Άσκηση 1

A. Δίνεται ο 2×2 πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ και ο 2x3 πίνακας $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 10 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν, αν ορίζονται, οι πίνακες $A^2, A^T, B^T, AB, BA, A^T B, B^T B + BB^T$, όπου με A^T, B^T συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A και του πίνακα B αντίστοιχα. Στην περίπτωση που δεν ορίζονται οι πίνακες να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B. Να βρεθούν οι τιμές των a,b, ώστε να ισχύει $A+BC=D$ αν

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 10 & 2 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}a & 2\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 7 & b\end{pmatrix} \text{ και } D=\begin{pmatrix}36 & \frac{5}{2}\\ -47 & 25\end{pmatrix}.$$

C. Δίνεται ο πίνακας $X=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

i) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα X.

ii) Είναι ο πίνακας X αντιστρέψιμος; Αν ναι, υπολογίστε τον X^{-1} με κατάλληλες γραμμοπράξεις.

D. Για την ορίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & x & -3\\ 5 & 2 & x\end{vmatrix}$, να βρεθούν όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται.

Άσκηση 2

A. Δίδονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 14 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ και $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix}$.

i. Να δικαιολογήσετε ποιοί από τους παραπάνω πίνακες είναι κλιμακωτοί και ποιοί δεν είναι.
ii. Όποιος από τους παραπάνω πίνακες δεν είναι κλιμακωτός να γίνει κλιμακωτός και στη συνέχεια να γίνει ανηγμένος κλιμακωτός με κατάλληλες γραμμοπράξεις.

Άσκηση 3

A. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

i. Να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.
ii. Να λυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Cramer ή μέθοδο των οριζουσών

B. Να υπολογίσετε την πραγματική παράμετρο α, ώστε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 &= 15 + \alpha \end{aligned}$$

να έχει άπειρες λύσεις. Να δοθεί η λύση του συστήματος για την τιμή της παραμέτρου α που υπολογίσατε.