

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ-ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΑΣ



# ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

---

## ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3

### ΘΕΜΑ: ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

---

- Γραφήματα
- Αναπαράσταση Γραφημάτων σε Γλώσσες Προγραμματισμού



# ΟΡΙΣΜΟΙ

---

## Διαισθητικός Ορισμός

Γράφημα (graph) είναι ένα μαθηματικό μοντέλο σχέσεων: κάποια στοιχεία ενός προβλήματος συμβολίζονται με κορυφές και η ύπαρξη μιας πλευράς μεταξύ δυο κορυφών συμβολίζει την ύπαρξη μιας σχέσης μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων.



# ΟΡΙΣΜΟΙ

---

## Τυπικός Ορισμός

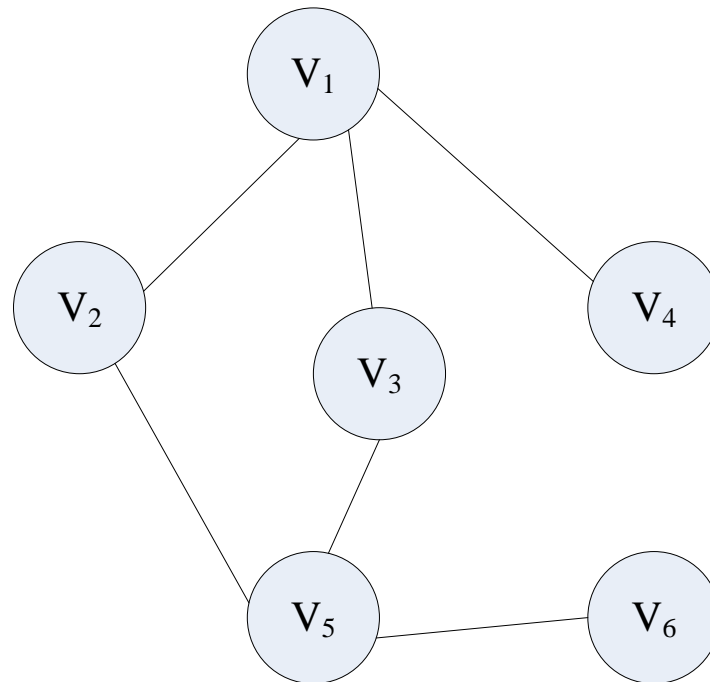
Γράφημα ονομάζουμε ένα ζεύγος πεπερασμένων συνόλων  $G=(V, E)$ , όπου το σύνολο  $V$  περιέχει τις κορυφές ή κόμβους του  $G$ , και το  $E$  τις ακμές ή τόξα ή πλευρές του  $G$ .

- Για τις κορυφές γράφουμε  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών.
- Τα στοιχεία του συνόλου  $E$  θα τα συμβολίζουμε με  $e_{i,j}$  όπου οι δείκτες  $i, j$  θα ανήκουν στο  $\{1, \dots, n\}$ .



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

---



Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής



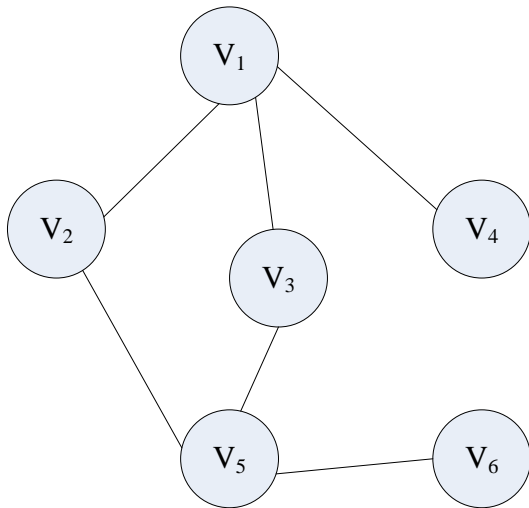
# ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

---

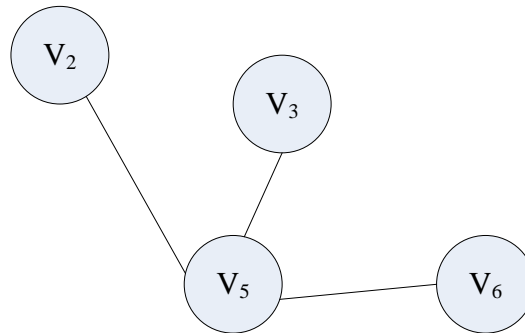
- Πλήρες καλείται ένα γράφημα όταν για κάθε  $i, j$  που ανήκουν στο σύνολο  $\{1, \dots, n\}$  ισχύει  $e_{i,j} \in \{1, \dots, n\}$  .
- Υπογράφημα του  $G=(V, E)$  είναι ένα γράφημα  $G'=(V', E')$  με  $V' \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$  . Αν  $V'=V$  τότε το  $G'$  λέγεται γεννητικό υπογράφημα του  $G$ .

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

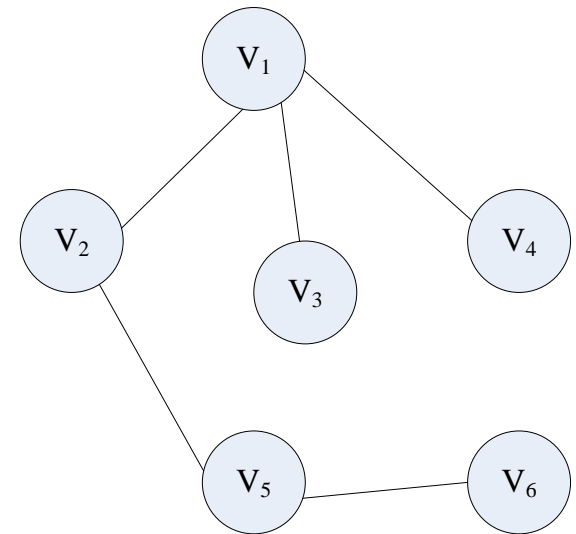
**Γράφημα**



**Υπογράφημα**



**Γεννητικό υπογράφημα**





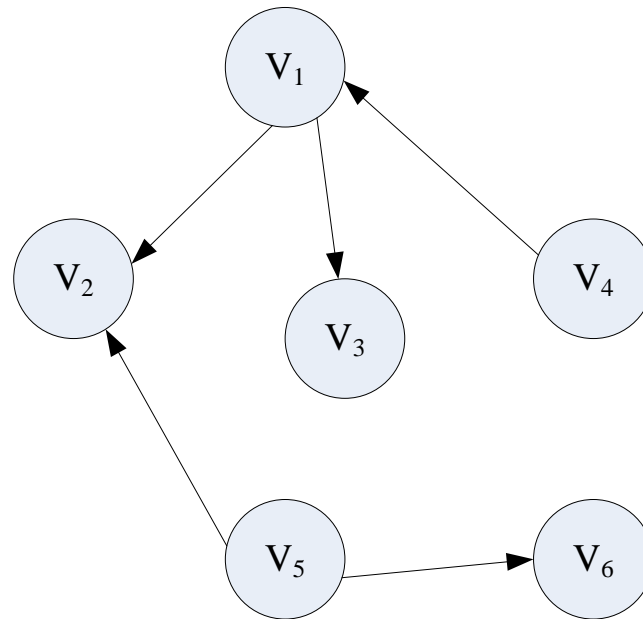
# ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

---

- Αν για κάποιο ζεύγος  $(i, j)$  υπάρχει  $e_{i,j} \in E$  τότε λέμε ότι **υπάρχει πλευρά από την κορυφή  $V_i$  στην κορυφή  $V_j$** . Τότε οι κορυφές  $V_i$  και  $V_j$  λέγονται **γειτονικές ή προσκείμενες**, ενώ η πλευρά  $e_{i,j}$  λέμε ότι **συντρέχει** στην κορυφή  $V_i$  και  $V_j$ . Πλευρές που συντρέχουν στην ίδια κορυφή καλούνται **γειτονικές ή προσκείμενες**.
- **Διευθυνόμενο γράφημα** (directed graph) ή **διγράφημα** (digraph) καλείται ένα γράφημα όπου όλες οι πλευρές έχουν κατεύθυνση που συμβολίζεται με ένα βέλος. Αν υπάρχει η διευθυνόμενη πλευρά  $e_{i,j}$  που συνδέει τις κορυφές  $V_i$  και  $V_j$  τότε μπορούμε να πάμε από τη  $V_i$  στη  $V_j$  όχι όμως και το ανάποδο.
- Όταν μιλούμε για γράφημα εννοούμε μη διευθυνόμενο.



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ



Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής



## ΒΑΘΜΟΣ

---

- **Βαθμός** μιας κορυφής είναι το πλήθος των πλευρών που συνδέουν την κορυφή αυτή με άλλες. Για διγράφηματα **βαθμός εισόδου** μιας κορυφής είναι ο αριθμός πλευρών που φτάνουν στην κορυφή και **βαθμός εξόδου** ο αριθμός πλευρών που φεύγουν από κορυφή.
- **Άθροισμα βαθμών εισόδου = Άθροισμα βαθμών εξόδου = Αριθμός πλευρών γραφήματος**



# ΔΙΑΔΡΟΜΗ

---

## Ορισμός διαδρομής:

Μια ακολουθία όπως η  $\{V_3, e_{3,7}, V_7, e_{7,6}, V_6, e_{6,8}, V_8\}$  ή  $\{e_{3,7}, e_{7,6}, e_{6,8}\}$  ή  $\{V_3, V_7, V_6, V_8\}$  που αρχίζει με κορυφή, τελειώνει με κορυφή και ανάμεσα σε δυο κορυφές περιέχει πλευρά που τις ενώνει λέγεται διαδρομή από την πρώτη προς την τελευταία κορυφή.

- Σε γράφημα υπάρχει διαδρομή και προς τις δυο κατευθύνσεις, ενώ σε διγράφημα μπορεί να υπάρχει η μια κατεύθυνση, αλλά όχι και η άλλη.
- Σε μια διαδρομή μπορεί να επανεμφανίζεται η ίδια κορυφή, όχι όμως η ίδια πλευρά.



# ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

---

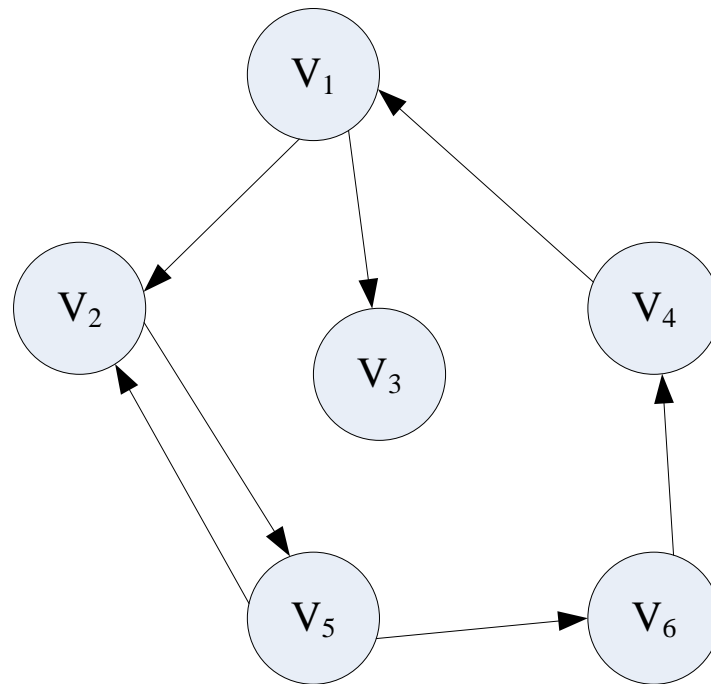
## Ορισμός:

Ένα μη διευθυνόμενο γράφημα καλείται συνεκτικό, όταν για οποιοσδήποτε δυο κορυφές του υπάρχει διαδρομή που τις ενώνει.

## Είδη συνεκτικότητας διγραφημάτων:

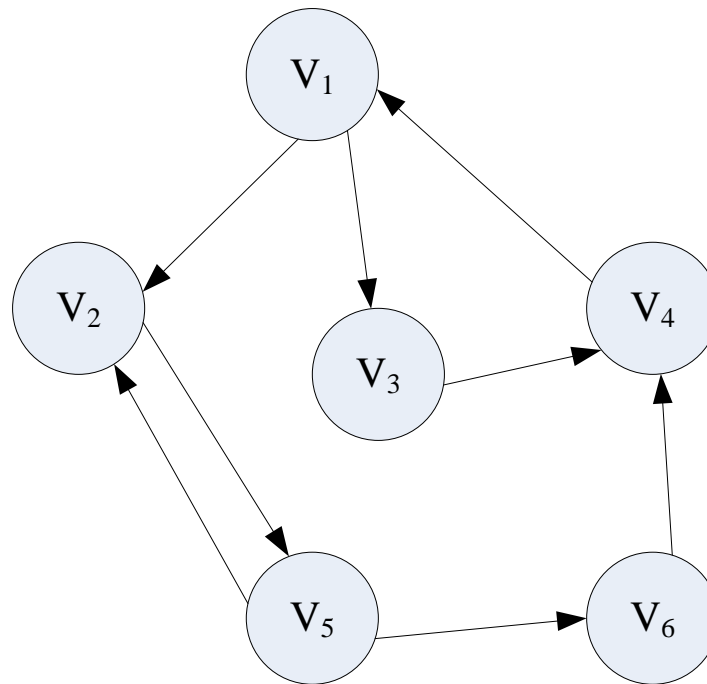
- **Μονομερώς συνεκτικό** λέγεται ένα διγράφημα, όταν υπάρχει διαδρομή προς τη μια ή την άλλη κορυφή για οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών.
- **Ισχυρά συνεκτικό** λέγεται ένα διγράφημα αν για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει διαδρομή και προς τις δυο κατευθύνσεις.
- **Ασθενώς συνεκτικό** ή απλά συνεκτικό λέγεται ένα διγράφημα αν για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει μια ημιδιαδρομή μεταξύ τους.

# ΜΟΝΟΜΕΡΩΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΔΙΓΡΑΦΗΜΑ



Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής

# ΙΣΧΥΡΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΔΙΓΡΑΦΗΜΑ



Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος  
Αναπληρωτής Καθηγητής



## ΟΡΙΣΜΟΙ

---

- **Μήκος** μιας διαδρομής καλείται το πλήθος των πλευρών της.
- **Απλή** είναι μια διαδρομή, όταν όλες οι κορυφές είναι διαφορετικές, εκτός πρώτης και τελευταίας.
- **Κύκλος** καλείται μια διαδρομή, όταν υπάρχουν πάνω από μια διαφορετικές κορυφές και η πρώτη συμπίπτει με την τελευταία.
- **Κύκλωμα** λέγεται ένας κύκλος που σχηματίζεται από διευθυνόμενες πλευρές.
- Ένα διγράφημα χωρίς κυκλώματα λέγεται **άκυκλο**. Ένα άκυκλο γράφημα είναι **δέντρο**.



## ΟΡΙΣΜΟΙ

---

- **Διαδρομή Euler** είναι μια διαδρομή που περιέχει όλες τις πλευρές ενός γραφήματος, μια φορά καθεμιά. **Διαδρομή Hamilton** είναι μια απλή διαδρομή που περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος και μόνο μια φορά.
- **Απόσταση** μεταξύ δυο κορυφών είναι το ελάχιστο μήκος μεταξύ των διαδρομών που τις συνδέουν.
- **Διάμετρος** ενός γραφήματος είναι η μεγιστη απόσταση για όλα τα δυνατά ζεύγη κορυφών.
- Αν αντιστοιχώ πληροφορίες στις κορυφές ή πλευρές ενός γραφήματος, τότε το γράφημα λέγεται **δίκτυο**. Τότε μιλάμε για κόμβους και τόξα, αντί για κορυφές και πλευρές.





# ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

---

- Πίνακας Γειτονικότητας  $C$
- Λίστες Γειτονικότητας  $LI$



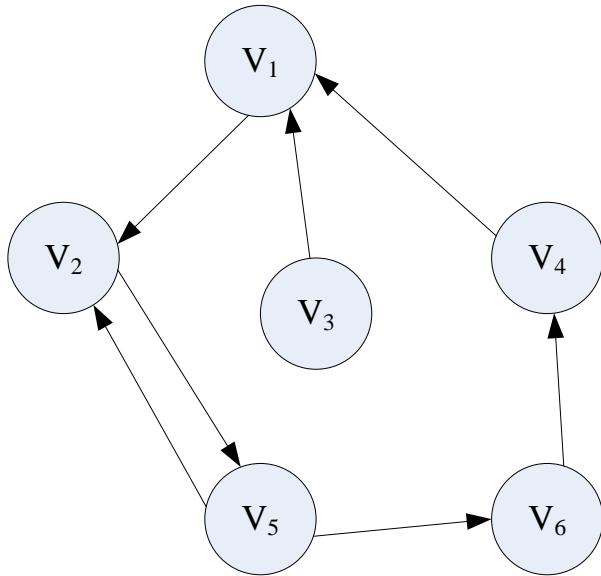
# ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

---

- Διάσταση πίνακα:  $n \times n$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.
- Στοιχεία πίνακα:  $C(i, j) = 1$  αν  $e_{i,j} \in E$ , αλλιώς 0.
- Όταν υπάρχει συνάρτηση κόστους  $c$ , δηλαδή σε κάθε πλευρά  $e_{i,j} \in E$  αντιστοιχεί αριθμός  $c(i, j)$ , τότε  $C(i, j) = c(i, j)$  για  $e_{i,j} \in E$ . Αν  $e_{i,j} \notin E$  τότε  $C(i, j) = \infty$  για  $i \neq j$ ,  $e_{i,j} \notin E$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΗ

Γράφημα

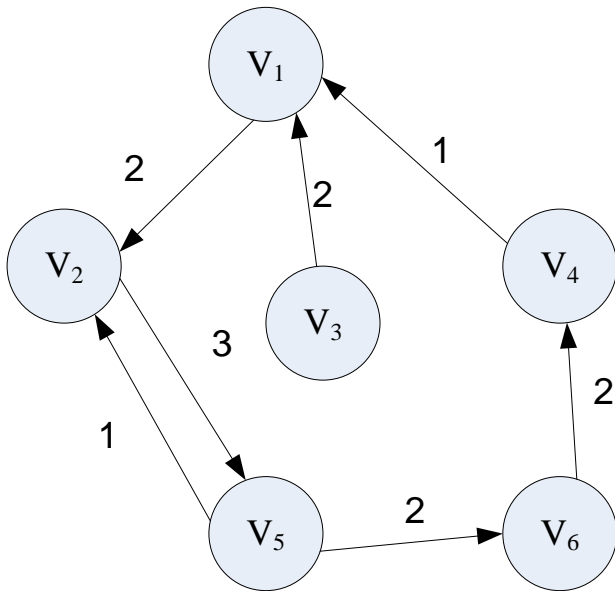


Πίνακας Γειτονικότητας  $C$

$C$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΙΝΑΚΑ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ

Γράφημα



Πίνακας Γειτονικότητας  $C$

$C$	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$
3	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$



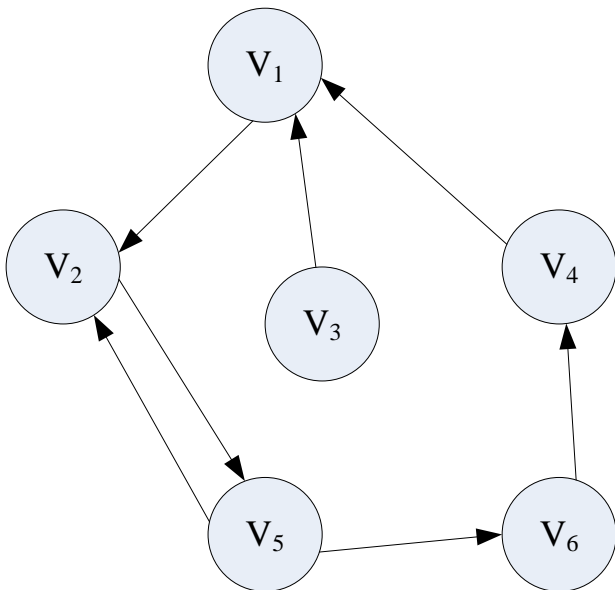
## ΛΙΣΤΕΣ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

---

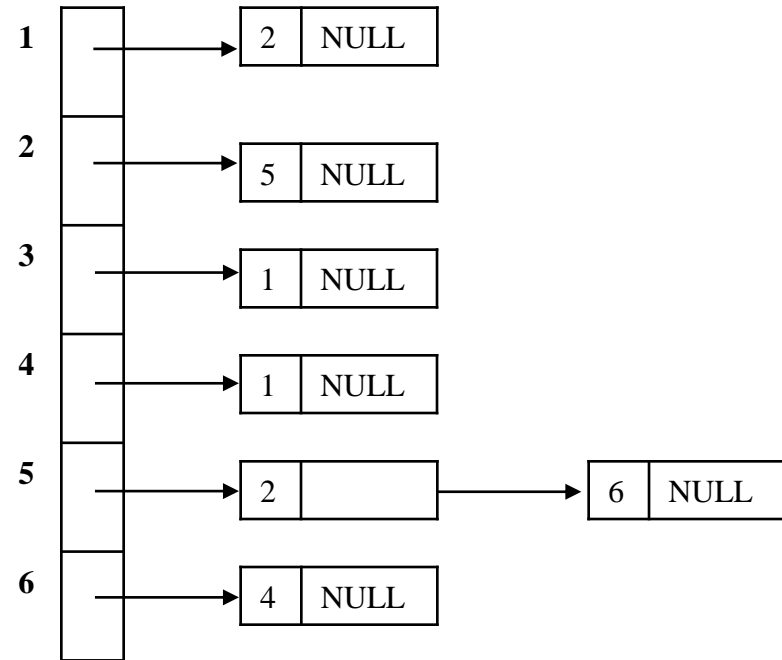
- Σε κάθε κορυφή  $V$  αντιστοιχεί μια συνδεδεμένη λίστα με τον επικεφαλής δείκτη να είναι  $ΛΓ(i)$ .
- Τα υπόλοιπα στοιχεία της λίστας συμβολίζονται με το ζεύγος  $(node, link)$  όπου  $node$  ο δείκτης κορυφής που συνδέεται με  $V_i$ , δηλαδή  $node=j$  αν υπάρχει  $e_{i,j} \in E$  και  $link$  ο δείκτης που συνδέει με το επόμενο στοιχείο της λίστας.
- Για γραφήματα με κόστη στις πλευρές τα υπόλοιπα στοιχεία της λίστας συμβολίζονται με το ζεύγος  $(node, c(e), link)$  όπου  $c(e)$  το κόστος της πλευράς που συνδέει τη  $V_i$  με  $V_{node}$ .

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΙΣΤΑΣ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΧΩΡΙΣ ΚΟΣΤΗ

Γράφημα

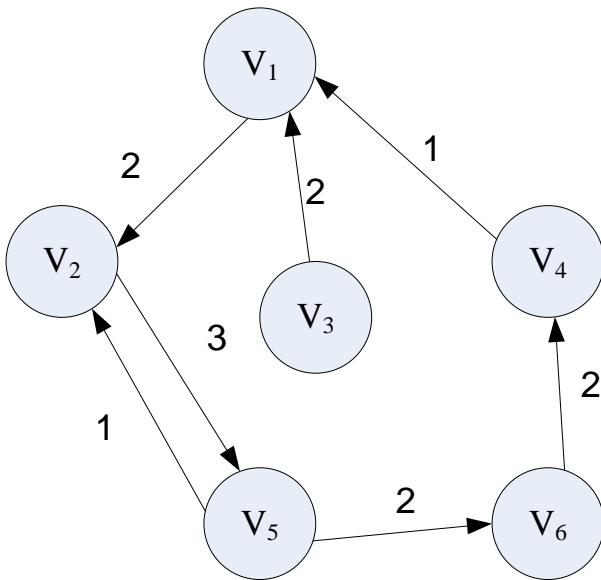


Λίστα Γειτονικότητας  $ΛΓ$



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΙΣΤΑΣ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΚΟΣΤΗ

Γράφημα



Λίστα Γειτονικότητας  $ΛΓ$

