ΦΥΣΙΚΟΧΗΜΕΙΑ Ι

Ασκήσεις

Ενότητα 6
Περιστροφική Κίνηση

Δημήτρης Κονταρίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής

Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Εφαρμογές

Περιστροφική κίνηση

Άσκηση 1

Η κυματοσυνάρτηση $\psi(\varphi)$ για την κίνηση σωματιδίου σε δακτύλιο είναι της μορφής $\psi = Ne^{im_l\phi}$. Να προσδιοριστεί η σταθερά κανονικοποίησης N.

Η απαίτηση είναι: $\int \psi^* \psi d\tau = 1$

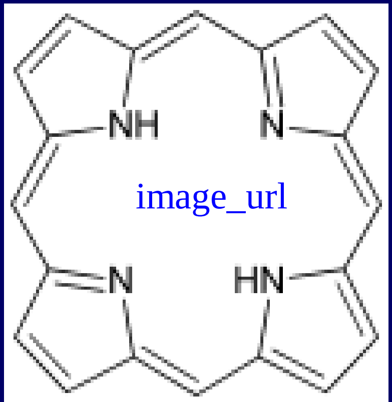
Για κίνηση σε δακτύλιο και πολικές συντεταγμένες:

$$\int_0^{2\pi} N^2 e^{-im_l\phi} e^{im_l\phi} d\phi = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} N^2 d\phi = 2\pi N^2 = 1 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Άσκηση 2

Το μοντέλο του **σωματιδίου σε δακτύλιο** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της κίνησης των ηλεκτρονίων στο δακτυλιοειδές μόριο της **πορφυρίνης**.



Έστω ότι τα **22 π** ηλεκτρόνια του μορίου κινούνται σε δακτύλιο με ακτίνα ίση με εκείνη του μορίου (**440 pm**). Θεωρώντας ότι στη θεμελιώδη κατάσταση του μορίου κάθε στάθμη καταλαμβάνεται από 2 ηλεκτρόνια, να υπολογιστούν:

(α) Η ενέργεια και η τροχιακή στροφορμή ενός ηλεκτρονίου στην υψηλότερη κατειλημμένη στάθμη.

(β) Η συχνότητα και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που απαιτείται για τη διέγερση ενός ηλεκτρονίου από την υψηλότερη κατειλημμένη στη χαμηλότερη μη κατειλημμένη στάθμη.

$$\psi_{m_l}(\phi) = \frac{e^{im_l\phi}}{(2\pi)^{1/2}}$$

$$m_l = \pm\frac{(2IE)^{1/2}}{\hbar}$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots$$

$$E_{m_l} = \frac{m_l^2\hbar^2}{2I}$$

$$J_z = m_l\hbar$$

$$\boxed{\text{(β)} \quad \nu = 5,2\times10^{14}\ \text{Hz} \qquad \lambda = 570\ \text{nm}}$$

Άσκηση 3

Να προσδιοριστούν οι τιμές ενέργειας και συνολικής στροφορμής για τα 4 χαμηλότερα ενεργειακά επίπεδα ενός σωματιδίου μάζας m, το οποίο κινείται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα r. Πόσες καταστάσεις αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση;

Η ενέργεια και η στροφορμή είναι κβαντωμένες και οι τιμές τους δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = \ell(\ell+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad J = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

$$I = mr^2 \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

Για κάθε ενεργειακή στάθμη υπάρχουν $2\ell+1$ τιμές για το m_l και, επομένως, ο εκφυλισμός είναι $g = 2l+1$

Άσκηση 3

Να προσδιοριστούν οι τιμές ενέργειας και συνολικής στροφορμής για τα 4 χαμηλότερα ενεργειακά επίπεδα ενός σωματιδίου μάζας m, το οποίο κινείται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα r. Πόσες καταστάσεις αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση;

Η ενέργεια και η στροφορμή είναι κβαντωμένες και οι τιμές τους δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = \ell(\ell+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad J = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \qquad g = 2l+1$$

$$I = mr^2 \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

l	$E/(\hbar^2/2I)$	$J/\hbar$	m_l	g
0	0	0	0	1
1	2	$\sqrt{2}$	$0, \pm 1$	3
2	6	$\sqrt{6}$	$0, \pm 1, \pm 2$	5
3	12	$\sqrt{12}$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$	7

Άσκηση 4

Η κατάσταση ενός στερεού στροφέα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\Phi(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\cos\theta-c\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

(α) Να κανονικοποιηθεί η $\Phi(\theta,\varphi)$

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να παρατηρήσουμε το σύστημα σε μία κατάσταση που αντιστοιχεί στους κβαντικούς αριθμούς $l=1$, $m_l=0$.

Η $\Phi(\theta,\varphi)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο σφαιρικών αρμονικών

$$\Phi(\theta,\phi)=\frac{1}{2}Y_{1,0}+c\,Y_{1,1}$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει ότι:

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή:

$$P_{1,0}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=25\%$$

Οι σφαιρικές αρμονικές

image_url

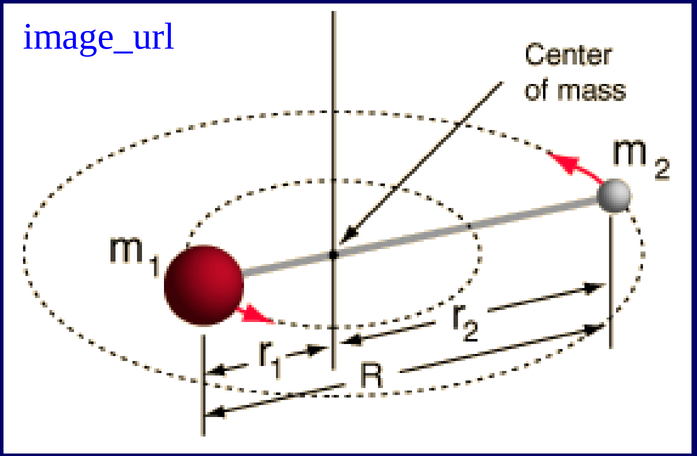
l	m_l	$Y_{l,m_l}(\theta,\varphi)$
0	0	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$
1	0	$\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta$
	±1	$\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$
2	0	$\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2}(3\cos^2\theta-1)$
	±1	$\mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2}\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$
	±2	$\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$
3	0	$\left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$
	±1	$\mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$
	±2	$\left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta\, e^{\pm 2i\phi}$
	±3	$\mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2}\sin^3\theta\, e^{\pm 3i\phi}$

Άσκηση 5

Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας ενός “άκαμπτου στροφέα” (rigid rotator) δίνεται από τη σχέση

$$I = \mu r^2$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα του.



Κέντρο μάζας: $$m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad (1)$$

Ροπή αδρανειας: $$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad (2)$$

$$r_1 = r - r_2 \xrightarrow{(1)} m_1(r - r_2) = m_2 r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

$$r_2 = r - r_1 \xrightarrow{(1)} m_1 r_1 = m_2(r - r_1) \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

$$I = m_1\left(\frac{m_2 r}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1 r}{m_1 + m_2}\right)^2 = \underbrace{\boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}}_{\mu} r^2 \underbrace{\boxed{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)}}_{1} = \mu r^2$$

Άσκηση 6

Όταν το διατομικό μόριο $^{12}C^{32}S$ περιστρέφεται, δημιουργεί ενεργειακό φάσμα το οποίο μπορεί να μετρηθεί. Να υπολογιστούν:

(α) Οι επιτρεπτές τιμές της ενέργειας ενός τέτοιου συστήματος

(β) Το μήκος του δεσμού του μορίου, αν η γραμμή απορρόφησης για τη ενεργειακά χαμηλότερη μετάπτωση ($E_0 \rightarrow E_1$) εμφανίζεται σε συχνότητα 48991 MHz .

Δίνονται:

$m(^{12}\mathrm{C}) = 12$ amu

$1 \text{ amu} = 1{,}66054 \times 10^{-27}$ kg

$m(^{32}\mathrm{S}) = 31{,}97$ amu

$\hbar = 1{,}05457 \times 10^{-34}$ J s

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.0.

Σημείωμα αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2172/

Σημείωμα αδειοδότησης