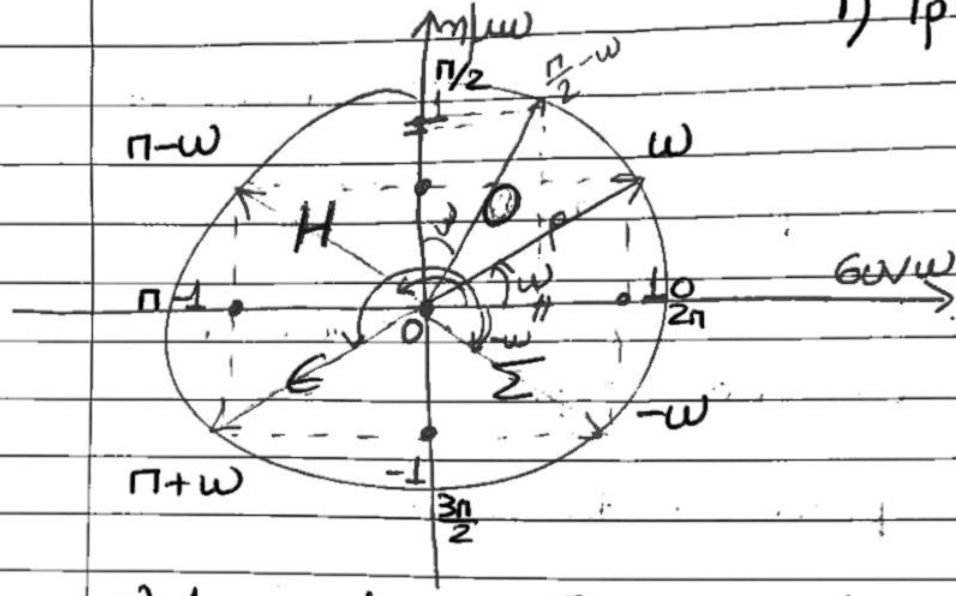
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1) Τριγωνομετρικός κ...



2) Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο !

$ημ(π-ω) = ημω$	$ημ(π+ω) = -ημω$
$συν(π-ω) = -συνω$	$συν(π+ω) = -συνω$
$εφ(π-ω) = -εφω$	$εφ(π+ω) = εφω$
$σφ(π-ω) = -σφω$	$σφ(π+ω) = σφω$

$$ημ\left(\frac{π}{2}-ω\right) = συνω$$

$$συν\left(\frac{π}{2}-ω\right) = ημω$$

$$εφ\left(\frac{π}{2}-ω\right) = σφω$$

$$σφ\left(\frac{π}{2}-ω\right) = εφω$$

3) Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$, • $σφω = \dfrac{1}{εφω}$
- $ημ^2ω + συν^2ω = 1$, • $ημ2ω = 2ημω \cdot συνω$,
- $συν2ω = \begin{cases} 2συν^2ω - 1 \\ 1 - 2ημ^2ω \\ συν^2ω - ημ^2ω \end{cases}$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1) Τι είναι ρίζα ενός πολυωνύμου.

2) Τι είναι βαθμός πολυωνύμου.

3) Τι σημαίνει 2 πολυώνυμα είναι ίσα.
(και παράδειγμα).

4) Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων

5) Να λυθεί το πολυώνυμο:

$$x^3-3x^2-4x+12=0$$

πιθ ρίζες: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

1	−3	−4	12	2
↓	2	−2	−12	
1	−1	−6	$\boxed{0}$	

Άρα: $(x-2)(x^2-x-6)=0$

↳ Εδώ με διακρίνουσα

Δηλ. $(x-2)(x-3)(x+2)=0$

Άρα: $x=2$ ή $x=3$ ή $x=-2$

6) Τι σημαίνει διπλή ρίζα για ένα πολυώνυμο.

7) Τι είναι ο παράγοντας ενός πολυωνύμου.

Περιττή: $f(-x) = -f(x)$

3) <u>Μετατοπίσεις</u>: • Όταν $g(x) = f(x) + c$.

Αν $c > 0$ κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω.

Αν $c < 0$ κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω.

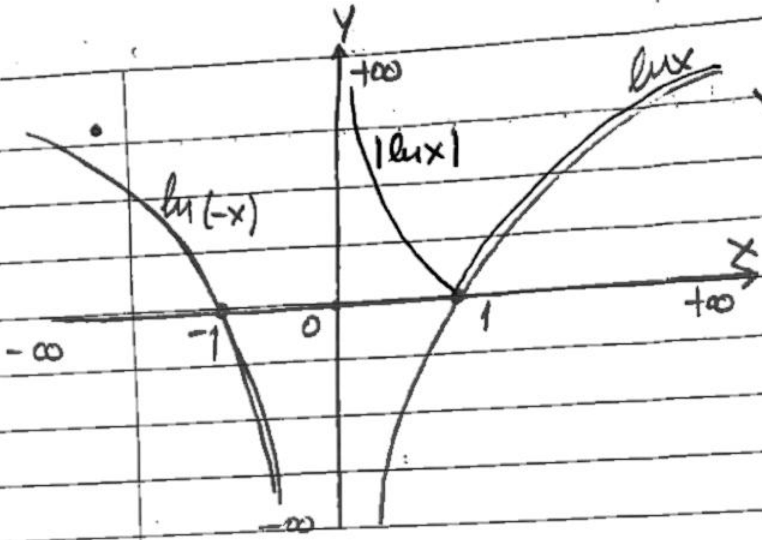
• Όταν $g(x) = f(x+c)$

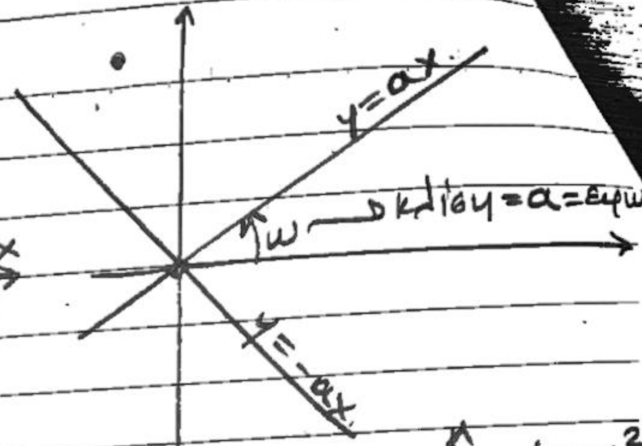
Αν $c > 0$ οριζόντια μετατόπιση προς αριστερά.

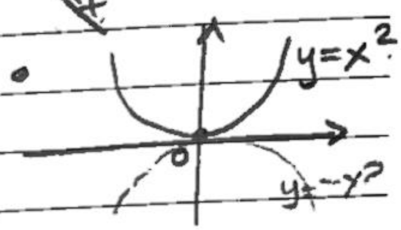
Αν $c < 0$ οριζόντια μετατόπιση προς δεξιά.

4) <u>Παράγωγοι συναρτήσεων</u>.

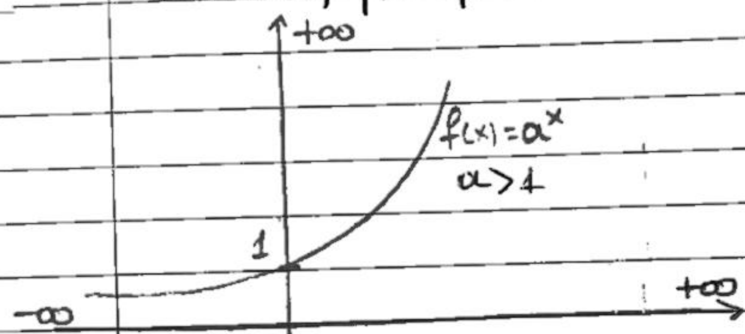
- $f(x) = x^{\kappa} \longrightarrow f'(x) = \kappa \cdot x^{\kappa-1}$
- $f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \neq 0$
- $f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.
- $f(x) = ημx \longrightarrow f'(x) = συνx$
- $f(x) = συνx \longrightarrow f'(x) = -ημx$
- $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$.
- $f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.





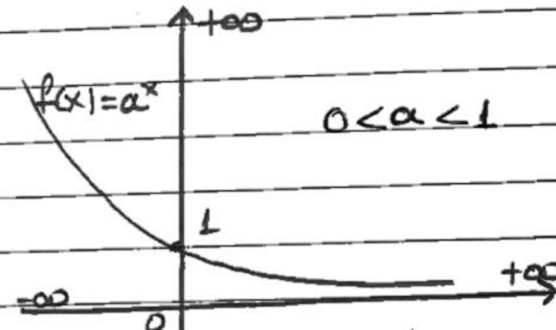


- Εκθετική με όρια



$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

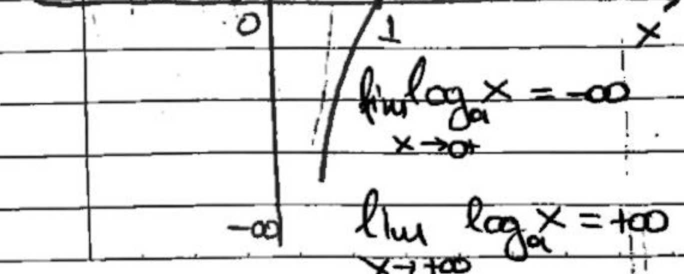
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

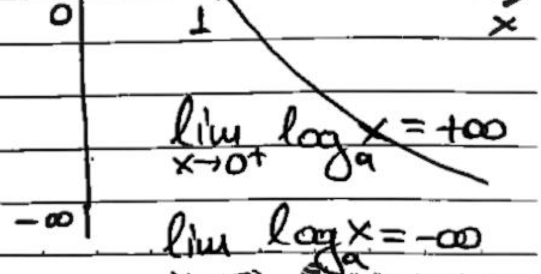
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

- Λογαριθμική με όρια



$\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$



$\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

Πράξεις Με Ολοκληρώματα

① $\int\left(\frac{5}{x}-\sqrt{x}+3e^x-2^x\right)dx = ;\ ,\ x>0$

Λύση

Έχω: $\int\left(\frac{5}{x}-\sqrt{x}+3e^x-2^x\right)dx = \int\frac{5}{x}dx-\int\sqrt{x}dx$

$+\int 3e^x dx-\int 2^x dx =$

$=5\int\frac{1}{x}dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int e^x dx-\int 2^x dx=$

$=5\ln x-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+3e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+c=$

$=5\ln x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+3e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+c=$

$=5\ln x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+3e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+c$

② Ολοκλήρωμα της μορφής: $\int f(\alpha x+\beta)\cdot dx$

$\int\left[(5x+2)^4+\eta\mu(3x)\right]dx = ;$

Λύση

- $\int(\alpha x+\beta)^\nu dx=\frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha x+\beta)^{\nu+1}}{\nu+1}$
- $\int\eta\mu(\alpha x+\beta)dx=-\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)}{\alpha}$
- $\int\frac{1}{\alpha x+\beta}dx=\frac{\ln|\alpha x+\beta|}{\alpha}+c$

έχω: $\int\left[(5x+2)^4+\eta\mu(3x)\right]dx=\int(5x+2)^4dx+\int\eta\mu(3x)$

$=\frac{(5x+2)^5}{5\cdot 5}-\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3}+c=\frac{(5x+2)^5}{25}-\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3}+c.$

4) Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων.

- $\eta\mu\alpha = \eta\mu\omega \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\kappa\pi + \omega \\ \text{ή}, \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\kappa\pi + \pi - \omega \end{cases}$

- $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\kappa\pi + \omega \\ \text{ή}, \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2\kappa\pi - \omega \end{cases}$

- $\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow \alpha = \kappa\pi + \omega, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

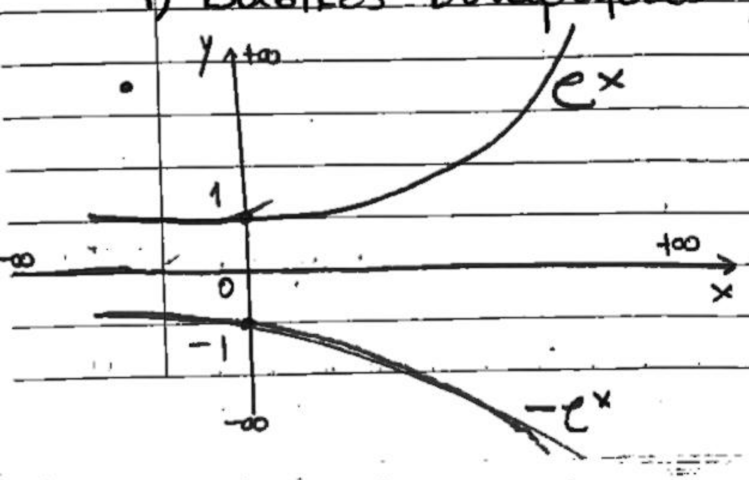
→ (και παράδειγμα) π.χ. $2 = 4\eta\mu 2x \Rightarrow$
$\frac{1}{2} = \eta\mu 2x \Rightarrow$

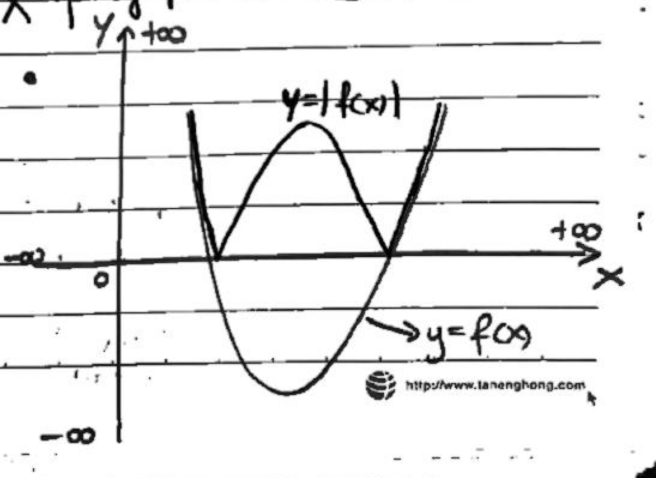
$\Rightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \ \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$ ....

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

→ Τι είναι το πεδίο ορισμού και τι το σύνολο τιμών μιας [redacted] συνάρτησης.

1) Βασικές συναρτήσεις χάραξη.

- 

- 

No. Date

Άσκηση

<u>Έστω</u>: $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 5$

και

$Q(x) = 4x^2 + 7x - 4$. <u>Να βρεθούν</u>

α) $P(x) - Q(x) = (-2x^3 + 3x^2 + x - 5) - (4x^2 + 7x - 4)$

$= -2x^3 + 3x^2 + x - 5 - 4x^2 - 7x + 4$

$= -2x^3 - x^2 - 6x - 1.$

β) $P(x) \cdot Q(x) = (-2x^3 + 3x^2 + x - 5)(4x^2 + 7x - 4)$

$= -8x^5 - 14x^4 + 8x^3 + 12x^4 + 21x^3 - 12x^2 + 4x^3 + 7x^2 - 4$
$-20x^2 - 35x + 20$

$= -8 \cdot x^5 - 2 \cdot x^4 + 33x^3 - 25x^2 - 39x + 20.$

<u>Άσκηση για Σπίτι:</u>

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

α) $-2P(0) + 5P(-1) =$

$-2 \cdot (0^3 - 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 12) + 5 \cdot [(-1)^3 - 3(-1)^2 - 4(-1) + 12]$

$= -2 \cdot (12) + 5(-1 - 3 + 4 + 12) = -24 + 5 \cdot 12 =$

$= -24 + 60$

$= 36.$

5) <u>Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων</u>

- $\left(f^{\alpha}(x)\right)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$ • $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$.
- $\left(\eta\mu f(x)\right)' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$ • $\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
- $\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$ • $\left(\sigma\varphi f(x)\right)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$
- $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ • $\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x)$
- $\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ • $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$

6) <u>Ολοκληρώματα</u>

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha).$$ → Εμβαδόν χωρ

- $\int_{\alpha}^{\beta} dx = [x]_{\alpha}^{\beta}$ • $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)_{\alpha}^{\beta}$ • $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\kappa}\,dx = \left(\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right)_{\alpha}^{\beta}$.
- $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\,dx = (\eta\mu x)_{\alpha}^{\beta}$ • $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx = (-\sigma\upsilon\nu x)_{\alpha}^{\beta}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = (\varepsilon\varphi x)_{\alpha}^{\beta}$ • $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = (-\sigma\varphi x)_{\alpha}^{\beta}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}\,dx = (e^{x})_{\alpha}^{\beta}$. • $\int_{\kappa}^{\lambda} \alpha^{x} = \left(\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}\right)_{\kappa}^{\lambda}$