

## ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2

### Άσκηση 2.1

Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή αναστροφής,  $\hat{i}$ , η δράση του οποίου έχει ως αποτέλεσμα την αντικατάσταση  $x \rightarrow -x$ : (α)  $x^3 - kx$ , (β)  $\cos kx$ , (γ)  $x^2 + 3x + 1$ . Προσδιορίστε, κατά περίπτωση, τις ιδιοτιμές του  $\hat{i}$ .

### Άσκηση 2.2

Η κυματοσυνάρτηση του τροχιακού  $2p_y$  του ατόμου του υδρογόνου είναι η  $\psi_{2p_y} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} r e^{-r/2} \sin \theta \sin \phi$ . Δείξτε ότι κυματοσυνάρτηση  $\psi_{2p_y}$  είναι κανονικοποιημένη.

Χρήσιμες σχέσεις:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a}$$

### Άσκηση 2.3

Όπως ίσως γνωρίζετε, χρειάζονται περίπου 1000 τόνοι τρινιτροτολουόλης (TNT) για να παραχθεί η εκρηκτική ενέργεια που περιέχεται σε ένα μόνο κιλό πυρηνικού καυσίμου. Στην πρώτη περίπτωση, πρόκειται για χημική αντίδραση στην οποία συμμετέχουν τα ατομικά ηλεκτρόνια ενώ στη δεύτερη για μια πυρηνική διαδικασία, όπου λαμβάνουν μέρος τα πυρηνικά σωματίδια. Να εξηγηθεί το γεγονός ότι τα σωματίδια του πυρήνα είναι περίπου  $10^6$  φορές πιο “ενεργόφορα” από τα ηλεκτρόνια με βάση το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται σε μια περιοχή διαστάσεων ενός Angstrom ( $=10^{-10}$  m) ενώ τα νουκλεόνια είναι παγιδευμένα σε έναν όγκο ακτίνας μόλις ενός Fermi ( $=10^{-15}$  m).

Δίνονται: Μάζα ηλεκτρονίου:  $m_e = 9,108 \times 10^{-31}$  kg

Μάζα πρωτονίου:  $m_p = 1,672 \times 10^{-27}$  kg

### Άσκηση 2.4

Η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου μάζας  $m$  που κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας  $r$  στο επίπεδο  $xy$  (σωματίδιο-σε-δακτύλιο) είναι:

$$\psi(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im_l \phi} \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή (μέση τιμή) της γωνιακής στροφορμής,  $\langle L_z \rangle$ , του σωματιδίου.

Ο τελεστής της γωνιακής στροφορμής κατά μήκος του άξονα- $z$  σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{d}{d\phi} \right)$$

### Άσκηση 2.5

Να χρησιμοποιηθεί το “μοντέλο του ελεύθερου ηλεκτρονίου” (σωματίδιο σε κιβώτιο) για τον υπολογισμό της πρώτης ηλεκτρονιακής μετάπτωσης (από τη θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση) του μορίου του εξατριενίου ( $\text{CH}_2=\text{CH}-\text{CH}=\text{CH}-\text{CH}=\text{CH}_2$ ). Θεωρήστε ότι το πρόκειται για γραμμικό μόριο με μήκος 867 pm.

### **Άσκηση 2.6**

Οι κυματοσυναρτήσεις ενός σωματιδίου που κινείται σε μονοδιάστατο κιβώτιο δίνονται από τη σχέση:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο πρώτο ένα δέκατο (από  $x=0$  μέχρι  $x=L/10$ ) του κιβωτίου για  $n=1, 2$  και  $3$ ;

Χρήσιμο ολοκλήρωμα:  $\int \sin^2(cx) dx = \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{4c}\right) \sin(2cx)$

### **Άσκηση 2.7**

Δίνεται η κατάσταση υπέρθεσης  $\psi = N(\psi_1 + 2\psi_2 + \psi_3)$  όπου  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  είναι οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις κάποιου φυσικού μεγέθους  $A$  με ιδιοτιμές  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0$  και  $\alpha_3 = 1$ .

(α) Να βρεθεί ο συντελεστής κανονικοποίησης,  $N$ .

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή  $\langle A \rangle$  και η αβεβαιότητα  $\Delta A$  του μεγέθους  $A$ .