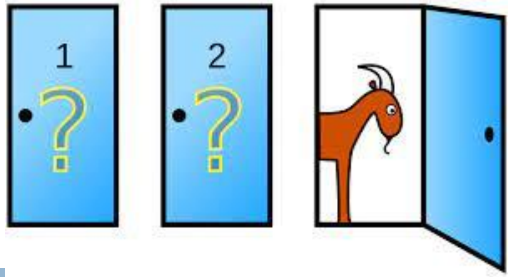
- Έστω α,β και γ το γεγονός ότι το δώρο βρίσκεται πίσω από την κουρτίνα Α,Β και Γ αντίστοιχα.
- Είναι $p(\alpha)= p(\beta)= p(\gamma)=1/3$

Παράδειγμα



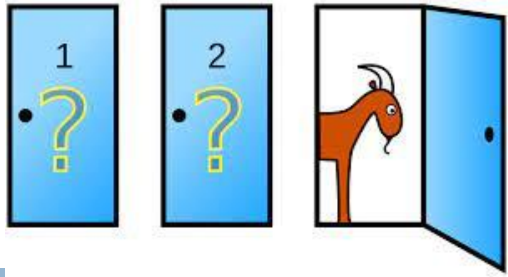
- Οι a priori πιθανότητες είναι αυτό που εμείς «πιστεύουμε» για το τι θα γίνει.
- Θεωρούμε ότι αν ποντάρουμε στο Α, ο παρουσιαστής δεν ανοίγει την Α ή την κουρτίνα με το αυτοκίνητο, αλλιώς δεν θα έχει ενδιαφέρον το παιχνίδι.

Παράδειγμα



- Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες p(x|ω), ποια κουρτίνα δηλαδή θα ανοίξει ο παρουσιαστής, αν εμείς ποντάρουμε στην Α:
  - Αν ω=α, τότε οι Β και Γ είναι άδειες, επομένως τις ανοίγει με ίδια πιθανότητα:
    - *p(x=B/α)=p(x=Γ/α)=1/2*
  - Αν ω=β, τότε ανοίγει την Γ με *p(x=Γ/β)=1* και την Β με *p(x=B/β)=0*.
  - Αν ω=γ, τότε ανοίγει την Γ με *p(x=Γ/γ)=0* και την Β με *p(x=B/γ)=1*.

Παράδειγμα



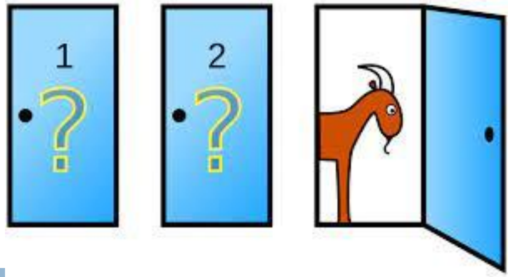
- Αρα για να ανοιχτεί η Γ η πιθανότητα είναι:
  - *p(x=Γ/α)=1/2, p(x=Γ/β)=1* και με *p(x=Γ/γ)=0*.
- Μετά το άνοιγμα θα πρέπει να ενημερώσουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες. Προφανώς ισχύει *p(α/x)+p(β/x)+p(γ/x)=1* (1)

$$p(a/x)=\frac{p(x=\Gamma/a)\cdot p(a)}{p(x)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{p(x)},$$

$$p(\beta/x)=\frac{p(x=\Gamma/\beta)\cdot p(\beta)}{p(x)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{p(x)}$$

$$p(\gamma/x)=\frac{p(x=\Gamma/\gamma)\cdot p(\gamma)}{p(x)}=\frac{0\cdot\frac{1}{3}}{p(x)}$$

Παράδειγμα



- Προσθέτουμε τις 3 παραπάνω εξισώσεις και λόγω της εξίσωσης (1) καταλήγουμε στην :

$p(x)=1/6+1/3$ οπότε $p(a/x)=1/3, \quad p(\beta/x)=2/3 \quad \kappa\alpha\iota \quad p(\gamma/x)=0$

- Άρα τελικά, σύμφωνα με τον κανόνα του Bayes πρέπει να επιλεγεί η κατάσταση με την μεγαλύτερη posterior πιθανότητα, δηλαδή η Β.

Παράδειγμα

- Έστω 3 φυλακισμένοι σε μια φυλακή.
- Ένας από τους 3 (δεν ξέρουμε ποιος) θα εκτελεστεί το επόμενο πρωί μόλις ανατείλει ο ήλιος.
- Ο Α είναι πολύ νευρικός γιατί ξέρει ότι έχει 1/3 πιθανότητα να εκτελεστεί το πρωί.
- Προσπαθεί να πάρει ορισμένες πληροφορίες. «Ξέρω ότι δεν πρόκειται να μου πεις αν θα εκτελεστώ το άλλο πρωί, αλλά τουλάχιστον μπορείς να μου πεις ποιος από τους άλλους 2 (Β και Γ) δεν θα εκτελεστεί. Αφού έτσι και αλλιώς ένας από τους άλλους 2 δεν θα εκτελεστεί, δεν πρόκειται να μου δώσεις μεγαλύτερη πληροφορία.» Αυτό ακούγεται λογικό, και ο φύλακας αναφέρει στον Α ότι ο Γ δεν θα εκτελεστεί.
- Τότε ο Α γίνεται πολύ ανήσυχος. Πριν ρωτήσει τον φύλακα φαινότανε να έχει 1/3 πιθανότητα για να εκτελεστεί. Τώρα που ξέρει ότι ο Γ δεν θα εκτελεστεί, μοιάζει να έχει 1/2. Ο Α λέει στον εαυτό του, «Τι έκανα λάθος; Γιατί ρώτησα τον φύλακα;».
- Εξηγείστε αν ο φύλακας στα αλήθεια είπε κάποια πληροφορία στον Α.
- Ποια είναι η πιθανότητα να εκτελεστεί ο Α αφού ξέρει ότι ο Γ δεν θα εκτελεστεί.

Παράδειγμα

- Έστω $\omega \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ το γεγονός ότι αύριο το πρωί θα εκτελεστεί ο Α, ο Β και ο Γ κρατούμενος αντίστοιχα.
- Έστω ότι $x \in \{A, B, \Gamma\}$ είναι οι πληροφορίες που έδωσε ο φρουρός στον Α (δηλαδή το ποιος δεν θα εκτελεστεί). Θεωρούμε ότι ο φρουρός δεν μπορεί να πει στον Α τι θα γίνει με αυτόν, ούτε το ποιος από τους 3 θα εκτελεστεί.
- Οι a priori είναι :
  - p(α)=p(β)=p(γ)=1/3

Παράδειγμα

- Ποια είναι η πιθανότητα να μας πει ποιος δεν θα εκτελεστεί; (εκτός φυσικά από εμάς)

Εάν $\omega=\alpha \Rightarrow p(x=B/a)=p(x=\Gamma/a)=1/2$

Εάν $\omega=\beta \Rightarrow p(x=B/\beta)=0, \quad p(x=\Gamma/\beta)=1$

Εάν $\omega=\gamma \Rightarrow p(x=B/\gamma)=1, \quad p(x=\Gamma/\gamma)=0$

Παράδειγμα

- Αφού ο φρουρός του λέει ότι θα εκτελεστεί ο Γ ισχύει ότι:

$$p(x=\Gamma/\alpha)=1/2, \quad p(x=\Gamma/\beta)=1, \quad p(x=\Gamma/\gamma)=0$$

$$p(a/x)+p(\beta/x)+p(\gamma/x)=1$$

$$p(a/x)=\frac{p(x=\Gamma/\alpha)\cdot p(a)}{p(x)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{p(x)}$$

$$p(\beta/x)=\frac{p(x=\Gamma/\beta)\cdot p(\beta)}{p(x)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{p(x)}$$

$$p(\gamma/x)=\frac{p(x=\Gamma/\gamma)\cdot p(\gamma)}{p(x)}=\frac{0\cdot\frac{1}{3}}{p(x)}$$

Παράδειγμα

$$\text{Οπότε} \quad p(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα} \quad p(a/x) = 1/3, \quad p(\beta/x) = 2/3 \quad \text{και} \quad p(\gamma/x) = 0$$

- Αυτό δείχνει ότι τελικά ο Α δεν μαθαίνει τίποτα παραπάνω, όμως ο Β εάν το μάθαινε θα ανησυχούσε περισσότερο.