

Θεωρία Λήψης Αποφάσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων,
Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων

Εισαγωγή

- Με τη λέξη **απόφαση** εννοούμε συνήθως την επιλογή κάποιας ή κάποιων από τις εναλλακτικές ενέργειες που είναι στη διάθεσή μας για την αντιμετώπιση κάποιου συγκεκριμένου προβλήματος.
- Οι περισσότερες αποφάσεις στην καθημερινή ζωή λαμβάνονται **χωρίς ιδιαίτερη σκέψη**, είτε γιατί είναι ασήμαντες, είτε γιατί ενώ είναι σημαντικές είναι προφανής η επιλογή της καλύτερης απόφασης / ενέργειας.
- Η **Θεωρία Λήψης Αποφάσεων** ασχολείται με την εφαρμογή αλγορίθμων / μεθόδων για τη λήψη σημαντικών αποφάσεων για τις οποίες δεν είναι προφανές τι ενέργεια πρέπει να γίνει, δεδομένου ότι οι αποφάσεις πρέπει να ληφθούν κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.
- Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε κυρίως με θέματα που ανήκουν στον επιστημονικό κλάδο της **Στατιστικής Θεωρίας Λήψης Αποφάσεων**.

Εισαγωγή

- Η Στατιστική Θεωρία Λήψης Αποφάσεων

εφαρμόζεται όταν υπάρχει αντικειμενική αβεβαιότητα,

δηλαδή αβεβαιότητα που χαρακτηρίζεται από ένα χώρο

δειγμάτων με σαφή ενδεχόμενα (π.χ. όπως το ριζιμο ενός

ζαριού, όπου μπορούμε εύκολα να ποσοτικοποιήσουμε

την αβεβαιότητα με βάση τις πιθανότητες).

Εισαγωγή

- Η ευκολία με την οποία:
 - αναγνωρίζουμε ένα πρόσωπο,
 - αντιλαμβανόμαστε κάποιο προφορικό λόγο,
 - διαβάζουμε χειρόγραφα κείμενα,
 - αναγνωρίζουμε τα κλειδιά του αυτοκινητού μας μέσα στην τσέπη μας μέσω της αφής
 - και **ΑΠΟΦΑΣΙΖΟΥΜΕ** αν ένα μήλο έχει σαπίσει από τη μυρωδιά του,
- περιγράφεται από πολύπλοκες διαδικασίες που ανήκουν σε αυτό που ονομάζεται Αναγνώριση Προτύπων

Εισαγωγή

- Αναγνώριση Προτύπων
- η διαδικασία κατά την οποία λαμβάνουμε δεδομένα σε σειριακή μορφή και παίρνουμε αποφάσεις βασιζόμενες στην κατηγορία προτύπων που ανήκουν τα δεδομένα
- έχει ζωτική σημασία αιόμη και για την επιβίωση μας καθώς έχουμε εξελιχθεί ως ανθρώπινα όντα, εξελίσσοντας υψηλού επιπέδου νευρικά και νοητικά συστήματα για τέτοιες διαδικασίες

Αντίληψη Μηχανής

- Είναι φυσικό να προσπαθούμε να σχεδιάζουμε και να κατασκευάζουμε μηχανές που αναγνωρίζουν πρότυπα όπως:
 - η αυτόματη αναγνώριση φωνής,
 - η αναγνώριση μέσω δαχτυλικών αποτυπωμάτων,
 - η οπτική αναγνώριση χαρακτηριστικών κειμένου,
 - η αναγνώριση ακολουθιών DNA κ.ά.
- Είναι σαφές ότι η **αναγνώριση προτύπων από τις μηχανές**, όταν γίνεται με ακρίβεια, θα είναι ασφαλώς πολύ χρήσιμη

Αντίληψη Μηχανής

- Από την επίλυση των διαφόρων προβλημάτων που προκύπτουν κατά την υλοποίηση τέτοιων συστημάτων αποκτούμε βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση για τα **συστήματα αναγνώρισης προτύπων στο φυσικό κόσμο**
- Για κάποια προβλήματα, όπως η ομιλία και η οπτική αναγνώριση, οι προσπάθειες σχεδιασμού μπορεί στην πραγματικότητα να **εμπνευστούν από τη γνώση του πώς αυτά επιλύονται-λειτουργούν στη φύση**, τόσο ως προς τους αλγορίθμους σχεδιασμού (π.χ. οι Γενετικοί Αλγόριθμοι μιμούνται τη διαδικασία της φυσικής εξέλιξης), όσο και ως προς το σχεδιασμό υλικού (hardware) ειδικού σκοπού

Παράδειγμα

- Για να κάνουμε κατανοητή την πολυπλοκότητα ορισμένων τύπων προβλημάτων θα θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:
 - Υποθέστε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ευφυές σύστημα διαχωρισμού ψαριών που μεταφέρονται σε ένα ιμάντα
 - Ας θεωρήσουμε ότι θα θέλαμε, αρχικά, να μπορεί να αναγνωρίζει (ξεχωρίζει) μέσω οπτικών αισθητήρων τα ψάρια σολομός και πέρια
 - Στήνουμε μια κάμερα, παίρνουμε κάποιες εικόνες δειγματοληπτικά και αρχίζουμε να παρατηρούμε κάποιες φυσικές διαφορές μεταξύ των δύο αυτών ψαριών
 - Αυτές μεταξύ άλλων μπορεί να είναι το μήκος, η απόχρωση του δέρματος, το πλάτος, ο αριθμός και το σχήμα των λεπιών τους, η θέση του στόματος κ.ά.

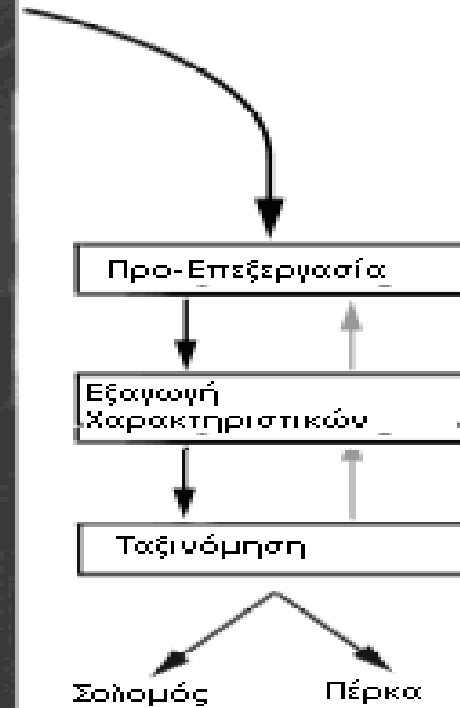
Παράδειγμα

- Όλα αυτά συνιστούν χαρακτηριστικά (**features**) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον ταξινομητή
- Παρατηρείται επίσης κάποιος ανεπιθύμητος θόρυβος (διαταραχές στις εικόνες), όσον αφορά τις αποχρώσεις του δέρματος, τη θέση των ψαριών στον ιμάντα κ.ά., που μπορεί να οφείλονται αιόμη και στο θόρυβο που προκαλεί η λειτουργία της ηλεκτρονικής κάμερας
- Δοθέντος του ότι υπάρχουν στην πραγματικότητα διαφορές μεταξύ των πληθυσμών της πέρινας και του σολομού μπορούμε να πούμε για αυτούς τους πληθυσμούς ότι έχουν διαφορετικά μοντέλα (**models**) – διαφορετική περιγραφή από κάποιο μαθηματικό τύπο (μοντέλο)

Παράδειγμα

- Ο βασικός σιοπός και η προσέγγιση στην Αναγνώριση Προτύπων είναι:
 - να υποθέσει την κλάση αυτών των μοντέλων,
 - να επεξεργαστεί τα δεδομένα που λαμβάνει από τους αισθητήρες ώστε αυτά να μην περιέχουν θόρυβο και
 - για κάθε πρότυπο που αντιλαμβάνεται να το αντιστοιχίσει στο μοντέλο που το περιγράφει καλύτερα.
- Κάθε τεχνική που βοηθάει ακόμη περισσότερο το τελευταίο θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη από το σχεδιαστή Συστημάτων Αναγνώρισης Προτύπων.

Παράδειγμα



Παράδειγμα

■ Βήματα:

1. Η κάμερα λαμβάνει μια εικόνα από το ψάρι.
2. Τα σήματα της κάμερας προεπεξεργάζονται (preprocessed) για να απλοποιήσουν τις επόμενες πράξεις χωρίς να χαθούν όμως σημαντικά δεδομένα.

Ο **προεπεξεργαστής** μπορεί να:

- χρησιμοποιήσει τμηματοποίηση (segmentation) κατά την οποία εικόνες από διαφορετικά ψάρια κατά κάποιο τρόπο απομονώνονται η μια από την άλλη και από το παρασκήνιο (background).
- να προσαρμόσει αυτόματα το μέσο όρο του επιπέδου της φωτεινότητας ή ακόμη το κατώφλι της εικόνας, ώστε να απομακρύνει το φόντο του ιμάντα, κ.ο.κ.

Παράδειγμα

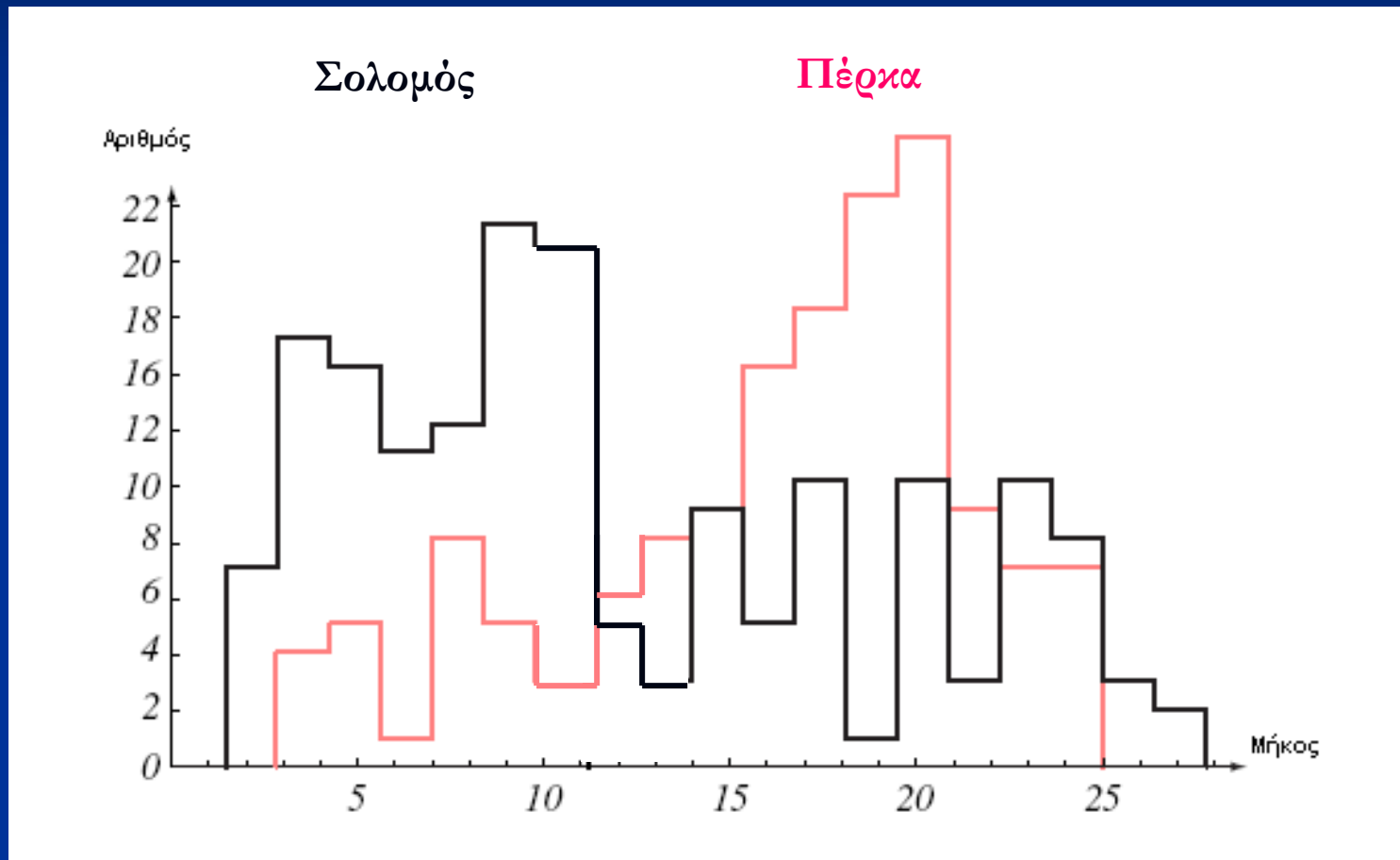
■ Βήματα:

3. Τα δεδομένα από ένα μόνο είδος ψαριού στέλνονται τότε σε ένα **εξαγωγέα χαρακτηριστικών** (feature extractor), του οποίου η λειτουργία επικεντρώνεται στο να μειώσει τον όγκο των δεδομένων, λαμβάνοντας υπόψη του μόνο κάποια σημαντικά «χαρακτηριστικά» ή «ιδιότητες».
4. Αυτά τα χαρακτηριστικά (ή πιο συγκεκριμένα, οι τιμές αυτών των χαρακτηριστικών) περνάνε στη συνέχεια σε ένα **ταξινομητή** που αποτιμά την ένδειξη που παρατηρείται και παίρνει την τελική **απόφαση** όσον αφορά το είδος κάθε ψαριού.

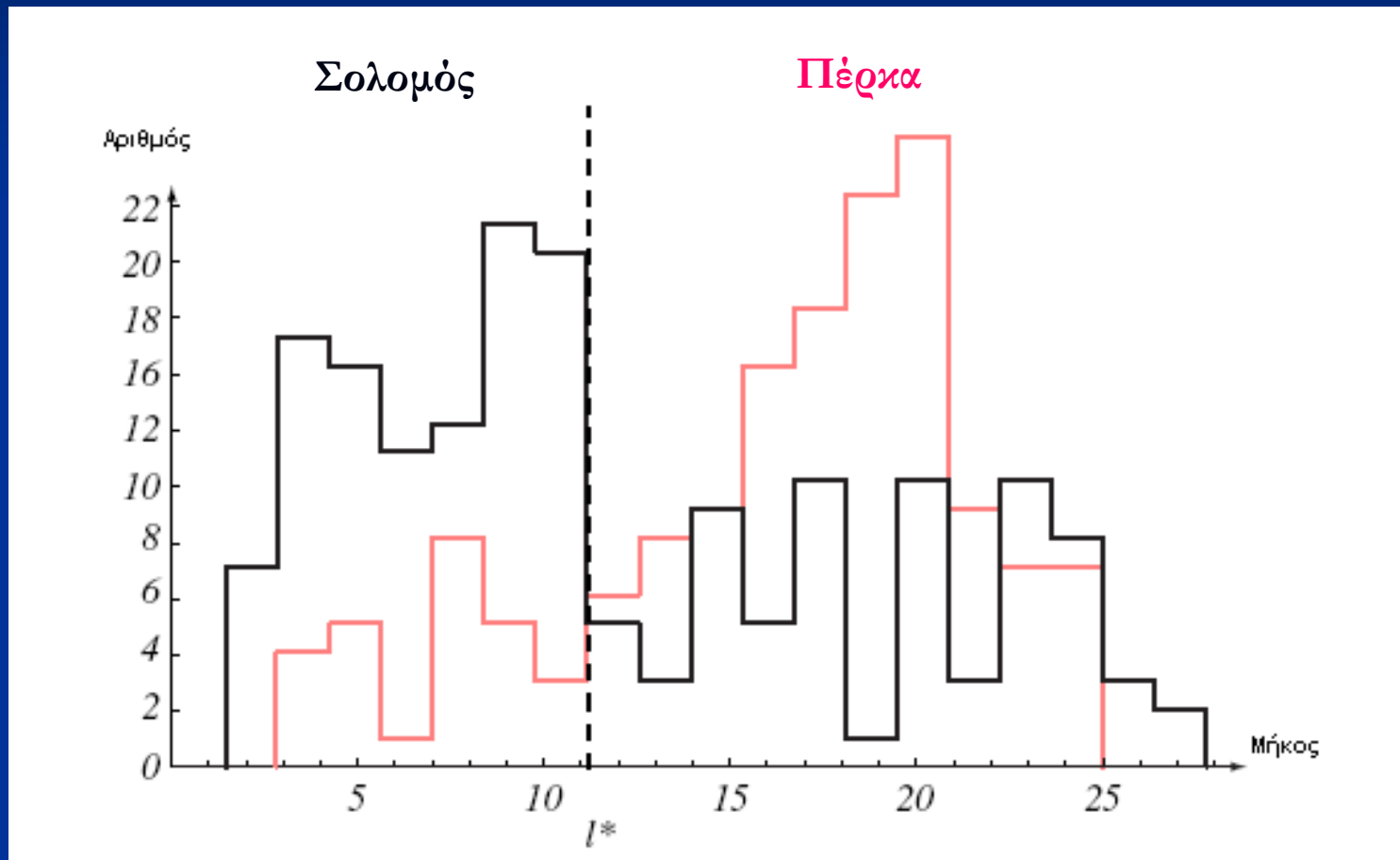
Παράδειγμα

- Σχεδιασμός Εξαγωγή Χαρακτηριστικών και Ταξινομητή
 - Ας υποθέσουμε ότι κάποιος που δουλεύει στο τμήμα διαχωρισμού των ψαριών αναφέρει ότι γενικά η πέρκα είναι μεγαλύτερη σε μήκος από το σολομό.
 - Αυτή η γνώση παρέχει κάποια δοκιμαστικά μοντέλα για τα ψάρια: *Οι πέρκες έχουν κάποιο τυπικό μήκος που είναι γενικά μεγαλύτερο από του σολομού.*
 - Το μήκος λοιπόν είναι ένα προφανές χαρακτηριστικό και μπορούμε να προσπαθήσουμε να ταξινομήσουμε τα ψάρια ανάλογα με το αν το μήκος τους l ξεπερνάει κάποιο κρίσιμο μήκος l^* ή όχι.
 - Για να επιλέξουμε το l^* πρέπει να πάρουμε κάποια δείγματα εκπαίδευσης από ψάρια διαφορετικών ειδών, να κάνουμε μετρήσεις ως προς το μήκος και να επιθεωρήσουμε τα αποτελέσματα.

Παράδειγμα



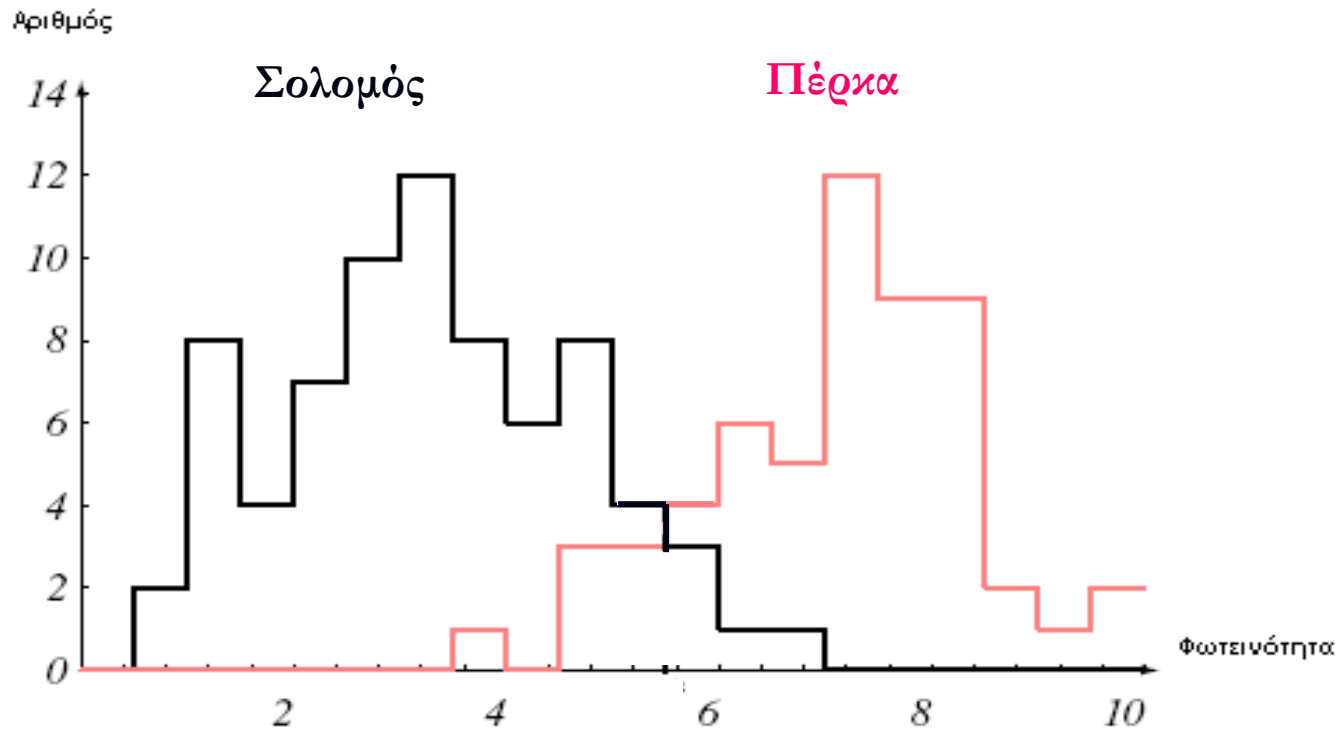
Παράδειγμα



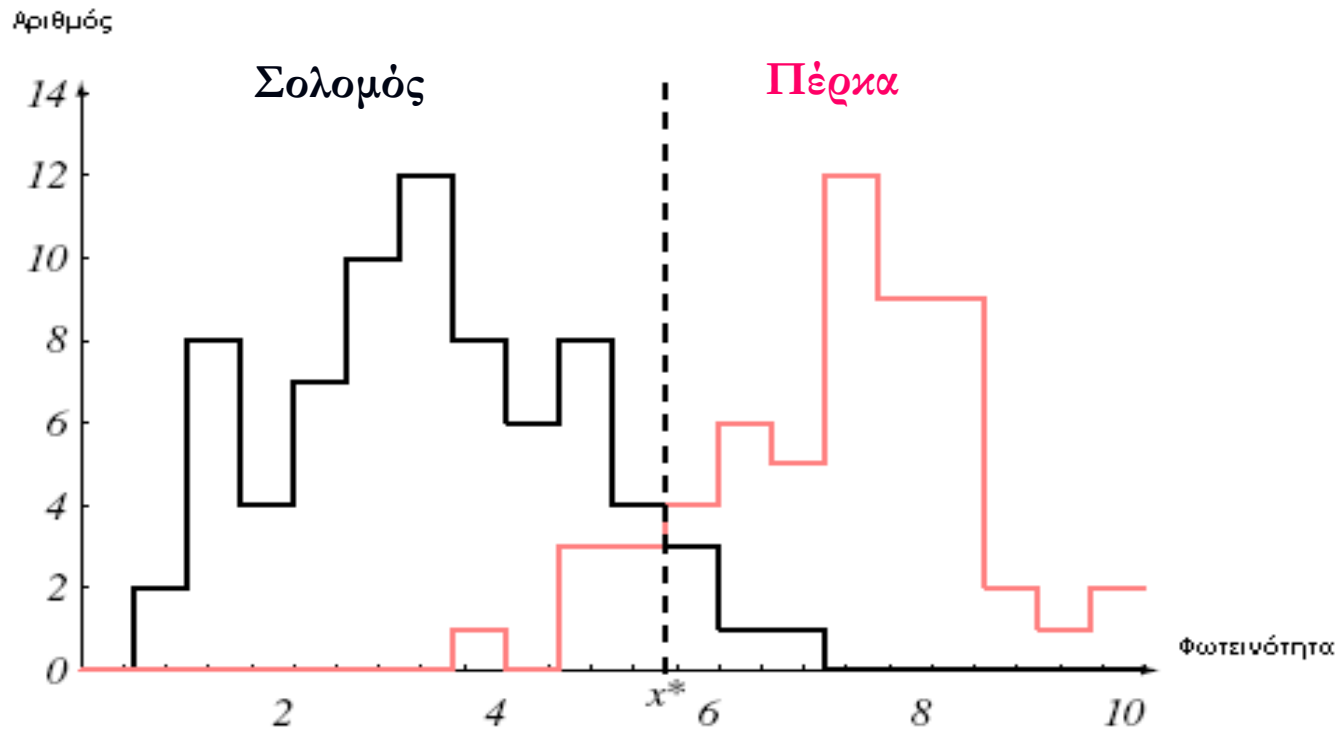
Παράδειγμα

- Αυτά τα «απογοητευτικά» ιστογράμματα επαληθεύουν τον ισχυρισμό μας ότι η πέρια είναι κάπως πιο μεγάλη σε μήκος από το σολομό, κατά μέσο όρο, αλλά είναι ξεκάθαρο ότι **μόνο** αυτό το κριτήριο δεν είναι επαρκές.
- Το συμπέρασμα είναι το εξής:
 - «Ανεξάρτητα από το πως (πόσο) επιλέγουμε το I^* , **ΔΕΝ** μπορούμε να ξεχωρίσουμε αξιόπιστα την πέρια από το σολομό μόνο με το μήκος».
- Προχωράμε έτσι στην επιλογή άλλου χαρακτηριστικού:
 - Έστω ότι αυτό είναι ο μέσος όρος φωτεινότητας του χρώματος του ψαριού.
- Τώρα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στις αποκλίσεις της φωτεινότητας, επειδή μπορούν να μπερδέψουν το μοντέλο μας αλλά και τον νέο ταξινομητή.

Παράδειγμα



Παράδειγμα



Παράδειγμα

- Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε υποθέσει κάπως «αικίνδυνα» ότι οι συνέπειες των πράξεων μας (εύρεση μοντέλου-ταξινόμηση) έχουν το ίδιο κόστος:
 - Να αποφασίσουμε πέρα αντί για το σωστό (σολομός) έχει το ίδιο κόστος με το αντίστροφο, δηλαδή να αποφασίσουμε σολομό αντί για το σωστό (πέρα).
- Αυτή η συμμετρία στο κόστος είναι συχνά, αλλά όχι χωρίς εξαιρέσεις, η γενική περίπτωση. (Φανταστείτε το παράδειγμα ενός ταξινομητή για νάρκες ενεργές ή μη...).
- Στο παράδειγμά μας, μια εταιρεία κονσερβοποίησης ψαριών μπορεί να γνωρίζει ότι οι πελάτες της δέχονται περιστασιακά να βρίσκουν κομμάτια σολομού στις κονσέρβες τους με ετικέτα «πέρα», όμως δυσανασχετούν όταν κομμάτια πέρας βρεθούν σε κονσέρβα με ετικέτα «σολομός».

Παράδειγμα

- Αν λοιπόν θέλουμε να είμαστε επιτυχημένοι σχεδιαστές τέτοιων συστημάτων (για να μας προτιμήσει και η εταιρία ψαριών), θα πρέπει να προσαρμόσουμε τις αποφάσεις μας για να ευχαριστήσουμε τους πελάτες μας, ανόμα και αυτό να σημαίνει ότι κομμάτια σολομού πηγαίνουν ενίοτε σε κονσέρβες με ετικέτα «πέρια»
- Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν θα πρέπει να μεταφέρουμε την περιοχή απόφασης σε μικρότερες τιμές φωτεινότητας με αποτέλεσμα να μειώσουμε τον αριθμό των ψαριών πέριας που ταξινομούνται ως σολομός
- Όσο περισσότερο οι πελάτες μας διαμαρτύρονται ότι παίρνουν πέρια σε κονσέρβες με ετικέτα «σολομός» (δηλαδή, όσο πιο πολύ είναι το κόστος του λάθους ταξινόμησης) τόσο μικρότερο θα πρέπει να τίθεται το κατώφλι απόφασης x^*

Παράδειγμα

- Τέτοιες υποθέσεις δείχνουν ότι υπάρχει ένα γενικό λάθος που σχετίζεται με κάθε απόφασή και η πραγματική πρόκληση είναι να δημιουργηθεί ένας **κανόνας απόφασης** (για παράδειγμα να τεθεί ένα όριο απόφασης, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος)
- Αυτή είναι η πρόκληση με την οποία ασχολείται η Θεωρία Λήψης Αποφάσεων της οποίας η ταξινόμηση προτύπων είναι ίσως το σημαντικότερο υπο-πεδίο
- Ανόμη και αν είναι γνωστό το κόστος το οποίο συνδέεται με κάθε απόφαση και επιλεγεί ως κρίσιμο σημείο το x^* , δεν είναι σίγουρο ότι το αποτέλεσμα θα είναι το καλύτερο δυνατό
- Επομένως, πρέπει να αναζητηθεί και κάποιο άλλο διαφορετικό χαρακτηριστικό πάνω στο οποίο θα στηριχτεί η προσπάθεια βέλτιστου διαχωρισμού των ψαριών

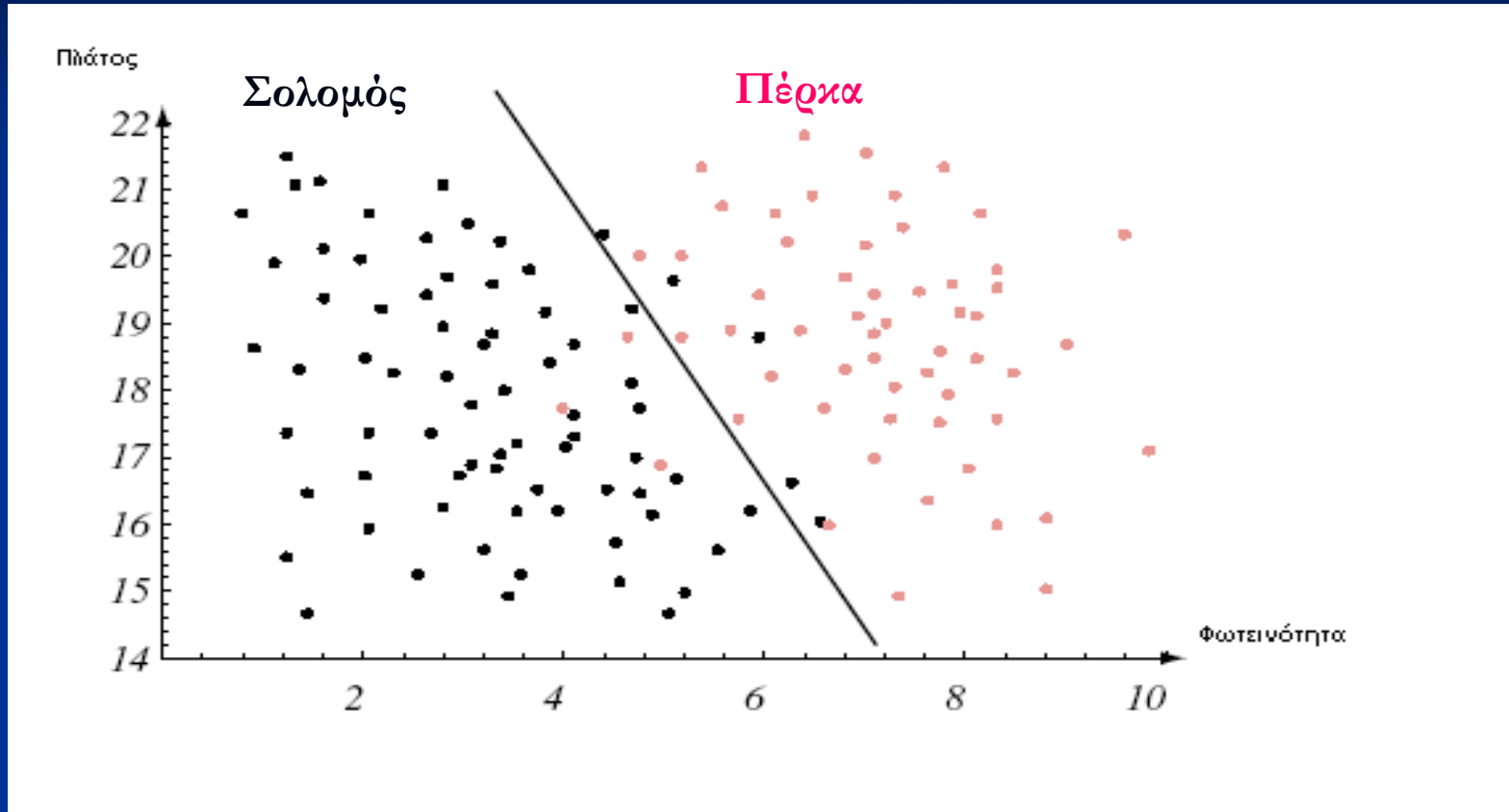
Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε, ότι κανένα άλλο οπτικό χαρακτηριστικό, ειτός από τη φωτεινότητα, δε δουλεύει καλύτερα
- Στην περίπτωση αυτή, για να βελτιώσουμε την αναγνώριση, θα πρέπει να καταφύγουμε στη χρήση περισσότερων του ενός χαρακτηριστικών
- Κατά την αναζήτηση αυτών των επιπλέον χαρακτηριστικών μπορεί να δοκιμάσουμε και το ότι η πέρινα είναι πιο μεγάλη σε πλάτος από το σολομό

Παράδειγμα

- Τώρα, υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά για να ταξινομήσουμε το κάθε ψάρι – η φωτεινότητα x_1 και το πλάτος x_2
- Στο σημείο αυτό διαπιστώνουμε ότι ο εξαγωγέας χαρακτηριστικών έχει «μειώσει» την εικόνα για κάθε ψάρι σε ένα σημείο ή αλλιώς σε ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών x , σε ένα δύο διαστάσεων χώρο χαρακτηριστικών
- Το πρόβλημα έγκειται στο να διαχωρίσουμε αυτό το χώρο χαρακτηριστικών σε δύο περιοχές, όπου στη μία θα ανήκουν οι πέρικες και στην άλλη οι σολομοί

Παράδειγμα



- Τι είδους ταξινομητή συνιστά το παραπάνω γράφημα;

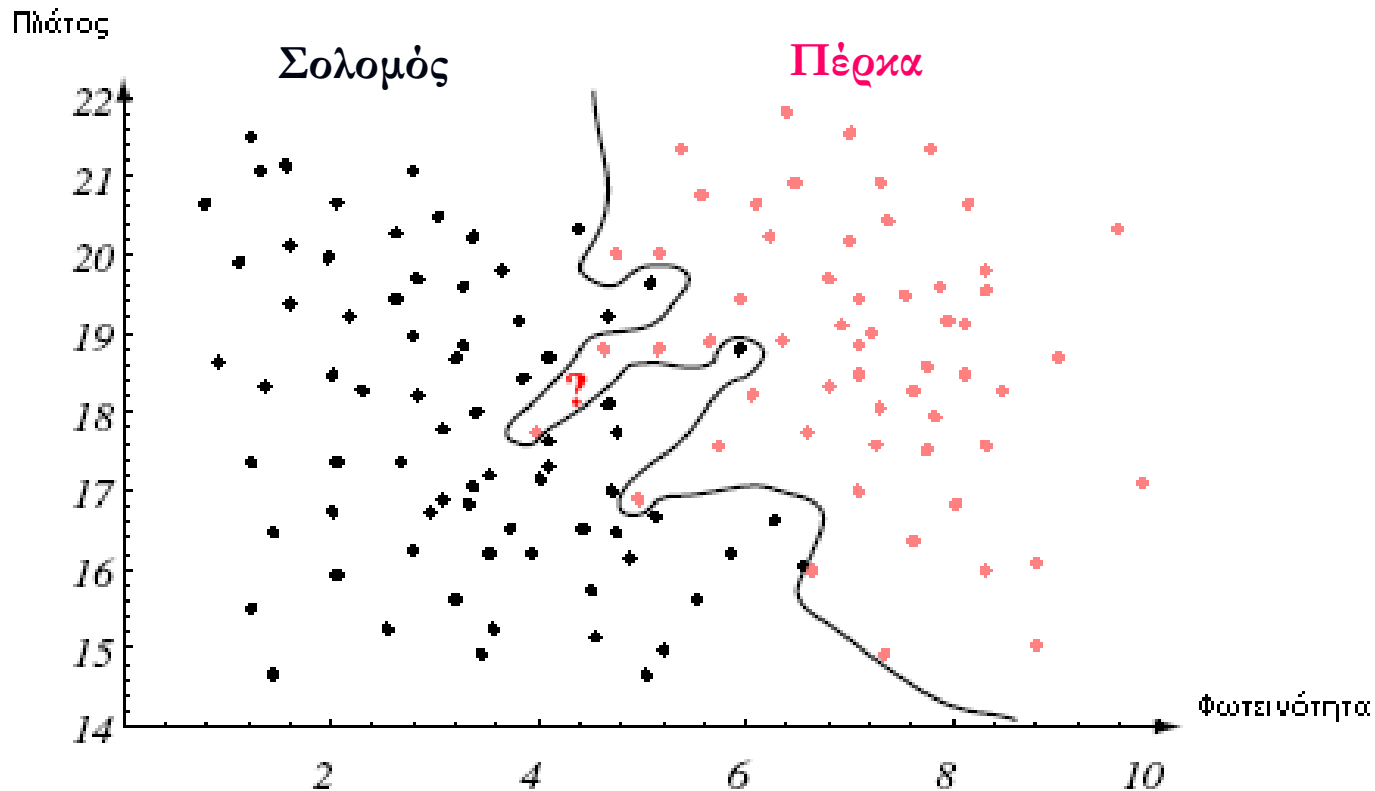
Παράδειγμα

- Αυτός ο κανόνας δείχνει να είναι καλός στο να ξεχωρίζουμε τα δείγματα και προτρέπει στο να χρησιμοποιήσουμε ακόμη περισσότερα χαρακτηριστικά
- Ειτός από τη φωτεινότητα και το πλάτος των ψαριών μπορούμε ακόμη να συμπεριλάβουμε κάποια παράμετρο σχήματος, όπως:
 - η κυρτή γωνία του ραχιαίου πτερυγίου ή ακόμη
 - η τοποθεσία των οφθαλμών (όπως αυτή εκφράζεται από την αναλογία της απόστασης στόματος-ουράς) κ.ο.κ.
- Πως όμως γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποιο από τα χαρακτηριστικά αυτά θα δουλέψει καλύτερα;

Παράδειγμα

- Κάποια χαρακτηριστικά μπορεί να είναι πλεονάζοντα:
 - Αν το χρώμα των ματιών των ψαριών σχετίζεται άμεσα και με το πλάτος τους, τότε η επιλογή του χρώματος του ματιού ως χαρακτηριστικό θα είναι πλεονάζουσα
- Έστω ότι τα άλλα χαρακτηριστικά είναι δύσκολο να μετρηθούν ή απλώς προσφέρουν μικρή βελτίωση στον ταξινομητή ή ακόμα και χειροτερεύουν την ταξινόμηση
- Αν τα μοντέλα μας ήταν πολύ περίπλοκα ο ταξινομητής μας θα είχε περιοχές απόφασης διαχωριζόμενες από σύνθετη καμπύλη γραμμή και όχι απλά από μια ευθεία

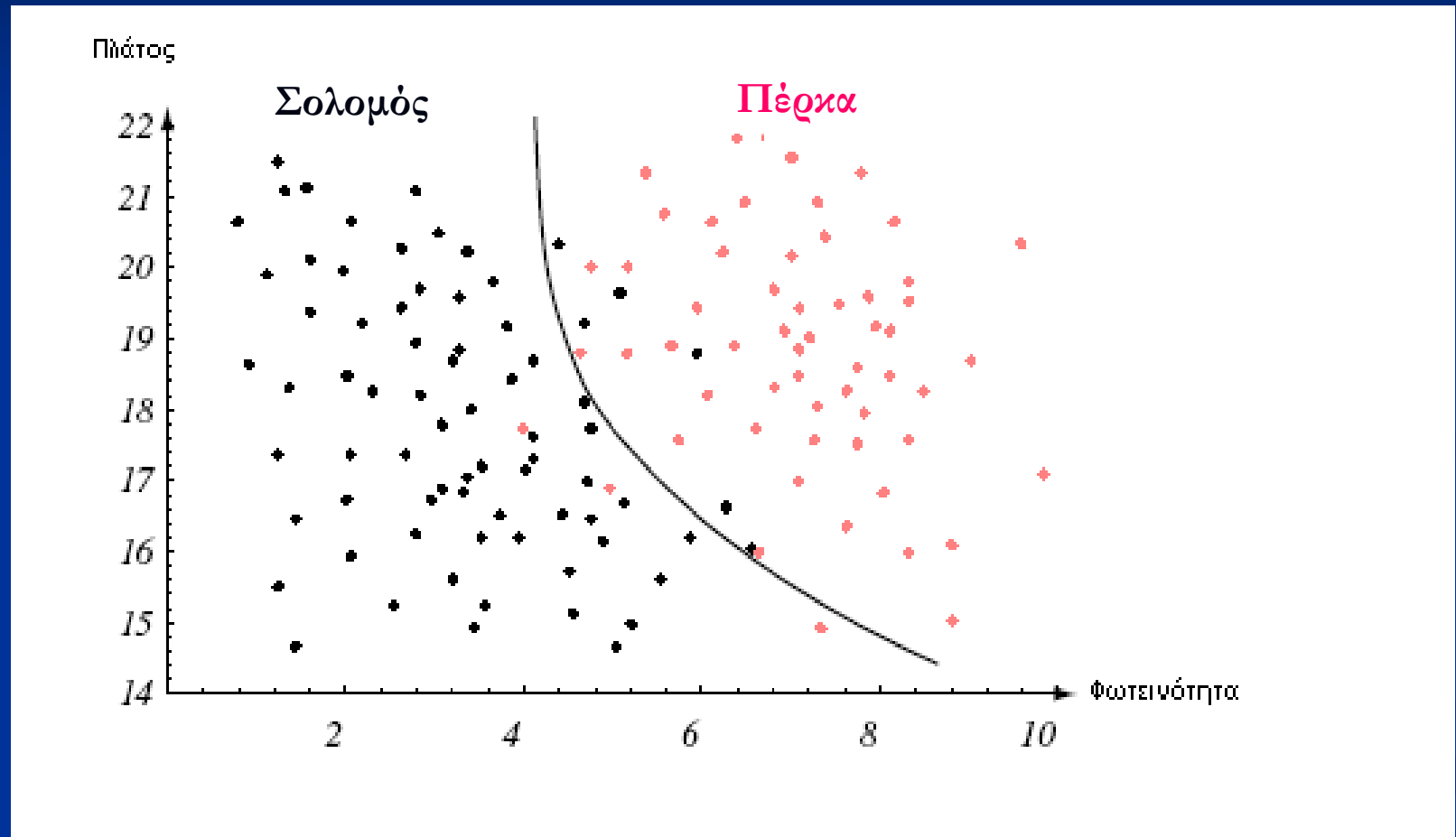
Παράδειγμα



Παράδειγμα

- Μια τέτοια λύση όμως, δε θα ήταν ικανοποιητική επειδή ο βασικός σκοπός μας, όταν κατασκευάζουμε ένα ταξινομητή, είναι να μας προτείνει δράσεις όταν παρουσιάζονται σε αυτόν νέα πρότυπα όπως π.χ κάποιο ψάρι που δεν έχει ξαναδεί
- Αυτό είναι γνωστό με τον όρο **γενίκευση**
- Είναι απίθανο η περίπλοκη περιοχή απόφασης του σχήματος να παρέχει καλή γενίκευση - μοιάζει να είναι ρυθμισμένη να δουλεύει καλά μόνο για τα δείγματα εκπαίδευσης
- Σε αρκετά προβλήματα αναγνώρισης προτύπων, πάντως, το πλήθος των δεδομένων που μπορούμε να έχουμε είναι περιορισμένο.
- Ακόμη όμως και αν είχαμε ένα μεγάλο πλήθος δεδομένων εκπαίδευσης, σε ένα συνεχή χώρο χαρακτηριστικών, ο ταξινομητής μας θα παρουσίαζε πολύ περίπλοκη περιοχή απόφασης που επίσης δε θα δούλευε καλά στην γενίκευση

Παράδειγμα



Παράδειγμα

- Κάποια κυρίαρχα προβλήματα στη Στατιστική Θεωρία Λήψης Αποφάσεων:
 - Αν με το να σχεδιάζουμε ένα περίπλοκο ταξινομητή είναι απίθανο να έχουμε καλή γενίκευση, πως το σύστημά μας μπορεί αυτόματα να καθορίζει ότι μια απλή καμπύλη είναι ή όχι καταλληλότερη από μια ευθεία ή μια πολύπλοκη καμπύλη;
 - Ας υποθέσουμε ότι κατά κάποιο τρόπο επιτυγχάνουμε να καθορίσουμε τη βελτίωση του ταξινομητή μας λαμβάνοντας υπόψη μας τα παραπάνω. Μπορούμε να προβλέψουμε πόσο καλά το σύστημά μας θα αναγνωρίσει νέα πρότυπα;

Παράδειγμα

- Για τα ίδια εισαγόμενα στον ταξινομητή πρότυπα μπορεί να θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε άλλη συνάρτηση κόστους και ακόμη να θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τον ταξινομητή να κάνει διαφορετικό διαχωρισμό:
 - αντί να ξεχωρίζει σολομούς από πέγκες να κατατάσσει τα ψάρια ανάλογα με το φύλο τους αν θέλουμε να πουλήσουμε αυγοτάραχο
 - μπορεί να θέλουμε να επιλέξουμε τα χαλασμένα ψάρια για γατοτροφή και πολλά άλλα σενάρια.
- Διαφορετικές αποφάσεις μπορεί να απαιτούν διαφορετικά χαρακτηριστικά και να παράγουν περιοχές ταξινόμησης πολύ διαφορετικές από το αρχικό μας πρόβλημα
- Οι αποφάσεις είναι βασισμένες στο κόστος που ορίζουμε και γι' αυτό το να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο «γενικής» χρήσης είναι όντως πολύ δύσκολο εγχείρημα

Παράδειγμα

- Επειδή η ταξινόμηση είναι μια διαδικασία εύρεσης του μοντέλου που γεννάει τα πρότυπα, διαφορετικές τεχνικές αναγνώρισης είναι χρήσιμες σε συγκεκριμένα υποψήφια μοντέλα
- Στην στατιστική αναγνώριση προτύπων επικεντρωνόμαστε στις στατιστικές ιδιότητες των προτύπων (όπως γενικά εκφράζονται από την πυκνότητα πιθανότητας)
- **Το μοντέλο για ένα πρότυπο μπορεί να είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο χαρακτηριστικών**
- Σε πολλές περιπτώσεις κάποιοι θεωρούν ότι η αναγνώριση προτύπων γίνεται αποδοτικά μέσω της χρήσης Νευρωνικών Δικτύων

Παράδειγμα

- Στο παράδειγμα με τα ψάρια ήταν σημαντικό να επιλέξουμε κάποια χαρακτηριστικά πολύ προσεχτικά και να καταλήξουμε σε μια γραφική αναπαράσταση, από όπου μπορούμε να έχουμε επιτυχή ταξινόμηση
- Ένα σημαντικό θέμα σε κάθε πρόβλημα αναγνώρισης προτύπων είναι να καταλήγουμε σε μια επιτυχή αναπαράσταση στην οποία κάθε δομική σχέση ανάμεσα στα χαρακτηριστικά να είναι απλή και να διαφαίνεται απλά
- Θα πρέπει μέσω αυτής της αναπαράστασης να διαφαίνεται και το **μοντέλο** που εκφράζει τα πρότυπα και τα χαρακτηριστικά τους

Παράδειγμα

- Σε μερικές περιπτώσεις τα πρότυπα θα πρέπει να αναπαρίστανται ως διανύσματα πραγματικών αριθμών, σε άλλες ως λίστες με κάποιες ιδιότητες, σε άλλες ως περιγραφές μερών και σχέσεων κ.ά.
- Πρέπει να βρεθεί μια αναπαράσταση στην οποία τα πρότυπα που οδηγούν στην ίδια απόφαση να είναι κατά κάποιο τρόπο κοντά το ένα με το άλλο, αλλά επίσης και όσο γίνεται πιο μακριά από τα πρότυπα που οδηγούν σε διαφορετική απόφαση
- Η «λεπτομέρεια» την οποία επιλέγουμε για την αναπαράσταση καθώς και το πόσο εννοούμε το «μακριά» και το «κοντά» είναι οι παράγοντες στους οποίους οφείλει την επιτυχία του ένας ταξινομητής προτύπων

Παράδειγμα

- Κάποιες φορές χρησιμοποιούνται λίγα χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε
 - απλούστερες περιοχές απόφασης και
 - να απλοποιήσουν το χρόνο εκπαίδευσης του ταξινομητή.
- Κάποιες φορές χρησιμοποιούνται κάποια χαρακτηριστικά που είναι **εύρωστα** (robust), δηλαδή αυτά που είναι ανθεκτικά σε θόρυβο και σε άλλα λάθη
- Σε πρακτικές εφαρμογές μπορεί να χρειαστεί να έχουμε ένα **γρήγορο ταξινομητή** ή ακόμη και να χρησιμοποιήσουμε λιγότερα ηλεκτρονικά μέσα (αισθητήρες, Η/Υ κ.ά).

Παράδειγμα

- Μια κεντρική τεχνική όταν έχουμε στη διάθεσή μας λιγοστά δεδομένα εκπαίδευσης είναι να λάβουμε υπόψη μας τη **σχετική των προτέρων γνώση για το πρόβλημα**.
- Όσο λιγότερα είναι τα δεδομένα τόσο επιτακτικότερη είναι και η ανάγκη για την ενσωμάτωση γνώσης στο πρόβλημα - για παράδειγμα, πως τα πρότυπα έχουν προκύψει.
- Το σύστημα αναγνώρισης προτύπων πρέπει να μπορεί να αναλύσει (και επίσης να ταξινομήσει) τα πρότυπα εισόδου βασισμένο στο πως συντίθεται κάθε πρότυπο.
- Για το λόγο αυτό το σύστημα πρέπει να μπορεί να ανακτήσει τις **απαραίτητες παραμέτρους από τους αισθητήρες που εφαρμόζονται στα πρότυπα**.

Παράδειγμα

- Έστω τώρα η περίπτωση της βασιζόμενης σε φωτογραφίες αναγνώρισης όλων των ειδών καρειλών:
 - τυπικές καρέιλες γραφείου
 - σύγχρονες καρέιλες σαλονιού
 - καρέιλες με μορφή σάκου κ.ά
- Δοθείσης της ποικιλίας:
 - στον αριθμό των ποδιών
 - στο υλικό κατασκευής
 - στο σχήμα κ.ο.κ
- απελπιζόμαστε στην ιδέα να βρούμε μια καλή γενική αναπαράσταση που να βοηθάει στην ταξινόμηση των καρειλών.
- Ίσως μια πιο λειτουργική αναπαράσταση να βοηθήσει:
 - «Κάθε καρέιλα είναι ένα σταθερό αντικείμενο στο οποίο κάθεται κάποιος άνθρωπος και έχει στήριγμα για την πλάτη»

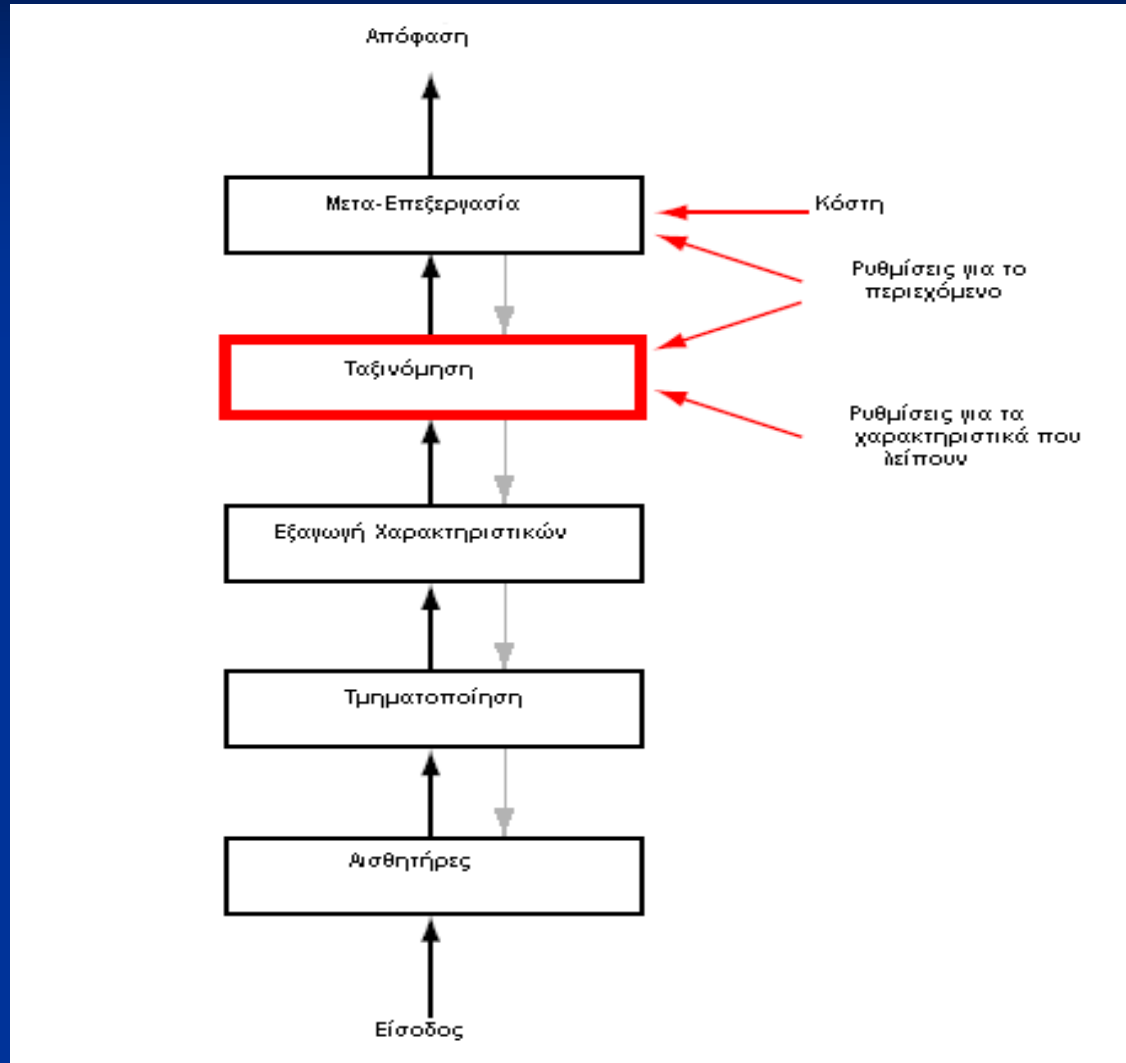
Παράδειγμα

- Προσπαθούμε να εξάγουμε τέτοια χαρακτηριστικά από τις φωτογραφίες που έχουν τραβήξει κάποιες μικροιάμερες
- Η φράση «ένα σταθερό αντικείμενο στο οποίο κάθεται κάποιος άνθρωπος και έχει στήριγμα για την πλάτη» είναι σημαντική αν και έμμεσα συνδεδεμένη με τον προσανατολισμό της καρτέλας, στη φωτογραφία
- Επίσης, αν πρόκειται για καρτέλα σε μορφή σάκου η απάντηση του ταξινομητή στην εύρεση της πλάτης της καρτέλας πρέπει να είναι αρνητική.
- Χωρίς να χρειαστεί να εισχωρήσουμε άλλο στο προηγούμενο παράδειγμα ένα είναι σίγουρο:
 - Σε προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο πρέπει να ψάχνουμε να αποκτήσουμε κάποια ει των προτέρων γνώση σε σχέση με τη δημιουργία των προτύπων ή την λειτουργία τους, για να εξασφαλίσουμε καλή αναπαράσταση

Συστήματα Αναγνώρισης Προτύπων

- Στην περιγραφή του συστήματος αυτόματης ταξινόμησης ψαριών διαχωρίσαμε τις τρεις διαφορετικές λειτουργίες:
 - προεπεξεργασία
 - εξαγωγή χαρακτηριστικών
 - ταξινόμηση

Συστήματα Αναγνώρισης Προτύπων



Συστήματα Αναγνώρισης Προτύπων

- Για να κατανοήσουμε το πρόβλημα του σχεδιασμού ενός τέτοιου συστήματος πρέπει να κατανοήσουμε πρώτα τα προβλήματα που κάθε μια από αυτές τις συνιστώσες πρέπει να επιλύσει
- Ας δούμε τις λειτουργίες της κάθε συνιστώσας με τη σειρά και να περιγράψουμε επιμέρους προβλήματα που μπορεί να προκύψουν

Αισθητήρες

- Η είσοδος σε ένα Σύστημα Αναγνώρισης Προτύπων είναι αρκετά συχνά μια κάμερα ή μια συστοιχία μικροφώνων
- Η δυσκολία του προβλήματος έγκειται στα χαρακτηριστικά αυτών των αισθητήρων και ειδικά σε κάποιους περιορισμούς όπως η ανάλυση εικόνας, η ευαισθησία, η αναλογία σήματος προς θόρυβο κ.ά.
- Όσο σημαντικό και αν είναι αυτό το πρόβλημα (ο σχεδιασμός των αισθητήρων) είναι πέρα από τους σκοπούς του μαθήματος

Τμηματοποίηση και Ομαδοποίηση

- Στο παράδειγμά με το διαχωρισμό των ψαριών, θεωρήθηκε ότι κάθε ψάρι πάνω στον ιμάντα κίνησης είναι μόνο του, χωριστά από τα άλλα, και έτσι μπορούσε εύκολα να διαχωριστεί από τον ίδιο τον ιμάντα και μόνο
- Στην πράξη όμως τα ψάρια μπορεί να είναι επικαλυπτόμενα, οπότε το σύστημα μας θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να μπορεί να τα διαχωρίσει
- Κάθε πρότυπο θα πρέπει να τμηματοποιηθεί. Αν αναγνωριστούν τα ψάρια θα είναι πιο εύκολο να τμηματοποιήσουμε τις εικόνες τους
- Αλλά πως γίνεται να τμηματοποιήσουμε τις εικόνες πριν αυτές να έχουν κατηγοριοποιηθεί ή πώς να τις κατηγοριοποιήσουμε αν αυτές δεν έχουν προηγουμένως τμηματοποιηθεί;
- Η τμηματοποίηση είναι ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στην αναγνώριση προτύπων

Εξαγωγή Χαρακτηριστικών

- Η διάκριση μεταξύ της εξαγωγής χαρακτηριστικών και ταξινόμησης είναι κάπως αφηρημένη:
 - «Μια ιδανική εξαγωγή χαρακτηριστικών που παράγει μια καλή αναπαράσταση διευκολύνει αφάνταστα το έργο του ταξινομητή»
 - Αντίστροφα «ένας καλός ταξινομητής δε χρειάζεται βοήθεια από έναν πολύπλοκο εξαγωγέα χαρακτηριστικών»
- Η διάκριση αυτών των διαδικασιών γίνεται κυρίως για πρακτικούς λόγους παρά για θεωρητικούς

Εξαγωγή Χαρακτηριστικών

- Ο παραδοσιακός στόχος του εξαγωγέα χαρακτηριστικών είναι να χαρακτηρίσει ένα αντικείμενο, που πρόκειται να αναγνωριστεί από μετρήσεις, των οποίων οι τιμές είναι περίπου ίδιες για αντικείμενα που ανήκουν στην ίδια κατηγορία και πολύ διαφορετικές όταν ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες
- Αυτό οδηγεί στην ιδέα του να ψάχνεις για διαφορετικά χαρακτηριστικά τα οποία να μην χάνουν την αξία τους όταν υπόκεινται σε διάφορους μετασχηματισμούς της εισόδου

Εξαγωγή Χαρακτηριστικών

- Η τοποθέτηση του φαριού στον ιμάντα κίνησης είναι άσχετη με την κατηγορία στην οποία αυτό ανήκει και έτσι πρέπει και η αναπαράσταση που θα επιλέξουμε να είναι **ανεξάρτητη από την θέση** του φαριού πάνω στον ιμάντα.
- Ιδανικά σε αυτή την περίπτωση θέλουμε τα χαρακτηριστικά να είναι ανεξάρτητα από την αναπαράσταση είτε τα ψάρια βρίσκονται οριζόντια είτε κάθετα.
- Επίσης, η ταξινόμηση είναι **ανεξάρτητη της περιστροφής** και επομένως θέλουμε να είναι και τα χαρακτηριστικά ανεξάρτητα της περιστροφής.
- Ακόμη και το **μέγεθος του φαριού** μπορεί να μην είναι σημαντικό γιατί για παράδειγμα ένας μικρός σολομός δεν παύει να είναι σολομός.

Ταξινόμηση

- Ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος ταξινόμησης εξαρτάται από την μεταβλητότητα των τιμών των χαρακτηριστικών για αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας σε σχέση με τη διαφορά μεταξύ τιμών για αντικείμενα άλλων κατηγοριών.
- Η μεταβλητότητα των τιμών των χαρακτηριστικών των αντικείμενων της ίδιας κατηγορίας μπορεί να οφείλεται στην πολυπλοκότητα αλλά και στο θόρυβο.
- Ορίζουμε το **θόρυβο** σύμφωνα με τους ακόλουθους γενικούς όρους:
 - Κάθε ιδιότητα του προτύπου που δεν οφείλεται στο πραγματικό μοντέλο αλλά απεναντίας στην τυχαιότητα του πραγματικού κόσμου ή στους αισθητήρες.

Ταξινόμηση

- Όλα τα δύσκολα προβλήματα της αναγνώρισης προτύπων αφορούν το θόρυβο.
- Ποιος όμως είναι ο καλύτερος τρόπος να σχεδιάζουμε ένα ταξινομητή σε σχέση με αυτήν την μεταβλητότητα;
- Ποια είναι η καλύτερη δυνατή απόδοση του ταξινομητή;
- Ένα πρόβλημα που εμφανίζεται στην πράξη είναι ότι δεν μπορούμε πάντα να καθορίσουμε τις τιμές όλων των χαρακτηριστικών για μια δεδομένη είσοδο.

Ταξινόμηση

- Στο πρόβλημα του διαχωρισμού των ψαριών, για παράδειγμα, μπορεί να μην είναι δυνατό να καθορίσουμε το μήκος του ψαριού επειδή ίσως μέρος του κρύβεται από άλλο ψάρι.
- Η αφελής μέθοδος, της αποκλειστικής υπόθεσης ότι η τιμή του χαρακτηριστικού που λείπει είναι μηδέν ή ίση με τη μέση τιμή των άλλων τιμών, για τα πρότυπα που έχουν ήδη αναγνωριστεί, είναι σχεδόν πάντα μη βέλτιστη.
- Παρομοίως γεννάται το ερώτημα πως μπορούμε να εκπαιδεύσουμε ένα ταξινομητή ή να τον χρησιμοποιήσουμε όταν κάποια χαρακτηριστικά λείπουν;

Μετα-επεξεργασία

- Ένας ταξινομητής σπανίως υπάρχει μόνο για να υπάρχει.
- Απεναντίας, χρησιμοποιείται για να προτείνει συγκεκριμένες ενέργειες όπως, τοποθέτησε αυτό το ψάρι σε εκείνο το καλάθι το άλλο ψάρι στο άλλο καλάθι, όπου κάθε μια από αυτές τις δράσεις έχει ένα σχετικό κόστος
- Ο μετα-επεξεργαστής χρησιμοποιεί την έξοδο του ταξινομητή για να αποφασίσει ποια δράση θα ακολουθήσει
- Η απλούστερη μέτρηση της απόδοσης του ταξινομητή είναι η συχνότητα λάθους του. Δηλαδή, το ποσοστό των νέων προτύπων που ταξινομούνται λανθασμένα
- Είναι σύνηθες να ψάχνουμε για ένα **ελάχιστο ρυθμό λάθους** κατά την ταξινόμηση

Μετα-επεξεργασία

- Μπορεί να είναι πολύ καλύτερο να προτείνουμε δράσεις που θα ελαχιστοποιούν το **συνολικό αναμενόμενο κόστος**, που καλείται **ρίσκο**.
- Πως μπορούμε να ενσωματώσουμε τη γνώση μας σχετικά με τα κόστη και πως αυτή η γνώση μας θα επηρεάσει την τελική απόφαση του ταξινομητή;
- Μπορούμε να επιτιμήσουμε το συνολικό κόστος και έτσι να πούμε πότε ο ταξινομητής μας είναι σε επιτρεπτά όρια αποτυχίας;
- Μπορούμε να επιτιμήσουμε το ελάχιστο πιθανό ρίσκο καθενός ταξινομητή για να δούμε πόσο κοντά στις ανάγκες μας δουλεύει ή αν τελικά το πρόβλημα που καλείται να λύσει είναι απλώς πολύ δύσκολο συνολικά;

Μετα-επεξεργασία

- Στο παράδειγμά του διαχωρισμού ψαριών προέκυψε ότι χρησιμοποιώντας πολλαπλά χαρακτηριστικά μπορεί να επιτευχθεί καλύτερη ταξινόμηση
- Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι:
 - «μπορεί να είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλούς ταξινομητές με κάθε ταξινομητή να επενεργεί σε διαφορετικά στιγμιότυπα κάθε εισόδου»
- Για παράδειγμα, μπορεί να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα της ακουστικής αναγνώρισης προτύπων μαζί με το ταυτόχρονο διάβασμα των χειλιών για να πετύχουμε καλύτερη απόδοση στην αναγνώριση προφορικού λόγου.
- Αν όλοι οι ταξινομητές συμφωνούν στο αντίστοιχο πρότυπο τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα

Μετα-επεξεργασία

- Ας υποθέσουμε όμως το αντίθετο
- Πώς θα μπορούσε ένας υπερ-ταξινομητής να εξάγει τις απαραίτητες ενδείξεις από τις διάφορες συνιστώσες ώστε να επιτύχει βέλτιστη απόδοση;
- Φανταστείτε ότι καλείτε δένια ειδικούς στο να καθορίζουν εάν ένα ψάρι είναι άρρωστο ή όχι.
- Ενώ οι εννιά συμφωνούν ότι το συγκεκριμένο ψάρι είναι υγιές ο ένας διαφωνεί
- Ποιος έχει δίκιο;

Μετα-επεξεργασία

- Μπορεί να τύχει ο ένας που διαφωνεί με τους υπόλοιπους να είναι γνώστης πάνω σε πολύ σπάνια συμπτώματα ασθένειας ψαριών.
- Πως όμως ένας ταξινομητής θα μπορεί να λαμβάνει υπόψη του τη μειοψηφία και μάλιστα όταν αυτή εκφράζεται από εξειδικευμένους γνώστες και όχι από κάποιον που έχει γενικά καλές γνώσεις;

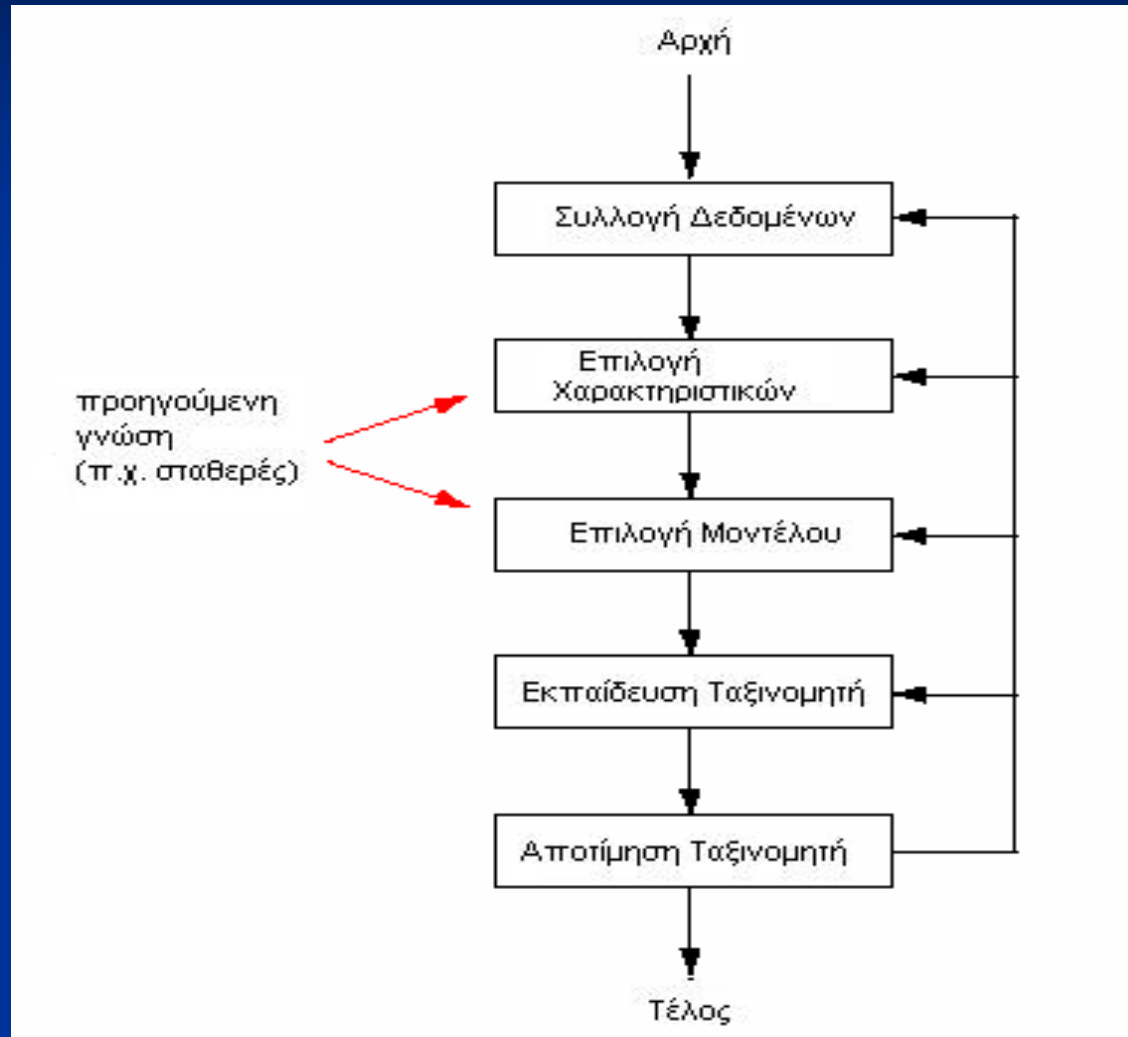
Συμπεράσματα

- Στόχος είναι να δοθεί έμφαση στην πολυπλοκότητα που διέπει τα προβλήματα αναγνώρισης προτύπων και λήψης αποφάσεων και να γίνει σαφές ότι:
 - «Αν δοθεί μια απλή (ή εξειδικευμένη) λύση σε ένα πρόβλημα, η λύση αυτή δεν θα έχει την ικανότητα να επιλύσει και άλλα παρόμοια προβλήματα»
- Γενικά, το να επιτύχει κάποιος καλή απόδοση σε πολύ δύσκολα προβλήματα αναγνώρισης προτύπων (θεωρίας αποφάσεων) απαιτεί ιδιαίτερα καλή διερεύνηση στο πεδίο της εξειδικευμένης γνώσης.

Κύκλος Σχεδίασης

- Ο σχεδιασμός ενός συστήματος αναγνώρισης προτύπων συνήθως συνεπάγεται την επανάληψη των παρακάτω διαφορετικών λειτουργιών:
 - συλλογή δεδομένων
 - επιλογή χαρακτηριστικών
 - επιλογή μοντέλου που τα περιγράφει
 - εκπαίδευση
 - αποτίμηση

Κύκλος Σχεδίασης



Συλλογή Δεδομένων

- Η συλλογή των δεδομένων μπορεί να μετρήσει σημαντικά, αν και ίσως φαίνεται περίεργο, στο συνολικό κόστος σχεδιασμού ενός Συστήματος Αναγνώρισης Προτύπων
- Ο σχεδιασμός μπορεί να δουλέψει και με λίγα δεδομένα το ίδιο καλά, όμως χρειάζονται σίγουρα περισσότερα δεδομένα για να επιτύχουμε μια καλή συνολική απόδοση ενός Συστήματος Αναγνώρισης Προτύπων

Επιλογή Χαρακτηριστικών

- Η επιλογή των διακριτών χαρακτηριστικών είναι όπως είδαμε κρίσιμο βήμα και εξαρτάται από τα γενικότερα χαρακτηριστικά ενός προβλήματος
- Το να έχει κάποιος πρόσβαση σε δεδομένα, όπως για παράδειγμα, εικόνες ψαριών πάνω στον ιμάντα κίνησης, μπορεί σίγουρα να είναι πολύτιμο στην επιλογή του συνόλου των χαρακτηριστικών
- Η **ει των προτέρων** γνώση μπορεί επίσης να παίζει σημαντικό ρόλο
- Στο παράδειγμα διαχωρισμού των ψαριών, η **ει των προτέρων** γνώση για τη φωτεινότητα των διαφορετικών ειδών ψαριών, μπορεί να αποτελέσει ένα πολλά υποσχόμενο χαρακτηριστικό

Επιλογή Μοντέλου

- Μπορεί να μην είμαστε ικανοποιημένοι με την απόδοση του ταξινομητή ψαριών που έχει προκύψει
- Θα πρέπει να υιοθετήσουμε ένα άλλο μοντέλο το οποίο μπορεί να βασίζεται σε μια συνάρτηση άλλων χαρακτηριστικών:
 - του αριθμού και της θέσης των λεπιών
 - του χρώματος των ματιών
 - του βάρους
 - του σχήματος του στόματος κ.ά.

Εκπαίδευση

- Εκπαίδευση του ταξινομητή:
 - «Η διαδικασία της χρησιμοποίησης των δεδομένων για τον καθορισμό του ταξινομητή»
- Όπως είδαμε, όμως, δεν υπάρχουν δυστυχώς καθολικές μέθοδοι επίλυσης αυτών των προβλημάτων που σχετίζονται με το σχεδιασμό των Συστημάτων Αναγνώρισης Προτύπων
- Πάντως αξίζει να αναφερθεί ότι τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια στο χώρο, οι πιο αποδοτικές μέθοδοι για το σχεδιασμό ταξινομητών έχουν να κάνουν με μάθηση από δείγματα προτύπων.

Αποτίμηση

- Όταν από τη χρήση ενός χαρακτηριστικού προτιμήσαμε τη χρήση δύο στο πρόβλημα διαχωρισμού των φαριών, ήταν απολύτως απαραίτητη η αποτίμηση της συχνότητας εμφάνισης λάθους για να δούμε ότι η χρήση ενός χαρακτηριστικού ήταν ανεπαρκής
- Όταν μεταφερθήκαμε από τον ταξινομητή ευθείας γραμμής στον πιο πολύπλοκο (καμπύλη γραμμή) ήταν πάλι η αποτίμηση του λάθους που μας οδήγησε στο ότι μπορούσαμε να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα ταξινόμησης
- Η αποτίμηση είναι λοιπόν, σημαντική όχι μόνο για να μετρήσουμε την απόδοση ενός Συστήματος Αναγνώρισης Προτύπων αλλά και για να αναγνωρίσουμε τη δυνατότητα βελτίωσης της απόδοσης, σχεδιάζοντας έτσι με διαφορετικό τρόπο το Σύστημα Αναγνώρισης Προτύπων

Αποτίμηση

- Ενώ ένα πολύπλοιο σύστημα επιτυγχάνει καλή ταξινόμηση των δειγμάτων εκπαίδευσης, είναι μάλλον απίθανο να έχει την ίδια επιτυχία σε καινούρια πρότυπα (για τα οποία δεν έχει εκπαιδευτεί).
- Η κατάσταση αυτή είναι γνωστή ως **υπερεκπαίδευση** (overfitting).
- Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην στατιστική αναγνώριση προτύπων είναι να καθοριστεί ο τρόπος επιλογής της πολυπλοκότητας του μοντέλου:
 - «...όχι πολύ απλό μοντέλο που να μην μπορεί να διακρίνει τις διαφορές των κατηγοριών, αλλά και όχι πολύ σύνθετο που να μην έχει καλή απόδοση σε άγνωστα, νέα για το σύστημα πρότυπα...»

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Κάποια προβλήματα αναγνώρισης προτύπων μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση αλγορίθμων που είναι όμως **μη πρακτικοί**
- Ενώ θεωρητικά μια συγκεκριμένη τεχνική μπορεί να έχει μηδενικού λάθους ταξινόμηση, ο χρόνος και οι απαιτήσεις σε αποθηκευτικό χώρο μπορεί να είναι απαγορευτικοί
- Γίνεται σαφές ότι πρέπει τέτοια θέματα να παίρνονται σοβαρά υπόψη σε πρακτικά προβλήματα.

Μάθηση και Προσαρμοστικότητα

<https://youtu.be/Ct-100UqmyY>

- Με την ευρεία έννοια κάθε μέθοδος που ενσωματώνει την πληροφορία από τα δείγματα εκπαίδευσης κατά το σχεδιασμό του ταξινομητή έχει να κάνει με τη **μάθηση**.
- Επειδή σχεδόν όλα τα πρακτικά προβλήματα του χώρου είναι πολύ δύσκολα, δε μπορούμε να διαλέξουμε την καλύτερη σχεδίαση **a priori**, και επομένως πρέπει να ξοδέψουμε τον περισσότερο από το χρόνο μας στις διαδικασίες μάθησης
- Η μάθηση αναφέρεται σε κάποιου είδους αλγόριθμο για την ελαχιστοποίηση του λάθους σε κάποιο **δείγμα** του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης

Επιβλεπόμενη Μάθηση

- Ένας επιβλέπων δίνει ένα κόστος ή μια ετικέτα σε κάθε πρότυπο ενός συνόλου εκπαίδευσης και ψάχνει να μειώσει το συνολικό κόστος γι' αυτά τα πρότυπα

Μη επιβλεπόμενη μάθηση

- Στην μη επιβλεπόμενη μάθηση ή αλλιώς ομαδοποίηση (clustering) δεν υπάρχει επιβλέπων και το σύστημα σχηματίζει **συστοιχίες (clusters)** ή «φυσικούς σχηματισμούς ομάδων» πάνω στα δεδομένα εισόδου
- Ο όρος «φυσικούς» ορίζεται πάντα άμεσα ή έμμεσα από το ίδιο το σύστημα και δοθέντος ενός συγκεκριμένου συνόλου προτύπων ή συναρτήσεων κόστους, διαφορετικοί αλγόριθμοι clustering οδηγούν σε διαφορετικά clusters

Ενίσχυση Μάθησης

- Ο πιο συνήθης τρόπος για εκπαίδευση ενός ταξινομητή είναι να βάλουμε μια είσοδο, να υπολογίσουμε την δοκιμαστική του ετικέτα κατηγορίας στην οποία μπορεί να ανήκει και να χρησιμοποιήσουμε την γνωστή ετικέτα κατηγορίας για να βελτιώσουμε τον ταξινομητή
- Για παράδειγμα σε πρόβλημα OCR, η είσοδος μπορεί να είναι μια εικόνα ενός χαρακτήρα (γράμματος ή συμβόλου).
- Η έξοδος του ταξινομητή μπορεί να είναι η κατηγορία με ετικέτα «R» ενώ η επιθυμητή έξοδος να είναι το «B»

Παραδείγματα (1)

- Εάν επιθυμούμε χρησιμοποιώντας ένα μόνο χαρακτηριστικό να κατασκευάσουμε ένα ταξινομητή, ποια θα είναι η μορφή του **διανύσματος των χαρακτηριστικών**;

$[x_1]$

(μία διάσταση)

Παραδείγματα (2)

- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε δύο κατηγορίες με βάση ένα χαρακτηριστικό, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;
- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε τρεις κατηγορίες με βάση ένα χαρακτηριστικό, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;
- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε τέσσερις κατηγορίες με βάση ένα χαρακτηριστικό, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;

Παραδείγματα (3)

- Εάν επιθυμούμε χρησιμοποιώντας δύο χαρακτηριστικά να κατασκευάσουμε ένα ταξινομητή, ποια θα είναι η μορφή του **διανύσματος των χαρακτηριστικών**;

$$[x_1 \ x_2]$$

(δύο διαστάσεις – επίπεδο)

Παραδείγματα (4)

- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε δύο κατηγορίες με βάση δύο χαρακτηριστικά, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;
- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε τρεις κατηγορίες με βάση δύο χαρακτηριστικά, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;
- Εάν έχουμε την περίπτωση ταξινόμησης σε τέσσερις κατηγορίες με βάση δύο χαρακτηριστικά, ποια θα μπορούσε να είναι η μορφή του **ταξινομητή**;

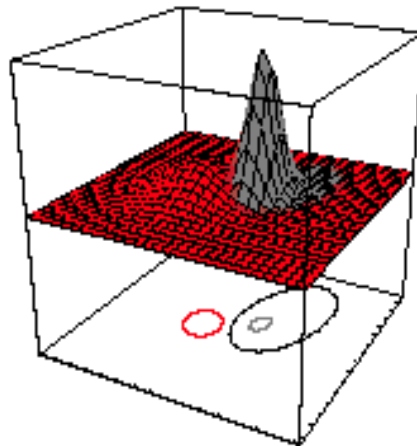
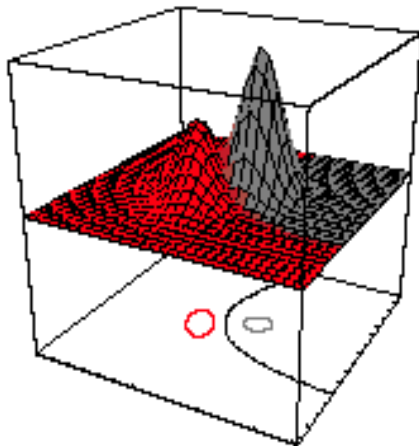
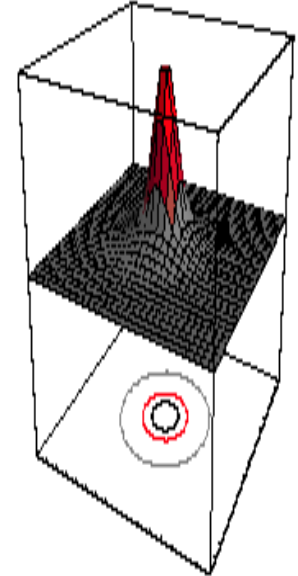
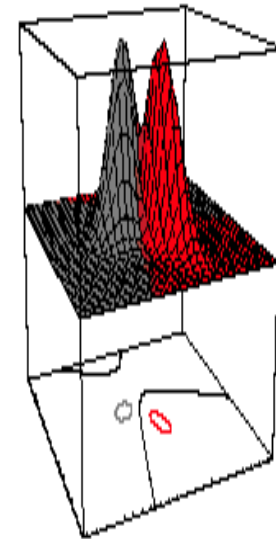
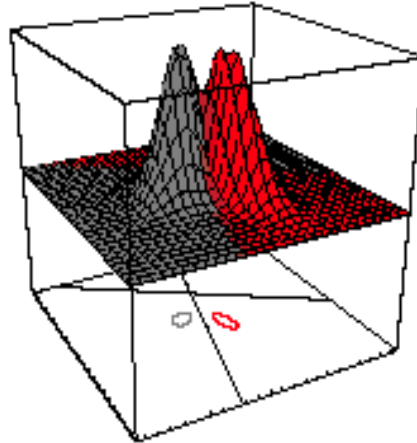
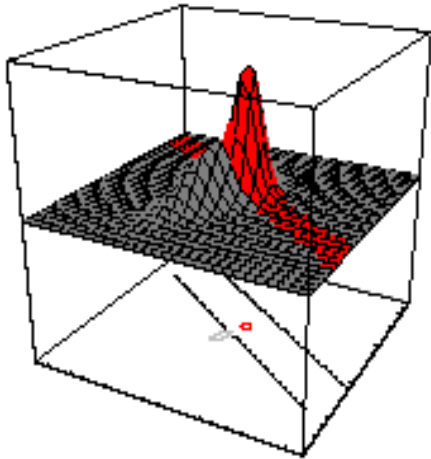
Παραδείγματα (5)

- Έστω ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε κάποια πρότυπα εισόδου με βάση **δύο** χαρακτηριστικά σε **δύο** κατηγορίες, όπου η πρώτη είναι το 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο, ενώ η δεύτερη είναι το 2^ο και το 4^ο τεταρτημόριο
- Ποια θα είναι η μορφή του **ταξινομητή**;

Παραδείγματα (6)

- Έστω ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε κάποια πρότυπα εισόδου με βάση **δύο** χαρακτηριστικά σε **τέσσερις** κατηγορίες, όπου η πρώτη είναι το 1^ο τεταρτημόριο, η δεύτερη είναι το 2^ο τεταρτημόριο, η τρίτη είναι το 3^ο τεταρτημόριο και η τέταρτη είναι το 4^ο τεταρτημόριο
- Ποια θα είναι η μορφή του **ταξινομητή**;

Παραδείγματα (7)



Παραδείγματα (8)

- Εάν επιθυμούμε χρησιμοποιώντας τρία χαρακτηριστικά να κατασκευάσουμε ένα ταξινομητή, ποια θα είναι η μορφή του **διανύσματος των χαρακτηριστικών**;

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]$$

(τρεις διαστάσεις – χώρος)

Παραδείγματα (9)

