Άσκηση 1

A. Δίνεται ο 2×2 πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ και ο 2x3 πίνακας $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 10 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν, αν ορίζονται, οι πίνακες $A^2, A^T, B^T, AB, BA, A^T B, B^T B+BB^T$, όπου με A^T, B^T συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A και του πίνακα B αντίστοιχα. Στην περίπτωση που δεν ορίζονται οι πίνακες να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B. Να βρεθούν οι τιμές των a,b, ώστε να ισχύει $A+BC=D$ αν

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 10 & 2 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}a & 2\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 7 & b\end{pmatrix} \text{ και } D=\begin{pmatrix}36 & \frac{5}{2}\\ -47 & 25\end{pmatrix}.$$

C. Δίνεται ο πίνακας $X=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

i) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα X.

ii) Είναι ο πίνακας X αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τον X^{-1} με κατάλληλες γραμμοπράξεις.

D. Για την ορίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & x & -3\\ 5 & 2 & x\end{vmatrix}$, να βρεθούν όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται.

Απαντήσεις της 1ης άσκησης

A.

$$A^2=\begin{pmatrix}-5 & 10\\ -15 & 10\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}0 & 10\\ 1 & 2\\ 5 & -2\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 1 \\ 40 & 5 & -23 \end{pmatrix}$$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων B και A δεν γίνεται γιατί ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα B δεν είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα A.

$$A^T B = \begin{pmatrix} -30 & -5 & 11 \\ 40 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $B^T B$ είναι 3×3 και ο πίνακας BB^T είναι 2×2, άρα το άθροισμα $B^T B + BB^T$ δεν ορίζεται.

Β. Υπολογίζουμε πρώτα το πρώτο μέλος της σχέσης $A + BC = D$ και έχουμε:

$$A + BC = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} + 5b \\ 10a - 17 & 25 - 2b \end{pmatrix}$$

Για να ισχύει η ζητούμενη σχέση πρέπει:

$$A + BC = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} + 5b \\ 10a - 17 & 25 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & \frac{5}{2} \\ -47 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} 36 = 36 \\ \frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \\ 10a - 17 = -47 \\ 25 - 2b = 25 \end{array}$$

Από τη σχέση $\frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2}$ έχουμε: $\frac{5}{2} + 5b = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5b = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5b = 0 \Leftrightarrow b = 0$

Από τη σχέση $10a - 17 = -47$ έχουμε: $10a = -47 + 17 \Leftrightarrow 10a = -30 \Leftrightarrow a = -3$

Η σχέση $25 - 2b = 25$ επαληθεύεται για $b = 0$

Άρα η σχέση $A + BC = D$ ισχύει για $a = -3$ και $b = 0$.

C.

i)

$$\det(X)=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 5\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 4\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-3\times 10-(-24)=-30+24=-6$$

ii) Επειδή η ορίζουσα του πίνακα X είναι διάφορη του μηδενός, όπως προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα, ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος.

Για την εύρεση του αντιστρόφου του πίνακα X ακολουθούμε τη διαδικασία απαλοιφής. Δημιουργούμε αρχικά τον πίνακα

$\left(X\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Με κατάλληλες γραμμοπράξεις θα δημιουργήσουμε τον πίνακα $\left(I\middle|Y\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & Y\\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$, οπότε ο ζητούμενος αντίστροφος X^{-1} του πίνακα X θα είναι ο $X^{-1}=Y$.

οπότε $X^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3}\\ -4 & \frac{5}{2} & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

D.

$\Delta=x^2+6-5x=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ οπότε όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται είναι $x=2, x=3$.

Άσκηση 2

Α. Δίδονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ και $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$.

i. Να δικαιολογήσετε ποιοί από τους παραπάνω πίνακες είναι κλιμακωτοί και ποιοί δεν είναι.

ii. Όποιος από τους παραπάνω πίνακες δεν είναι κλιμακωτός να γίνει κλιμακωτός και στη συνέχεια να γίνει ανηγμένος κλιμακωτός με κατάλληλες γραμμοπράξεις.

Απαντήσεις της 2ης άσκησης

Α. i.

Σύμφωνα με τον ορισμό του κλιμακωτού πίνακα:

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός γιατί το οδηγό στοιχείο (το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο) της $2^{ης}$ γραμμής δεν είναι τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της $1^{ης}$ γραμμής.

Ο πίνακας $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι κλιμακωτός γιατί τα οδηγά στοιχεία της $2^{ης}$ και της $3^{ης}$ γραμμής δεν είναι τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Ο πίνακας $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός γιατί τα οδηγά στοιχεία της $2^{ης}$ και της $3^{ης}$ γραμμής είναι τουλάχιστον μια θέση δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της αντίστοιχης προηγούμενης γραμμής.

ii.

Ένας κλιμακωτός πίνακας του A είναι:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow -2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A είναι:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{14} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένας κλιμακωτός πίνακας του B είναι:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftarrow 2r_1+r_3]{r_2 \leftarrow -4r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow -\frac{3}{2}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του B είναι:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός.

Άσκηση 3

Α. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0\\
x_2 + 2x_3 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

i. Να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

ii. Να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Cramer ή μέθοδο των οριζουσών

Β. Να υπολογίσετε την πραγματική παράμετρο α, ώστε το γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 4\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6\\
5x_1 + 5x_2 - x_3 &= 15 + \alpha
\end{aligned}
$$

να έχει άπειρες λύσεις. Να δοθεί η λύση του συστήματος για την τιμή της παραμέτρου α που υπολογίσατε.

Απαντήσεις της 3ης άσκησης

Α. i)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0\\
x_2 + 2x_3 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ το άγνωστο διάνυσμα και $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ το σταθερό διάνυσμα, το αρχικό μας σύστημα γράφεται στη μορφή

$Ax = b$, δηλαδή $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα $\left(A|b\right)$ και με γραμμοπράξεις δημιουργούμε μια κλιμακωτή μορφή του.

$$
\left(A|b\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \textbf{...} \quad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) = \left(K|c\right)
$$

Η λύση του συστήματος $Ax = b$ είναι ισοδύναμη με τη λύση του συστήματος $Kx = c$, όπου

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ και } c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Έτσι,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Kx = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε την λύση του συστήματος, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) Η λύση του συστήματος με Cramer με ορίζουσες προκύπτει η ίδια.

B.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 &= 15 + \alpha \end{aligned}$$

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ το άγνωστο διάνυσμα

και $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 + \alpha \end{pmatrix}$ το σταθερό διάνυσμα, το αρχικό μας σύστημα γράφεται στη μορφή $Ax = b$,

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 15+\alpha \end{pmatrix}.$$

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα $\left(A|b\right)$ και τον κάνουμε κλιμακωτό.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 5 & 5 & -1 & 15+\alpha \end{array}\right) \;\textbf{....} \rightarrow \textbf{....}\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\alpha \end{array}\right)$$

Οπότε το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 5x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 0x_3 &= -1+\alpha \end{aligned}$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση έχουμε:

Για $-1+\alpha \neq 1$, δηλαδή για $\alpha \neq 1$, η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατη.
Για $\alpha = 1$, η τρίτη εξίσωση γίνεται $0x_3 = -1+\alpha \Rightarrow 0x_3 = -1+1 \Rightarrow 0x_3 = 0$, η οποία επαληθεύεται για κάθε x_3 πραγματικό αριθμό. Έστω $x_3 = t$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$x_2 = \frac{3}{5}t - \frac{2}{5}$$

Από την πρώτη παίρνουμε:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t + \frac{18}{5} \\ \frac{3}{5}t - \frac{2}{5} \\ t \end{pmatrix}$$