

Άσκηση 1.1

Το απλούστερο σύστημα για το οποίο μπορούμε να εξάγουμε την ενέργεια Helmholtz A συναρτήσει των κανονικών της μεταβλητών (N, V, T) είναι αυτό των ιδανικών μονο-ατομικών αερίων. Ο υπολογισμός θα γίνει στα επόμενα μαθήματα και καταλήγει στην παρακάτω εξίσωση:

$$A(N, V, T) = -Nk_B T \ln \left(\frac{V}{N\Lambda^3} \right) - Nk_B T$$

όπου

$$\Lambda = \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2}$$

Η ποσότητα Λ έχει μονάδες μήκους και είναι γνωστή ως το θερμικό μήκος κύματος. Επίσης, h είναι η σταθερά του Planck, k_B η σταθερά του Boltzmann και m η μάζα του κάθε μορίου.

Από την γνώση της συνάρτησης $A(N, V, T)$ να υπολογίσετε τις υπόλοιπες σημαντικές θερμοδυναμικές συναρτήσεις ενός οποιουδήποτε συστήματος ιδανικών μονο-ατομικών αερίων συναρτήσει των μεταβλητών (N, V, T) . Για παράδειγμα: 1) την εσωτερική ενέργεια U , 2) το χημικό δυναμικό μ , 3) την πίεση P , 4) την ενθαλπία H , 5) την ενέργεια Gibbs G , 6) την ειδική γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο $C_{V,m}$, και 7) την ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση $C_{P,m}$.

Να δικαιολογήσετε τις εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσετε.

Να συζητήσετε τα τελικά αποτελέσματα.

Άσκηση 1.2

Ένα ακόμα φυσικό σύστημα για το οποίο θα εξάγουμε στο μάθημα την ενέργεια Helmholtz A συναρτήσει των κανονικών της μεταβλητών (N, V, T) είναι και αυτό ενός κρυσταλλικού υλικού. Και εδώ, ο υπολογισμός θα γίνει σε επόμενα μαθήματα, και θα καταλήξει στην παρακάτω εξίσωση:

$$A = -Nu_0 - 3Nk_B T \ln \left(\frac{e^{h\nu/2k_B T}}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \right)$$

όπου u_0 η ενέργεια/μόριο εξάχνωσης του κρυστάλλου (αριθμητική σταθερά).

α) Να υπολογίσετε την ειδική γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο $C_{V,m}$ του κρυστάλλου ως συνάρτηση των μεγεθών (N, V, T) και να την παραστήσετε γραφικά ως προς τη θερμοκρασία T (υπό σταθερά N και V). Πώς εκφυλίζεται η αντίστοιχη εξάρτηση στο όριο των μικρών ($T \rightarrow 0\text{K}$) και μεγάλων ($T \rightarrow \infty$) θερμοκρασιών?

β) Σε ένα δεύτερο στάδιο, προσπαθήστε να γράψετε την εξίσωση που εξάγατε για τη σχέση $C_{V,m} = C_{V,m}(T; V, N)$ σε όρους ανηγμένων μεγεθών κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής θερμοκρασίας $\frac{h\nu}{k_B} = \theta_E$ του κρυστάλλου (γνωστή και ως θερμοκρασία Einstein). Να κάνετε και το αντίστοιχο διάγραμμα $C_{V,m} = C_{V,m}(T; V, N)$ σε όρους ανηγμένων μεγεθών.