ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ-ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΑΣ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΘΕΜΑ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Π.Μ.Ο.-Π.Χ.Π.

Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

- Διαδοχική Αναζήτηση

- Δυαδική Αναζήτηση

ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ

Πρόβλημα

Δίνονται ο φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n}$, τα $\boldsymbol{n}$ στοιχεία $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ και ένα στοιχείο $\boldsymbol{x}$ του ίδιου τύπου με τα $\boldsymbol{x_i}$. Ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει το $\boldsymbol{x}$ στη λίστα των $\boldsymbol{n}$ στοιχείων και να επιστραφεί η θέση του σε αυτή ή ο αριθμός 0 αν δεν υπάρχει.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Αλγόριθμος Διαδοχικής Αναζήτησης

Είσοδος: $n \geq 1$**,** πίνακας ***L*** μήκους ***n*** με $\boldsymbol{L(i)=x_i}$,όπου ***i*=1..*n*,** και στοιχείο ***x***.

Έξοδος: θέση ***j*** στον πίνακα ***L*** αν ***L*(*j*)=*x***, αλλιώς ***j*=0**.

Ψευδοκώδικας:

```
j=1
while (j<=n) and (L(j)!=x) do
    j=j+1
end
if (j>n) then j=0
exit j
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πρόβλημα

Δίνονται ο φυσικός αριθμός 10, τα 10 στοιχεία 5, 6, 8, 11, 0, 3, 7, 0, 100, 29 και ο αριθμός 11. Ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει το 11 στη λίστα των 10 στοιχείων και να επιστραφεί η θέση του σε αυτή ή ο αριθμός 0 αν δεν υπάρχει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1:

5	6	8	11	0	3	7	0	100	29

j=1
11 != 5

Βήμα 2:

5	6	8	11	0	3	7	0	100	29

j=2
11 != 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 3:

5	6	8	11	0	3	7	0	100	29

$\longrightarrow$

j=3
11 != 8

Βήμα 4:

5	6	8	11	0	3	7	0	100	29

$\longrightarrow$

j=4
11 = 11

Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΧΠ(n)

Πολυπλοκότητα Χειρότερης Περίπτωσης:

Στη χειρότερη περίπτωση η επανάληψη θα εκτελεστεί ***n*** φορές. Αυτό συμβαίνει είτε όταν το ***x*** δεν είναι στη λίστα είτε όταν ***x*=*L*(*n*)**.

Βασική πράξη: Σύγκριση

Στη χειρότερη περίπτωση εκτελούνται n συγκρίσεις. Επομένως:

ΠΧΠ(*n*)=*n* συγκρίσεις

ΠΜΟ(n)

Γενικός Κανόνας

Για να βρω την Πολυπλοκότητα Μέσου Όρου πρέπει να

- θεωρήσω όλες τις **δυνατές περιπτώσεις τερματισμού** και να
- υπολογίσω την **πιθανότητα** που υπάρχει να **συμβεί η καθεμιά**.

Γενικά οι πιθανότητες θα δίνονται. Αν $\boldsymbol{\Pi_i}$ είναι η ***i***-στη περίπτωση τερματισμού τότε πρέπει να ισχύει $\sum_{\Pi_i} p(\Pi_i) = 1$

ΠΜΟ(n)

Αν η ***i***-στη περίπτωση τερματισμού $\boldsymbol{\Pi_i}$ ενός αλγορίθμου απαιτεί την εκτέλεση $\boldsymbol{t(\Pi_i)}$ εντολών και συμβαίνει με πιθανότητα $\boldsymbol{p(\Pi_i)}$ τότε η **ΠΜΟ(*n*)** του αλγορίθμου θα είναι:

$$\mathrm{\Pi MO(n)} = \sum_{\Pi_\mathrm{i}} p(\Pi_\mathrm{i})t(\Pi_\mathrm{i})$$

ΠΜΟ(n) ΔΙΑΔΟΧΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Υπόθεση: Έστω ότι η πιθανότητα να είναι το $\boldsymbol{x}$ στη λίστα είναι $\boldsymbol{q}$ και όλες οι περιπτώσεις όπου $\boldsymbol{x=L(i)}$ είναι ισοπίθανες.

Βήματα:

1. Υπάρχουν $\boldsymbol{n+1}$ περιπτώσεις τερματισμού ($\boldsymbol{n}$ περιπτώσεις επιτυχίας και **1** περίπτωση αποτυχίας).

- Περιπτώσεις επιτυχίας $\boldsymbol{\Pi_i}$ με $\boldsymbol{i=1,..,n}$: ισχύει ότι $\boldsymbol{x=L(i)}$ με πιθανότητα $\boldsymbol{p(\Pi_i)=q/n}$.
- Περίπτωση αποτυχίας $\boldsymbol{\Pi_{n+1}}$: ισχύει ότι $\boldsymbol{x}$ δεν είναι σε λίστα με πιθανότητα $\boldsymbol{1-q}$.

ΠΜΟ(n) ΔΙΑΔΟΧΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

2. Ελέγχω αν ισχύει $\sum_{\Pi_i} p(\Pi_i) = 1$

Πράγματι $\sum_{i=1}^{n} p(\Pi_i) + 1 - q = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} + 1 - q = 1$

3. Ισχύει ότι $\boldsymbol{t(\Pi_i)=i,\ i=1,..,n}$ και $\boldsymbol{t(\Pi_{n+1})=n}$.

Επομένως: $\Pi\text{MO}(\text{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} i + (1-q)n = \frac{(n+1)q}{2} + (1-q)n$

ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ

Πρόβλημα

Δίνονται ο φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n}$, τα $\boldsymbol{n}$ διατεταγμένα στοιχεία με αύξουσα σειρά $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ και ένα στοιχείο $\boldsymbol{x}$ του ίδιου τύπου με τα $\boldsymbol{x_i}$. Ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει το $\boldsymbol{x}$ στη λίστα των $\boldsymbol{n}$ στοιχείων και να επιστραφεί η θέση του σε αυτή ή ο αριθμός 0 αν δεν υπάρχει.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Αλγόριθμος Δυαδικής Αναζήτησης

Είσοδος: $n \geq 1$**,** πίνακας ***L*** μήκους ***n*** με ***L*(*i*)=*x*$_i$** και $L(1) \leq \ldots \leq L(n)$ όπου ***i*=1..*n*,** και στοιχείο ***x***.

Έξοδος: θέση ***j*** στον πίνακα ***L*** αν ***L*(*j*)=*x***, αλλιώς ***j*=0**.

Ψευδοκώδικας:

```
k=0
m=n
while (k<=m) do
    j=(k+m)/2
    if x=L(j) then return j
    if x<L(j) then m=j-1 else k=j+1
end
return j=0
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πρόβλημα

Δίνονται ο φυσικός αριθμός 10, τα 10 στοιχεία 5**,** 6, 8, 11, 12, 30, 70, 90, 100, 129 και ο αριθμός 11. Ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει το 11 στη λίστα των 10 στοιχείων και να επιστραφεί η θέση του σε αυτή ή ο αριθμός 0 αν δεν υπάρχει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 1:

5	6	8	11	12	30	70	90	100	129

→ k=0

j=5
11 < 12

← m=10

Βήμα 2:

5	6	8	11	12	30	70	90	100	129

→ k=0

j=2
11 > 6

← m=4

Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βήμα 3:

5	6	8	11	12	30	70	90	100	129

→ ←

k=3
j=3
11>8

m=4

Βήμα 4:

5	6	8	11	12	30	70	90	100	129

⇄

m=4
k=4
j=4
11=11

Δρ. Δημήτριος Κ. Κουκόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΧΠ(n)

Χειρότερη Περίπτωσης: Το ***x*** δεν είναι στη λίστα ή το ***x*** βρίσκεται, αφού φτάσω σε υπολίστα με 1 στοιχείο.

Βασική πράξη: Σύγκριση

Κάθε σύγκριση ανάγει το πρόβλημα στην αναζήτηση του στοιχείου ***x*** σε λίστα μισού μεγέθους σε σχέση με την προηγούμενη.

Επειδή, όμως $n=2^p$ στη χειρότερη περίπτωση θα γίνουν ***p=logn*** διασπάσεις της αρχικής λίστας. Επομένως, θα γίνουν ***logn*** συγκρίσεις. Επομένως:

ΠΧΠ(n)=1+ $\lfloor \log n \rfloor$ **συγκρίσεις**

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Υπάρχουν $\boldsymbol{n}$ περιπτώσεις επιτυχίας $\boldsymbol{E_i}$ με $\boldsymbol{i=1,..,n}$ και $\boldsymbol{n+1}$ περιπτώσεις αποτυχίας $\boldsymbol{A_i}$ με $\boldsymbol{i=1,...,n+1}$.

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

A. ***Υποθέσεις***:

1. Έστω ότι οι ***n*** περιπτώσεις επιτυχίας έχουν συνολική πιθανότητα ***q*** και είναι μεταξύ τους ισοπίθανες: $\boldsymbol{p(E_i)=q/n,\ i=1,..,\ n}$

2. Δεχόμαστε ότι οι $\boldsymbol{n+1}$ περιπτώσεις αποτυχίας είναι μεταξύ τους ισοπίθανες: $\boldsymbol{p(A_i)=(1-q)/(n+1),\ i=1,..,\ n+1}$.

Από τύπο έχω:

$$\Pi\text{MO}(\text{n}) = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} p(\text{E}_\text{i})t(\text{E}_\text{i}) + \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}+1} p(\text{A}_\text{i})t(\text{A}_\text{i}) = \frac{\text{q}}{n}\sum_{i=1}^{n} t(\text{E}_\text{i}) + \frac{1-q}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} t(\text{A}_\text{i})$$

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Πρέπει να βρω τα $\boldsymbol{t(E_i)}$ και $\boldsymbol{t(A_i)}$ για κάθε περίπτωση.

Απλοποίηση: $\boldsymbol{n=2^r-1}$ για φυσικό αριθμό $\boldsymbol{r > 0}$.

Μοντελοποίηση:

1. Όλες οι διαδρομές που πιθανόν να ακολουθήσει ο αλγόριθμος δίνονται από ένα πλήρες δυαδικό δέντρο βάθους $\boldsymbol{d = r - 1}$, όπου ο $\boldsymbol{j}$-στος κόμβος περιέχει δείκτη στη σύγκριση του $\boldsymbol{L(j)}$ με το $\boldsymbol{x}$.

2. Ένα αριστερό κλαδί ακολουθείται αν $\boldsymbol{x < L(j)}$, αλλιώς ακολουθείται το δεξί κλαδί. Ο αλγόριθμος τερματίζει στον κόμβο $\boldsymbol{j}$, αν $\boldsymbol{x=L(j)}$.

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

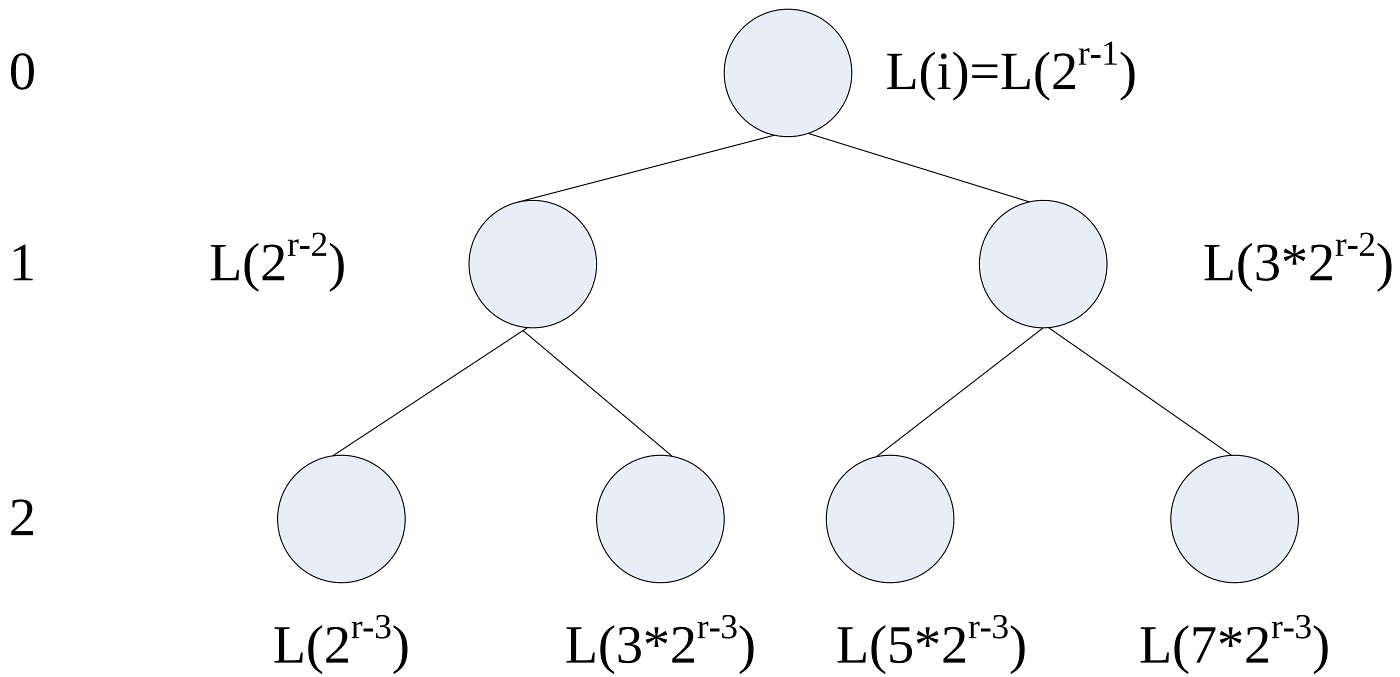
3. Οι περιπτώσεις αποτυχίας διαπιστώνονται μετά από τελευταία σύγκριση.

4. Οποιαδήποτε διαδρομή από τη ρίζα στο τελευταίο επίπεδο περνά από $\boldsymbol{d}$**+1=**$\boldsymbol{r}$ κόμβους. Επομένως, έχουμε $\boldsymbol{t(A_i)=r}$ συγκρίσεις για κάθε περίπτωση αποτυχίας.

5. Η περίπτωση επιτυχίας $\boldsymbol{E_i}$ διαπιστώνεται, όταν γίνει η σύγκριση σε κόμβο $\boldsymbol{i}$.

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Επίπεδα



ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Περιπτώσεις Επιτυχίας:

1. Υπάρχει μια περίπτωση που απαιτεί 1 σύγκριση (i=(n+1)/2).
2. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις που απαιτούν 2 συγκρίσεις η καθεμιά (i=(n+1)/4 και i=3(n+1)/4).
3. Γενικά σε όλα τα επίπεδα $\boldsymbol{k=0,\ldots,d}$ υπάρχουν 2^k δείκτες $\boldsymbol{i}$, δηλαδή $\boldsymbol{2^k}$ περιπτώσεις $\boldsymbol{E_i}$ που απαιτούν $\boldsymbol{k+1}$ συγκρίσεις η καθεμιά.

Επομένως:

$$\sum_{i=1}^{n} t(\mathrm{E_i}) = \sum_{k=0}^{r-1}(k+1)2^k = \sum_{j=1}^{r} j2^{j-1} = (r-1)2^r + 1$$

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Περιπτώσεις Αποτυχίας:

Είδαμε ότι ***t(A$_i$)=r***, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n+1} t(\mathrm{A_i}) = (n+1)r$

Επομένως: $\Pi\mathrm{MO}(\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{n}}[(r-1)2^r + 1] + \frac{1-q}{n+1}[(n+1)r]$

Όμως $r = \lfloor \log n \rfloor + 1$

Οπότε $\Pi\mathrm{MO}(\mathrm{n}) = \lfloor \mathrm{logn} \rfloor + \lfloor \mathrm{logn} \rfloor \frac{q}{n} + (1-q) + \frac{q}{n} = \mathrm{O}(\lfloor \mathrm{logn} \rfloor)$

ΠΜΟ(n) ΔΥΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ

Αν όλες οι **2n+1** περιπτώσεις είναι ισοπίθανες τότε $\mathbf{p(E_i)=q/n=1/(2n+1)}$ και $\mathbf{p(A_i)=(1-q)/(n+1)=1/(2n+1)}$

Οπότε, $\Pi MO(n) = \frac{1}{2} + \lfloor \log n \rfloor$