

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

Δ. ΚΟΥΖΟΥΔΗΣ - Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

Περιεχόμενα

1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB.....	6
Ηλεκτρικό φορτίο.....	6
Ηλεκτρόνια.....	7
Φορτίο - Μονάδες	9
Αγωγοί – Μονωτές.....	9
Ο Νόμος του Coulomb	13
Δύναμη μεταξύ μη σημειακών φορτίων	18
Προβλήματα	19
2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ	21
Ορισμός του Πεδίου	21
Ηλεκτρικό Πεδίο	22
Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου για πηγές με απλή γεωμετρία	26
α) Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου	27
β) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου λεπτού δακτυλίου.....	28
γ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους	29
δ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων.....	32
Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου σε πιο σύνθετες γεωμετρίες	36
Προβλήματα	37
3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS.....	40
Δυναμικές Γραμμές.....	40
Ηλεκτρική Ροή.....	44
Ο Νόμος του Gauss	46
α) Φορτισμένη συμπαγής σφαίρα.....	46
β) Φορτισμένη κοίλη σφαίρα	49
γ) Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων.....	49
δ) Φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων	51
ε) Επίπεδος Πυκνωτής	52
Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου στο εσωτερικό των Αγωγών.....	53
Προβλήματα	57
4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ.....	61
Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια	61

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

Μηχανικό Έργο	63
Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Ομοιογενές Ε	64
Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Μη Ομοιογενές Ε.....	64
Ηλεκτρικό Δυναμικό– Ορισμός.....	70
Διαφορές Δυναμικού – Ηλεκτρική Τάση	72
Προβλήματα	75
5. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ στις ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	77
Εισαγωγή.....	77
Ηλεκτρικό Δυναμικό– Σημειακό φορτίο.....	77
Δυναμικό σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες.....	80
Πολικές – Κυλινδρικές συντεταγμένες	82
Σφαιρικές συντεταγμένες	86
Υπολογισμός Δυναμικού μιας Κατανομής Φορτίου.....	90
Ισοδυναμικές επιφάνειες	93
Κατανομή του Δυναμικού σε Αγωγίμο Σώμα.....	95
Προβλήματα	100
6. ΠΥΚΝΩΤΕΣ - ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ	105
Ορισμός Χωρητικότητας	105
Επίπεδος πυκνωτής	106
Άλλες Γεωμετρίες.....	107
Διηλεκτρικά.....	110
Πυκνωτές σε Σειρά.....	110
Πυκνωτές σε Παράλληλη διάταξη	113
Ενέργεια Πυκνωτή	115
Προβλήματα	120
7. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ και ο ΝΟΜΟΣ του ΟΗΜ	126
Ηλεκτρικό Ρεύμα.....	126
Ο νόμος του Ohm – Ηλεκτρική Αντίσταση	130
Φορτία σε ρευματοφόρους αγωγούς.....	134
Ειδική Αντίσταση	136
Ηλεκτρική Ισχύς	138
Εναλλασσόμενα Ρεύματα.....	139
Ενεργός τιμή.....	140
Προβλήματα	142
8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	144
Εισαγωγή.....	144

Μαγνητικό Πεδίο	146
Δύναμη σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο	147
Εξωτερικό Γινόμενο	151
Δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε μαγνητικό πεδίο.....	153
Δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό τυχαίου σχήματος μέσα σε μαγνητικό πεδίο	156
Ροπή σε ρευματοφόρο βρόγχο μέσα σε μαγνητικό πεδίο.....	159
Προβλήματα	162
9. ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ.....	168
Ο νόμος των Biot-Savart	168
Παραγωγή μαγνητικού πεδίου από Ευθύγραμμο Ρευματοφόρο Αγωγό	169
Παραγωγή μαγνητικού πεδίου από Κυκλικό Ρευματοφόρο Αγωγό	173
Δύναμη μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών	174
Ο νόμος του Ampere.....	175
Μαγνητικό πεδίο κυλινδρικού αγωγού απείρου μήκους	176
Κατανομή Δυναμικών Γραμμών σε Κυλινδρικούς Αγωγούς	179
Μαγνητικό πεδίο μιας άπειρης συστοιχίας παράλληλων ευθύγραμμων αγωγών	180
Ζεύγος δυο συστοιχιών με αγωγούς αντίθετου ρεύματος	182
Πηνίο - Σωληνοειδές.....	183
Μαγνητική διαπερατότητα.....	186
Προβλήματα	188
10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ	196
Μαγνητική Ροή	196
Ο νόμος του Faraday.....	198
Ο νόμος του Lenz.....	202
Αυτεπαγωγή.....	203
Ενέργεια Σωληνοειδούς.....	204
Προβλήματα	205
11. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ	215
Ηλεκτρική αντίσταση	215
Πυκνωτής	218
Πηνίο	219
Κυκλώματα με αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία	221
Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος DC	221
α) Κύκλωμα RC -Φόρτιση.....	222
β) Κύκλωμα RC -Εκφόρτιση	225
γ) Κύκλωμα RL - Φόρτιση	227

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

δ) Κύκλωμα RL - Εκφόρτιση.....	229
Κυκλώματα Εναλλασσόμενου Ρεύματος AC	231
α) Κύκλωμα RC	231
β) Κύκλωμα RL	234
γ) Κύκλωμα RCL	237
Προβλήματα	243
12. ΤΟ ΦΩΣ.....	251
Δυική Φύση του φωτός	251
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα.....	251
Ενέργεια Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων.....	255
Ταχύτητα του φωτός μέσα σε υλικά – Δείκτης Διάθλασης.....	261
Προβλήματα	263
13. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ.....	266
Ο νόμος της ανάκλασης.....	267
Επίπεδα κάτοπτρα	267
Ακτίνα καμπυλότητας	270
Σφαιρικά κάτοπτρα.....	271
Ο νόμος της διάθλασης	278
Ολική ανάκλαση – Κρίσιμη γωνία	280
Λεπτοί Φακοί	283
Προβλήματα	289
14 ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ.....	299
Συμβολή από Διπλή Σχισμή – Πείραμα του Young.....	299
Περίθλαση από μονή σχισμή.....	306
Προβλήματα	314

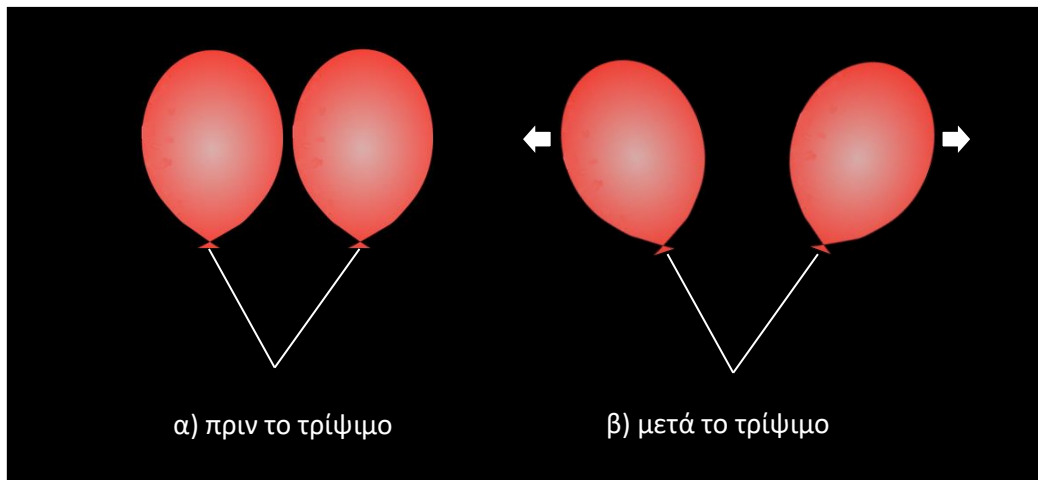
1. ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ COULOMB

Ηλεκτρικό φορτίο

Στην φύση γύρω μας απαντώνται διάφορα ηλεκτρικά φαινόμενα όπως π.χ. ο κεραυνός και κάποιοι σπινθήρες που δημιουργούνται από τριβές αλλά και εμείς μπορούμε εύκολα να προκαλέσουμε ηλεκτρικά φαινόμενα, όπως αυτά που φαίνονται στο εξής ενδιαφέρον βίντεο στο διαδίκτυο:

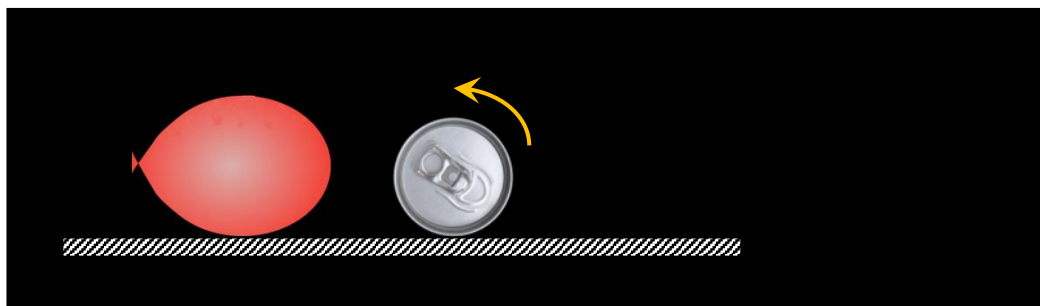
<http://www.youtube.com/watch?v=QcBVa1VKUdc>

Θεωρήστε για παράδειγμα τα δυο μπαλόνια του Σχήματος 1.1α τα οποία αρχικά βρίσκονται σε εγγύτητα και δεν φαίνονται να αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Όπως φαίνεται και στο βίντεο, αφού αυτά τα μπαλόνια τριφτούν επάνω σε μαλλί, πλέον το ένα απωθεί το άλλο όπως στο Σχήμα 1.1β.



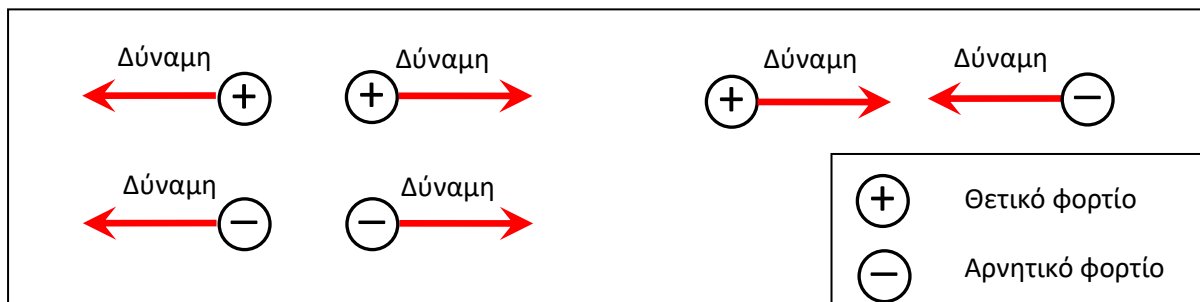
Σχήμα 1.1

Ένα άλλο ενδιαφέρον φαινόμενο που παρουσιάζεται στο βίντεο, φαίνεται και στο Σχήμα 1.2. Ένα μπαλόνι το οποίο έχει τριφτεί επάνω σε μαλλί, έλκει ένα αλουμινένιο δοχείο αναψυκτικού, αναγκάζοντάς το σε κύλιση επάνω σε οριζόντιο δάπεδο.



Σχήμα 1.2

Τα φαινόμενα αυτά μπορούν να ερμηνευτούν με την απλή παραδοχή ότι υπάρχουν μόνο δυο ειδών φορτία στη φύση, τα θετικά και τα αρνητικά και ότι τα ετερόσημα φορτία έλκονται ενώ τα ομόσημα φορτία απωθούνται, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.3.

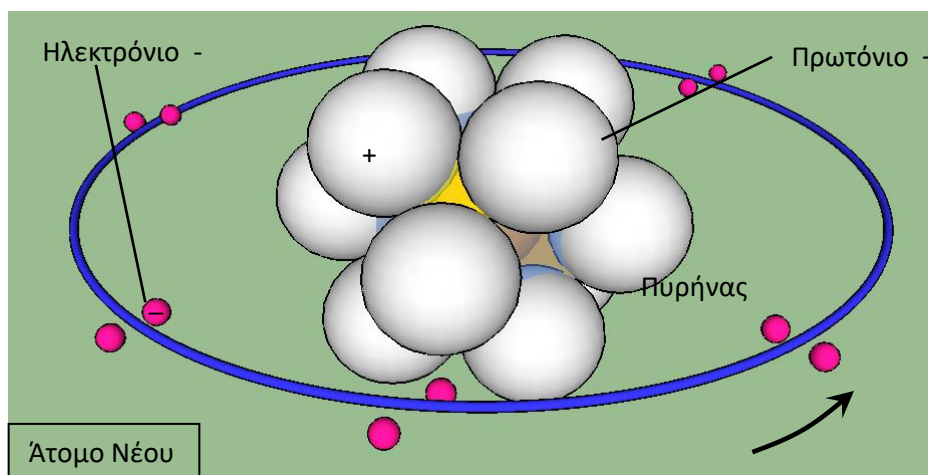


Σχήμα 1.3

Ηλεκτρόνια

Το αρνητικό φορτίο στη φύση προέρχεται από τα ηλεκτρόνια ενώ το θετικό από τα πρωτόνια. Θεωρήστε π.χ. την απλουστευμένη απεικόνιση του ατόμου του Νέου στο Σχήμα 1.4 με ατομικό αριθμό $Z = 10$. Για ευκολία απεικόνισης, τα νετρόνια τα οποία δε φέρουν φορτίο, έχουν παραληφθεί από το σχήμα. Παρατηρήστε σε αυτό το σχήμα τα εξής:

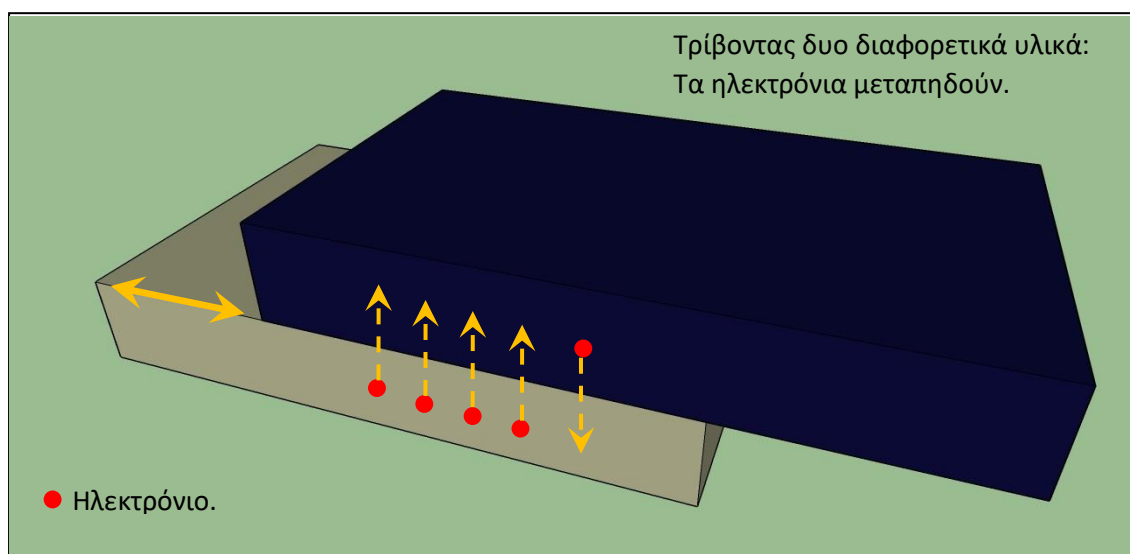
- 1) Ο αριθμός των ηλεκτρονίων (δέκα) είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων (το 10° πρωτόνιο δεν φαίνεται καθαρά, είναι πίσω από τα υπόλοιπα πρωτόνια)
- 2) Τα πρωτόνια είναι συγκεντρωμένα μέσα στον πυρήνα, τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από αυτόν
- 3) Τα πρωτόνια είναι πολύ βαρύτερα από τα ηλεκτρόνια (οπότε και τα ηλεκτρόνια είναι πολύ πιο ευέλικτα)
- 4) Το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι ίσο και αντίθετο από αυτό του πρωτονίου οπότε συνολικά τα άτομα εξ' ορισμού είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα όπως και όλα τα υλικά.



Σχήμα 1.4

Τα περισσότερα σώματα τριγύρω μας είναι ηλεκτρικώς ουδέτερα γιατί όπως είδαμε παραπάνω, τα άτομα που τα αποτελούν είναι εξ' ορισμού ουδέτερα. Όπως όμως φαίνεται στο Σχήμα 1.5, οι δυνάμεις τριβής μπορούν να αναγκάσουν τα ηλεκτρόνια να μεταπηδήσουν από ένα σώμα ενός υλικού σε ένα άλλο σώμα διαφορετικού υλικού. Αυτό γίνεται επειδή γενικά κάποια υλικά χάνουν ευκολότερα ηλεκτρόνια κατά την διαδικασία της τριβής από ότι κάποια άλλα. Το φαινόμενο αυτό είναι σε αναλογία με το φαινόμενο της υλικής φθοράς όπου κάποια υλικά είναι πιο ανθεκτικά στην τριβή όπως τα μέταλλα ενώ κάποια άλλα φθείρονται περισσότερο όπως τα πολυμερή. Θεωρήστε για παράδειγμα το κάτω σώμα στο Σχήμα 1.5 το οποίο χάνει συνολικά 4 ηλεκτρόνια κατά την επαφή του με το πάνω σώμα το οποίο χάνει μόλις 1. Έτσι συνολικά το κάτω σώμα έχασε $4 - 1 = 3$ αρνητικά φορτία και άρα θα "φορτιστεί" όπως λέμε θετικά. Τα ηλεκτρόνια βέβαια δεν χάνονται αλλά μεταπηδούν από το ένα σώμα στο άλλο. Έτσι το πάνω σώμα έχασε 1 ηλεκτρόνιο αλλά κέρδισε 4 από το κάτω σώμα και επομένως δέχθηκε συνολικά 3 αρνητικά φορτία και άρα φορτίζεται αρνητικά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ηλεκτρική φόρτιση** ενός σώματος.

Κατά την "**ηλεκτρική φόρτιση**", ένα ουδέτερο σώμα αποκτάει επιπλέον φορτίο. Η λέξη "επιπλέον" χρησιμοποιείται για να επισημανθεί το γεγονός ότι το σώμα πριν τη φόρτιση έφερε ένα τεράστιο αριθμό φορτίων τα οποία όμως ήταν εξίσου μοιρασμένα σε θετικά και αρνητικά και έτσι το σώμα εμφανιζόταν ηλεκτρικά ως ουδέτερο.



Σχήμα 1.5

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι φόρτισης εκτός από την τριβή. Κατά το φωτο-ηλεκτρικό φαινόμενο για παράδειγμα, προσπίπτον φως κατάλληλης συχνότητας επάνω σε μεταλλικό σώμα μπορεί να προκαλέσει εξαγωγή ηλεκτρονίων από το υλικό και άρα να το φορτίσει θετικά. Παρόμοιο είναι και το θερμο-ηλεκτρικό φαινόμενο όπου τώρα η θερμότητα και όχι το φως, αναγκάζει κάποια ηλεκτρόνια να εξέλθουν από το υλικό. Επίσης σε κάποιες ηλεκτροχημικές αντιδράσεις, ηλεκτρόδια που έρχονται σε επαφή με διαλύματα οξέων, προσφέρουν κάποια από τα ηλεκτρόνια τους στο διάλυμα όπως π.χ. στις μπαταρίες. Επίσης εκτός από το φως, και ραδιενεργές ακτινοβολίες μπορούν να προκαλέσουν "**ιονισμό**" των ατόμων, δηλαδή τη μετατροπή τους σε ιόντα που είναι στην ουσία άτομα με πλεονασμό ή έλλειψη ηλεκτρονίων σε σχέση με την ουδέτερη κατάστασή τους. Για προφανείς λόγους αυτές οι ακτινοβολίες ονομάζονται "ιονίζουσες ακτινοβολίες".

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω παραδείγματα, τα καθημερινά ηλεκτρικά φαινόμενα που παρατηρούνται γύρω μας, είναι εξαιτίας της μετακίνησης των ηλεκτρονίων. Παρότι που θα μπορούσαμε θεωρητικά να έχουμε και κίνηση πρωτονίων, αυτό στην πράξη δεν γίνεται επειδή αφενός τα ηλεκτρόνια είναι κατά πολύ ελαφρύτερα από τα πρωτόνια (κατά ~2000 φορές) και άρα περισσότερο ευκίνητα, και αφετέρου επειδή τα πρωτόνια μέσα στον πυρήνα συγκρατούνται μεταξύ τους (και με τα νετρόνια) με ισχυρές πυρηνικές αλληλεπιδράσεις και έτσι η αποκόλλησή τους μπορεί να γίνει μόνο σε πυρηνικές αντιδράσεις (οι οποίες απαιτούν πολύ υψηλές ενέργειες). Βέβαια υπάρχουν και εξαιρέσεις όπως σε ηλεκτροχημικούς διαλύτες ή στη δημιουργία πλάσματος όπου τα θετικά ιόντα μετακινούνται μαζί με τα ηλεκτρόνια αλλά αυτές οι εξαιρέσεις είναι μικρές στις καθημερινές ηλεκτρικές εφαρμογές και επομένως μπορούμε να θεωρούμε γενικά τα εξής:

Αρνητικά φορτισμένο είναι το σώμα το οποίο κέρδισε ηλεκτρόνια και έτσι συνολικά ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι μεγαλύτερος του αντίστοιχου αριθμού πρωτονίων στο εσωτερικό του. Το σώμα δηλαδή έχει περίσσεια ηλεκτρονίων.

Θετικά φορτισμένο είναι το σώμα το οποίο έχασε ηλεκτρόνια και έτσι συνολικά ο αριθμός των πρωτονίων είναι μεγαλύτερος του αντίστοιχου αριθμού ηλεκτρονίων στο εσωτερικό του. Το σώμα δηλαδή έχει περίσσεια πρωτονίων.

Φορτίο - Μονάδες

Όπως και οποιαδήποτε άλλη φυσική ποσότητα, έτσι και το φορτίο έχει μονάδες. Έτσι μπορούμε να συγκρίνουμε ποσοτικώς ένα σώμα με μεγαλύτερο φορτίο επειδή π.χ. έχει τριπλάσιο για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ένα άλλο σώμα που έχει τριπλάσιο για μικρότερο χρονικό διάστημα και άρα έχει μικρότερο φορτίο. Το φορτίο το συμβολίζουμε με το γράμμα Q ή q και η μονάδα του είναι το Coulomb C . Τα ηλεκτρόνια φέρουν ένα πολύ μικρό αρνητικό φορτίο με μέγεθος

$q_e = 1.6 \times 10^{-19} C$	Φορτίο Ηλεκτρονίου	1.1
-------------------------------	--------------------	-----

Καθημερινά φαινόμενα (π.χ. τρίψιμο, ιονισμός) έχουν να κάνουν με μερικά μC . Για να σχηματίσουμε φορτίο ενός Coulomb πρέπει να συγκεντρώσουμε ένα τεράστιο αριθμό 6.25×10^{18} ηλεκτρονίων αφού

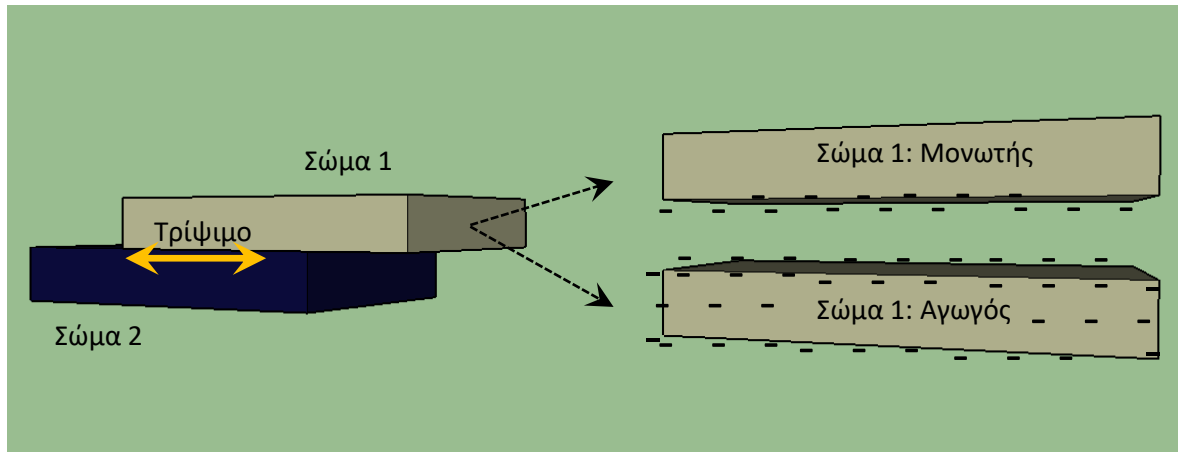
$$6.25 \times 10^{18} \times 1.6 \times 10^{-19} = 1 C$$

Αγωγοί – Μονωτές

Όπως είδαμε παραπάνω, μέσα σε ένα ηλεκτρικώς ουδέτερο υλικό τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα του κάθε ατόμου. Εάν όμως ένα σώμα έχει προηγουμένως φορτιστεί (π.χ. λόγω τριβής) θα υπάρχουν μέσα σε αυτό και επιπλέον φορτία από τη φόρτιση. Υπάρχουν δυο ειδών υλικά όσον αφορά την ευκολία μετακίνησης του επιπλέον φορτίου:

Μονωτές. Τα ηλεκτρόνια είναι πολύ ισχυρά προσκολλημένα στους πυρήνες, δεν μπορούν να μετακινηθούν από άτομο σε άτομο. Τα επιπλέον φορτία από τυχόν φόρτιση επίσης δεν μπορούν να μετακινηθούν εύκολα και παραμένουν εκεί όπου δημιουργήθηκαν αρχικά, όπως στο πάνω δεξί μέρος του σχήματος 1.6. Αφού μόνο η κάτω επιφάνεια του σώματος ήταν σε επαφή με το σώμα 2 (το σκουρόχρωμο στο σχήμα), τότε τα επιπλέον φορτία τα οποία δημιουργούνται εκεί αρχικά, θα παραμείνουν εκεί για πάντα.

Αγωγοί: Μέρος των ηλεκτρονίων έλκονται πολύ ασθενώς από τους πυρήνες και επομένως μπορούν και μετακινούνται πολύ εύκολα από περιοχή σε περιοχή του υλικού. Τα επιπλέον φορτία κινούνται πολύ γρήγορα, απωθούνται μεταξύ τους και σε χρόνο μερικών ms κατανέμονται σε όλη την εξωτερική επιφάνεια του υλικού όπως στο κάτω δεξί μέρος του Σχήματος 1.6. Και πάλι τα φορτία έχουν δημιουργηθεί αρχικά στην κάτω επιφάνεια του σώματος 1, αλλά σχεδόν ακαριαία θα κατανεμηθούν και στις έξι έδρες της πλάκας.



Σχήμα 1.6

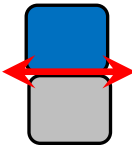
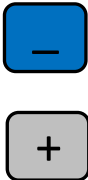
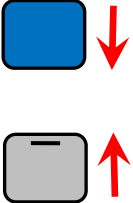
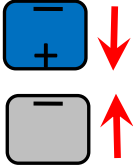
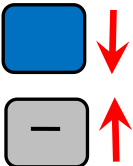
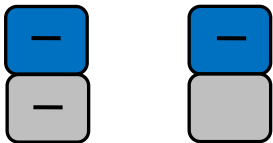
Κλασικά παραδείγματα μονωτών είναι τα μη μέταλλα: Οργανικά, Πολυμερή, Ξύλο, Γυαλί, Κεραμικά. Αντιθέτως τα περισσότερα μέταλλα είναι αγωγοί: Χάλυβας, Αλουμίνιο, Χαλκός, Πλατίνα, Χρυσός, Ψευδάργυρος.

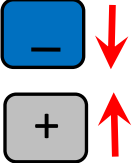

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω Πίνακα 1.1, υπάρχουν συνολικά τέσσερις τρόποι για την μεταβολή του φορτίου ενός σώματος.

- **Τριβή:** Όπως είδαμε παραπάνω, η τριβή οδηγεί σε φόρτιση. Αυτό εξηγεί στο Σχήμα 1.1 γιατί τα δυο μπαλόνια απωθούνται μεταξύ τους μετά από την τριβή τους σε μαλλί. Τα δυο φορτία που δημιουργούνται κατά την τριβή είναι ίσα και αντίθετα $\pm q$.
- **Επαγωγή:** Όταν πλησιάσουμε ένα φορτισμένο σώμα με φορτίο q σε ένα μεταλλικό και μη φορτισμένο σώμα, τότε λόγω της εύκολης μετακίνησης του εσωτερικού φορτίου στο δεύτερο σώμα, το φορτίο αυτό ανακατανέμεται. Για παράδειγμα, εάν πλησιάσουμε ένα αρνητικά φορτισμένο σώμα με φορτίο $-q$ σε ένα κομμάτι μέταλλο, τα ηλεκτρόνια του μετάλλου που βρίσκονται στη μεριά που είναι πλησίον του αρνητικού σώματος, απωθούνται από το $-q$ στην ακριβώς απέναντι πλευρά του. Ως αποτέλεσμα αυτού, η μεριά που χάνει τα ηλεκτρόνια φορτίζεται θετικά με φορτίο $+q$ ενώ η απέναντι πλευρά φορτίζεται αρνητικά με φορτίο $-q$. Επίσης, το αρνητικό σώμα έλκει την θετική πλευρά του μετάλλου επειδή βρίσκεται πλησιέστερα σε αυτό. Αυτό εξηγεί στο Σχήμα 1.2 γιατί το μπαλόνι έλκει το αλουμινένιο δοχείο του αναψυκτικού και το αναγκάζει σε κύλιση. Αντίθετα, εάν πλησιάσουμε ένα θετικά φορτισμένο σώμα με φορτίο $+q$ σε ένα κομμάτι μέταλλο, τα ηλεκτρόνια του μετάλλου που βρίσκονται στη μεριά που είναι πλησίον του θετικού σώματος, έλκονται από το $+q$ στην ακριβώς απέναντι πλευρά του. Ως αποτέλεσμα αυτού, η μεριά που κερδίζει τα ηλεκτρόνια φορτίζεται αρνητικά με φορτίο $-q$ ενώ η απέναντι πλευρά φορτίζεται θετικά με φορτίο $+q$. Επίσης, το θετικό σώμα έλκει την αρνητική πλευρά του μετάλλου επειδή βρίσκεται πλησιέστερα σε αυτό. Ο αγωγός βέβαια παραμένει κατά αυτή τη διαδικασία ηλεκτρικά ουδέτερος αφού η ανακατανομή αυτή του φορτίου δεν αλλάζει τον επιμέρους αριθμό τους.

Τοπικά όμως φορτίζεται θετικά ή αρνητικά με αποτέλεσμα τα δυο σώματα να έλκονται μεταξύ τους.

- **Επαφή.** Εάν φέρουμε σε επαφή ένα φορτισμένο σώμα με φορτίο $+q$ με ένα αφόρτιστο σώμα, τότε το επιπλέον φορτίο στο φορτισμένο σώμα επειδή έχει στη διάθεσή του μεγαλύτερο όγκο μετά την επαφή, τείνει να εξαπλωθεί και στα δυο σώματα και έτσι τελικά φορτίζονται και τα δυο με φορτία q_1 και q_2 έτσι ώστε $q = q_1 + q_2$ (διατήρηση του φορτίου). Εάν τα δυο σώματα είναι αγωγίμα, το μέγεθος των φορτίων q_1 και q_2 εξαρτάται από τη γεωμετρία τους και θα δούμε πως αυτά υπολογίζονται στο Κεφάλαιο 4 που έχει να κάνει με την Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια και το Ηλεκτρικό Δυναμικό. Εάν το αρχικά φορτισμένο σώμα είναι μονωτής ενώ το δεύτερο αγωγός, τότε $q_1 = 0$ και $q_2 = q$ δηλαδή όλο το φορτίο μεταπηδάει στον αγωγό διότι μπορεί και μετακινείται ευκολότερα εκεί. Ορισμένες φορές αυτό το φαινόμενο αποκαλείται "εξουδετέρωση" με τη λογική ότι εξουδετερώνεται το φορτίο του μονωτή στην πραγματικότητα όμως είναι μεταφορά λόγω επαφής. Αυτό το φαινόμενο δεν πρέπει να συγχέεται με το παρακάτω φαινόμενο.
- **Εξουδετέρωση.** Εάν φέρουμε σε επαφή δυο αντίθετα φορτισμένα σώματα, τότε λαμβάνει χώρα μεταφορά φορτίου μεταξύ των δυο σωμάτων (τα επιπλέον ηλεκτρόνια μεταπηδούν και συμπληρώνουν τα θετικά ιόντα του θετικού σώματος που έχουν έλλειμα σε ηλεκτρόνια) και έτσι τα δυο ετερόσημα φορτία αλληλο-εξουδετερώνονται μερικώς ή ολικώς (εάν είναι κατά μέτρο ίσα).

Διαδικασία	Αρχική Κατάσταση	Τελική Κατάσταση
Τρίψιμο		
Επαγωγή		
Επαφή		Αγωγοί Μονωτής-αγωγός 

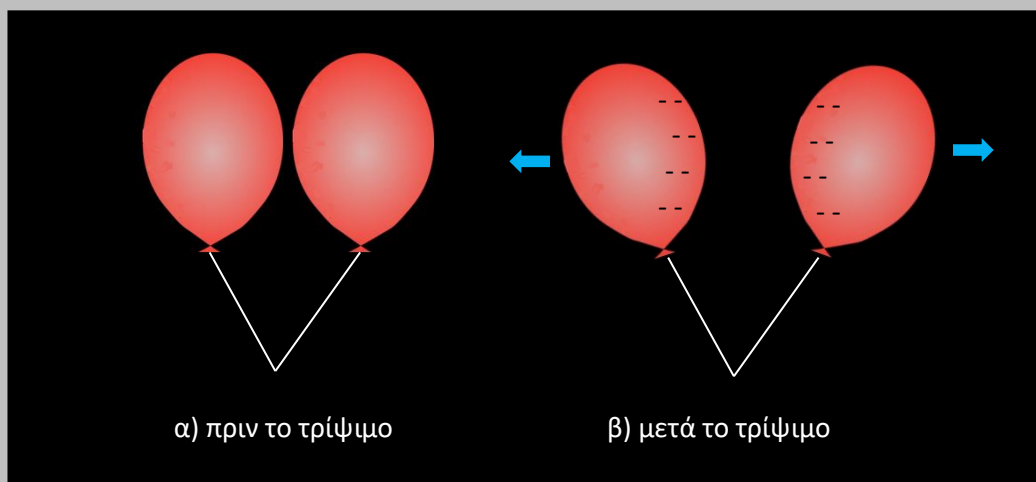
Εξουδετέρωση		
--------------	---	---

Πίνακας 1.1

Παράδειγμα 1.1.

Εξηγήστε γιατί τα μπαλόνια του Σχήματος 1.1β απωθούνται μεταξύ τους εάν γνωρίζετε ότι έχει προηγηθεί το τρίψιμο τους επάνω σε μάλλινο ύφασμα.

Λύση: Όπως είδαμε παραπάνω, η τριβή οδηγεί σε δημιουργία φορτίου. Το είδος του φορτίου εξαρτάται από το υλικό. Αφού τα μπαλόνια είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, τότε θα αποκτήσουν αναγκαστικά και το ίδιο είδος φορτίου, είτε θετικό είτε αρνητικό. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι τα περισσότερα πλαστικά-πολυμερικά υλικά που απαντάμε στην καθημερινότητά μας όπως το PET (μπουκάλι νερού), το PVC (μονώσεις καλωδίων), το Πολυαιθυλένιο (σακούλες) το Πολυπροπυλένιο (συσκευασίες τροφίμων) το Φελιζόλ κ.λ.π., φορτίζονται συνήθως αρνητικά όταν τα τρίψουμε με μάλλινα υφάσματα (οπότε και τα υφάσματα αυτά φορτίζονται θετικά). Ως αντιπαράδειγμα, το γυαλί φορτίζεται θετικά όταν το τρίψουμε επάνω σε μεταξένιο ύφασμα. Στην προκειμένη λοιπόν περίπτωση και τα δυο μπαλόνια αποκτούν αρνητικό φορτίο και έτσι απωθούνται μεταξύ τους λόγω του ότι τα ομόσημα φορτία απωθούνται.



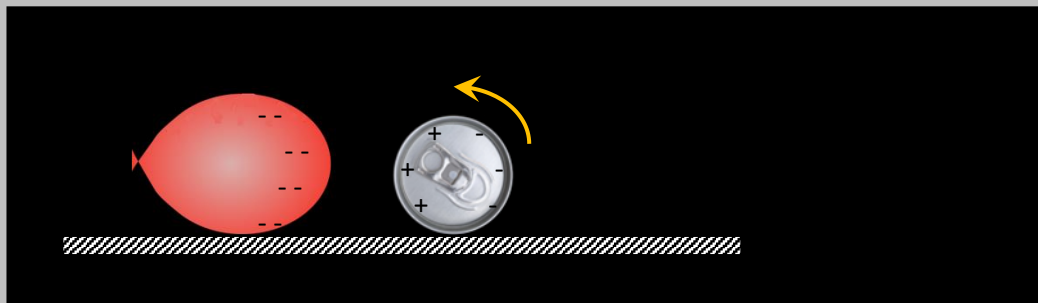
Προσέξτε ότι το φορτίο επάνω στα μπαλόνια έχει σχεδιασθεί από την μια μεριά τους μόνο, προφανώς από αυτή που ήρθε σε επαφή με τα μάλλινο ύφασμα. Αυτό όπως είδαμε γίνεται επειδή το πλαστικό είναι μονωτής και έτσι το επιπλέον φορτίο δεν δύναται να μετακινηθεί μέσα στο μπαλόνι αλλά παραμένει εκεί όπου δημιουργήθηκε αρχικά.

Παράδειγμα 1.2.

Εξηγήστε γιατί το αλουμινένιο δοχείο αναψυκτικού του Σχήματος 1.2 έλκεται από το μπαλόνι, εάν γνωρίζετε ότι έχει προηγηθεί το τρίψιμο του μπαλονιού επάνω σε μάλλινο ύφασμα.

Λύση: Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το μπαλόνι με την τριβή φορτίζεται αρνητικά ενώ θεωρούμε ότι το αλουμινένιο δοχείο είναι ηλεκτρικώς ουδέτερο αφού δεν έχει υποστεί κάποια διαδικασία τριβής. Όταν πλησιάσουμε αρκετά το μπαλόνι στο μεταλλικό δοχείο, τότε λαμβάνει χώρα

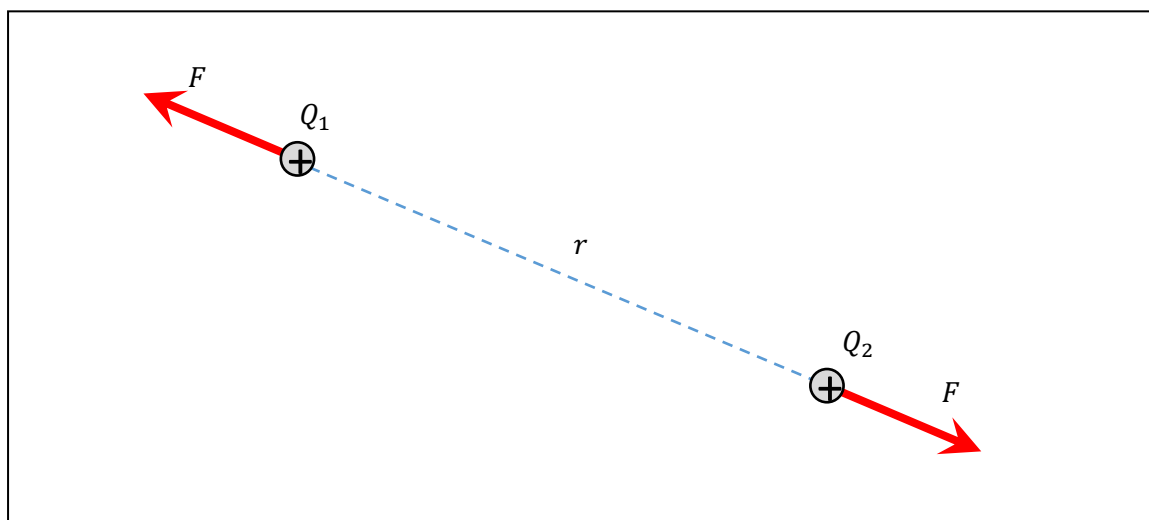
το φαινόμενο της επαγωγής το οποίο εικονίζεται σχηματικά στη δεύτερη γραμμή του Πίνακα 1.1. Συγκεκριμένα, τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην αριστερή ημικυλινδρική επιφάνεια του δοχείου, απωθούνται από το αρνητικό φορτίο του μπαλονιού και μεταβαίνουν στην απέναντι επιφάνεια (τα ομόσημα φορτία απωθούνται). Έτσι δημιουργείται έλξη μεταξύ του αρνητικού φορτίου του μπαλονιού και του θετικού φορτίου του δοχείου στην αριστερή ημικυλινδρική επιφάνειά του (τα ετερόσημα φορτία έλκονται).



Σημειώστε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για την παρατήρηση αυτού του φαινομένου είναι η χρήση αγώγιμου υλικού για το δοχείο αφού μόνο τότε μπορούν να μεταφερθούν εύκολα τα ηλεκτρόνια από την μια μεριά του στην άλλη. Επίσης κατά την κύλιση θα μπορούσε να έχει έρθει ξανά το αρνητικό φορτίο στην αριστερή πλευρά του δοχείου μετά π.χ. από μισή περιστροφή αυτού. Αυτό όμως δεν γίνεται επειδή και πάλι, λόγω της ευκινησίας των ηλεκτρονίων μέσα στο αγώγιμο υλικό, αυτά αναπροσαρμόζονται ώστε να είναι πάντοτε κατανομημένα στην δεξιά ημικυλινδρική επιφάνεια του δοχείου, αφήνοντας έτσι την αριστερή επιφάνεια θετικά φορτισμένη, όσες περιστροφές και να εκτελέσει το δοχείο. Όπως προαναφέρθηκε, στα παραπάνω φαινόμενα λαμβάνει χώρα μόνο μετακίνηση των αρνητικών ηλεκτρονίων και όχι των πρωτονίων.

Ο Νόμος του Coulomb

Όπως είδαμε στα προηγούμενα εδάφια, τα φορτία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους είτε με άπωση, είτε με έλξη. Αυτή είναι απλά μια ποιοτική παρατήρηση αλλά θα θέλαμε όμως και ποσοτικώς να γνωρίζουμε πόσο μεγάλη είναι αυτή η έλξη ή η άπωση, δηλαδή ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο κάθε φορτίο αλλά και τη διεύθυνση αυτής της δύναμης. Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας τη δίνει ο **νόμος του Coulomb**.



Σχήμα 1.7

Θεωρήστε τα δυο σημειακά φορτία στο Σχήμα 1.7. Ως "σημειακά" θεωρούνται τα φορτία που δεν έχουν διαστάσεις. Στην πράξη ως σημειακά λαμβάνουμε φορτισμένα σώματα πολύ μικρών διαστάσεων όπως ένα ηλεκτρόνιο, ο κόκκος σκόνης που έχει φορτιστεί στην ατμόσφαιρα γύρω μας λόγω τριβής του με μόρια του αέρα, ένα πολύ μικρό κομματάκι χαρτιού που το έχουμε συμπυκνώσει σε σφαιρική μορφή και το έχουμε τρίψει επάνω σε μάλλινο ύφασμα κ.ό.κ. Τα δυο φορτία δεν είναι αναγκαστικά ίσα μεταξύ τους, έστω ότι τα φορτία τους σε *Coulomb* είναι Q_1 and Q_2 και βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους. Λόγω δράσης-αντίδρασης, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ τους (άπωση στο συγκεκριμένο παράδειγμα αφού στο σχήμα τα φορτία είναι και τα δυο θετικά) είναι κατά μέτρο ίσες. Σύμφωνα με τον **νόμο του Coulomb**, το μέτρο F αυτής της δύναμης σε *Newtons* δίνεται από την εξίσωση:

$F = k \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$	Νόμος του Coulomb	1.2
--------------------------------	-------------------	-----

όπου η σταθερά k ισούται με 9×10^9 σε μονάδες *S.I.* Προσέξτε ότι στην Εξ. 1.2 υπεισέρχονται οι απόλυτες τιμές των φορτίων αφού μιλάμε για το μέτρο της δύναμης το οποίο είναι πάντοτε μια θετική ποσότητα ενώ τα φορτία μπορούν να έχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Όσον αφορά την διεύθυνση της F , βρίσκεται πάντοτε επάνω στον άξονα που συνδέει τα δυο φορτία και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα έλξης-άπωσης των δυο φορτίων.

Παράδειγμα 1.3. Δυο φορτία -3 και $+4 \mu C$ βρίσκονται σε απόσταση 12 mm μεταξύ τους. Ποια είναι η ηλεκτροστατική δύναμη που δέχονται;

Λύση: Από την Εξ. 1.2

$$F = k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

Μετατροπή σε μονάδες *S.I.* :

$$r = 12 \text{ mm} = 0.012 \text{ m}$$

$$Q_1 = -3 \mu C = -3 \times 10^{-6} \text{ C}$$

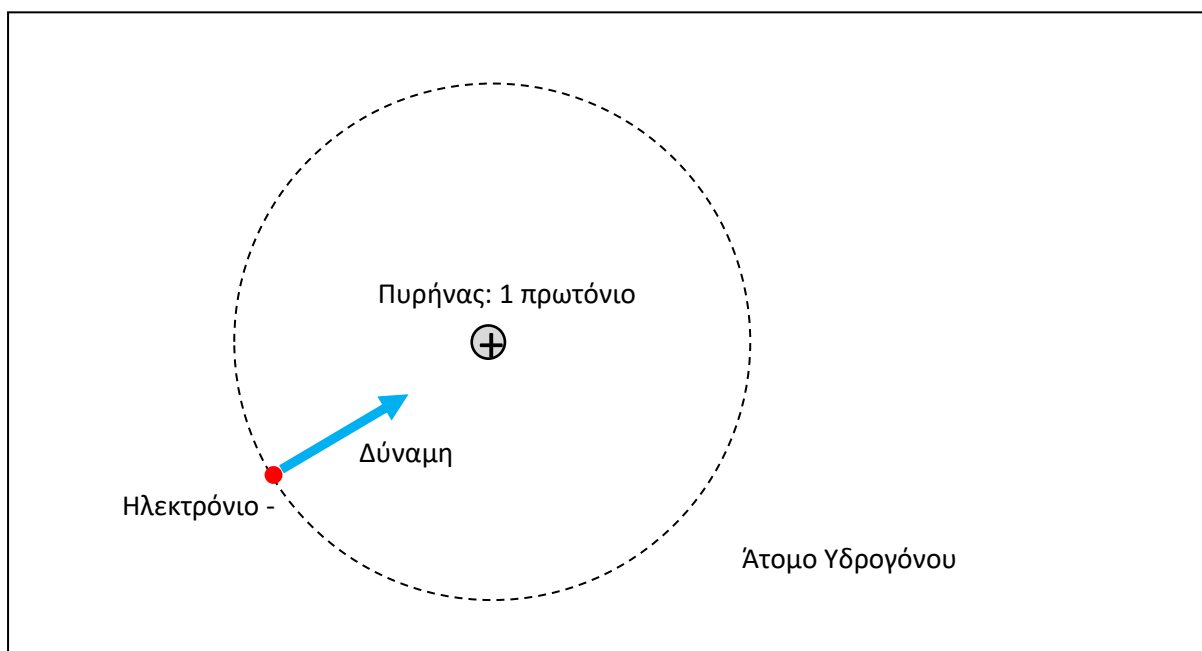
$$Q_2 = 4 \mu\text{C} = 4 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Το μέγεθος της δύναμης είναι ίσο με (διεύθυνση : ελκτική)

$$F = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(0.012)^2} = 750 \text{ N}$$

Παράδειγμα 1.4. Θεωρήστε ότι η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου (1 ηλεκτρόνιο – 1 πρωτόνιο) είναι $5.2 \times 10^{-11} \text{ m}$. Ποια είναι η δύναμη που κρατάει το ηλεκτρόνιο σε τροχιά ;

Λύση: Το υδρογόνο είναι το απλούστερο άτομο με το ένα και μοναδικό πρωτόνιο να έλκει αντίστοιχα ένα ηλεκτρόνιο. Η φορά της δύναμης που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι προς το πρωτόνιο δηλαδή το κέντρο της τροχιάς (κεντρομόλος)



Το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο $Q_1 = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ενώ το πρωτόνιο $Q_2 = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Η απόσταση των φορτίων είναι ίση με την ακτίνα της τροχιάς $r = 5.2 \times 10^{-11} \text{ m}$ οπότε η δύναμη ισούται με:

$$F = 9 \times 10^9 \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$$

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{(5.2 \times 10^{-11})^2} = 8.52 \times 10^{-8} \text{ N}$$

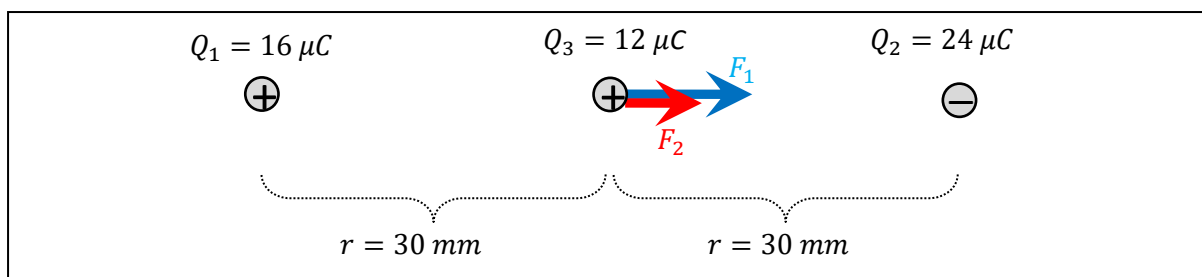
Παράδειγμα 1.5: Δυο ταυτόσημα φορτία απέχουν μεταξύ τους 30 mm και δρα πάνω τους μια απωστική δύναμη 700 N . Ποιο είναι το μέγεθος του κάθε φορτίου;

Λύση: Για ταυτόσημα φορτία $Q_1 = Q_2 = Q$. Η απωστική δύναμη σημαίνει ότι τα φορτία έχουν το ίδιο πρόσημο και για απλότητα τα παίρνουμε θετικά. Η απόσταση είναι $r = 30 \text{ mm} = 0.03 \text{ m}$. Από τον νόμο του Coulomb έχουμε:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = k \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow Q^2 = \frac{F}{k} r^2 = \frac{980}{9 \times 10^9} \times 0.03^2 = 7.0 \times 10^{-11} \Rightarrow Q = 8.37 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Παράδειγμα 1.4: Σημειακό φορτίο $+16 \mu\text{C}$ τοποθετείται 60 mm αριστερά από ένα άλλο σημειακό φορτίο $-24 \mu\text{C}$. Πόση δύναμη δρα σε ένα τρίτο φορτίο $+12 \mu\text{C}$ το οποίο τοποθετείται στο κέντρο μεταξύ των δυο;

Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο Q_3 δρουν δυο δυνάμεις, η F_1 από το Q_1 και η F_2 από το Q_2 :



Τα μέτρα των δυνάμεων αυτών ισούνται με

$$F_1 = k \frac{|Q_1||Q_3|}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{16 \times 10^{-6} \times 12 \times 10^{-6}}{(0.03)^2} = 1920 \text{ N}$$

και

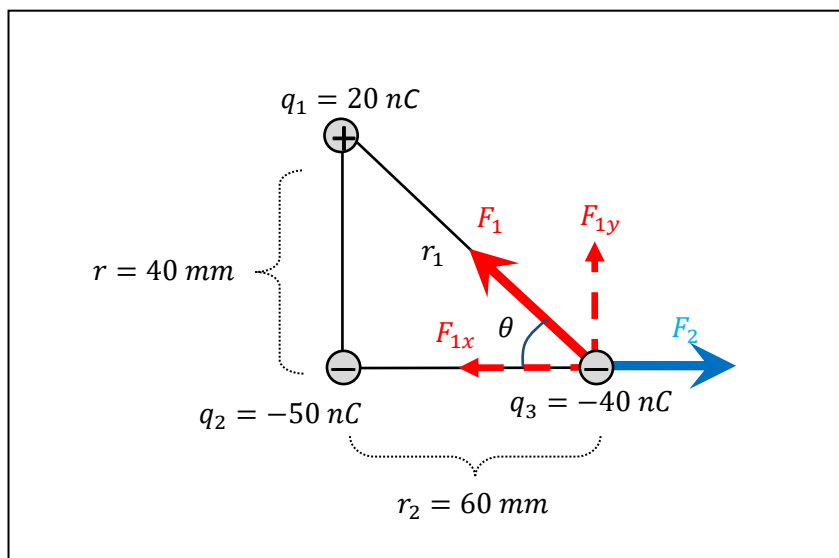
$$F_2 = k \frac{|Q_2||Q_3|}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{24 \times 10^{-6} \times 12 \times 10^{-6}}{(0.03)^2} = 2880 \text{ N}$$

Οι φορές τους φαίνονται στο Σχήμα. Η F_1 είναι απωστική και η F_2 είναι ελκτική. Και οι δυο είναι προς τα δεξιά οπότε η συνισταμένη δύναμη ισούται με:

$$F = F_1 + F_2 = 4800 \text{ N}$$

Παράδειγμα 1.6: Ένα φορτίο $+20 \text{ nC}$ είναι τοποθετημένο 40 mm επάνω από ένα άλλο φορτίο -50 nC . Ποια είναι η συνολική δύναμη σε ένα τρίτο φορτίο -40 nC το οποίο είναι τοποθετημένο 60 mm οριζόντια στα δεξιά του φορτίου των -50 nC ;

Λύση: Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στο q_3 ασκούνται δυο δυνάμεις, μια από το q_1 και μια από το q_2 . Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε πρώτα την δύναμη F_2 που προέρχεται από το q_2 :

$$F_2 = k \frac{|q_2||q_3|}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-9} \times 40 \times 10^{-9}}{(0.06)^2} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Για την F_1 που προέρχεται από το q_1 , πρέπει πρώτα να βρούμε το r_1^2 . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$r_1^2 = r^2 + r_2^2 = 40^2 + 60^2 = 5200 \text{ mm}^2 = 5.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Επομένως

$$F_1 = k \frac{|q_1||q_3|}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{40 \times 10^{-9} \times 20 \times 10^{-9}}{5.2 \times 10^{-3}} = 1.38 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Οι φορές των δυνάμεων που δρουν στο q_3 φαίνονται στο Σχήμα. Η \vec{F}_1 είναι ελκτική ενώ η \vec{F}_2 απωστική. Στη περίπτωση της \vec{F}_1 απαιτείται η ανάλυσή της σε συντεταγμένες οπότε πρέπει να βρούμε την γωνία θ . Από την τριγωνομετρία

$$\tan \theta = \frac{r}{r_2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{40}{60} = 33.7^\circ$$

Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$F_{1x} = -F_1 \cos \theta = -1.38 \times 10^{-3} \times \cos(33.7^\circ) = -0.903 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \theta = 1.38 \times 10^{-3} \times \sin(33.7^\circ) = 1.043 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Η F_2 είναι οριζόντια και άρα έχει μόνο x -συνιστώσα:

$$F_{2x} = F_2 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{2y} = 0 \text{ N}$$

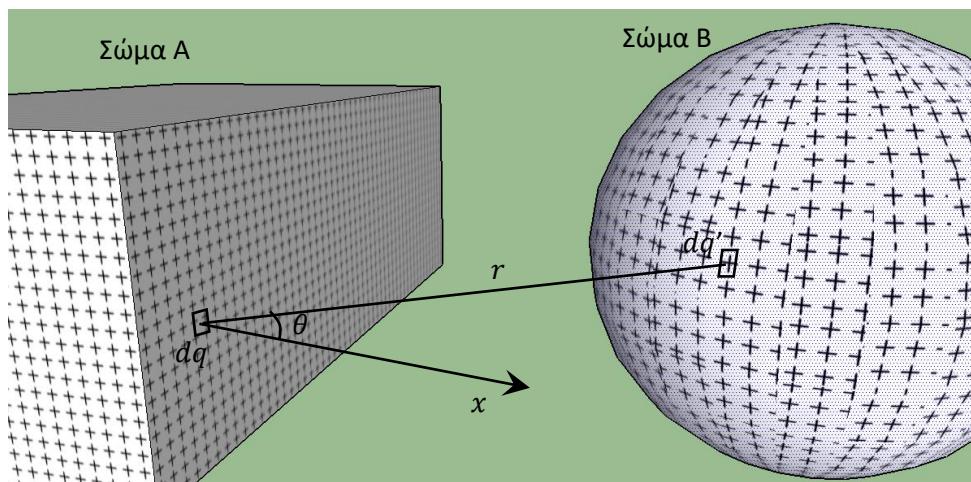
Η συνισταμένη δύναμη \vec{F} που δρα στο Q_3 έχει συνιστώσες:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 4.097 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 1.043 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Δύναμη μεταξύ μη σημειακών φορτίων

Ο νόμος του Coulomb ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου τα δυο φορτία είναι σημειακά. Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη μεταξύ δυο φορτισμένων σωμάτων τυχαίου σχήματος όπως αυτά του παρακάτω Σχήματος 1.8; Σε αυτήν τη περίπτωση έχουμε όπως λέμε μια συνεχή κατανομή φορτίου δηλαδή το φορτίο είναι κατανεμημένο σε κάποιον όγκο του χώρου (συνήθως σε ένα στερεό σώμα) και όχι μόνο επάνω σε ένα υλικό σημείο.



Σχήμα 1.8

Σε αυτή την περίπτωση χωρίζουμε τα δυο σώματα σε απειροστά κομμάτια. Τότε το κάθε απειροστό κομμάτι συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Coulomb. Για παράδειγμα έστω ένα τέτοιο κομμάτι με φορτίο dq στο σώμα A του σχήματος και ένα αντίστοιχο φορτίο dq' στο σώμα B. Εάν η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με r , τότε το μέτρο της δύναμης dF μεταξύ τους ισούται με

$$dF = k \frac{|dq||dq'|}{r^2}$$

Αυτή η δύναμη είναι γενικά ένα διάνυσμα και θα πρέπει να αναλυθεί σε συνιστώσες. Για παράδειγμα κατά μήκος του άξονα x , η συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στο σώμα A εξαιτίας της αλληλεπίδρασης των dq και dq' είναι ίση με

$$dF_x = -dF \cos\theta = -k \frac{|dq||dq'|}{r^2} \cos\theta$$

(τα μείον είναι επειδή λόγω άπωσης, η δύναμη στο σώμα A είναι προς τα αριστερά). Για να βρούμε την συνολική δύναμη πρέπει να ολοκληρώσουμε μια-μια όλες τις συνιστώσες επάνω στα δυο σώματα A και B. Π.χ. για τη x συνιστώσα:

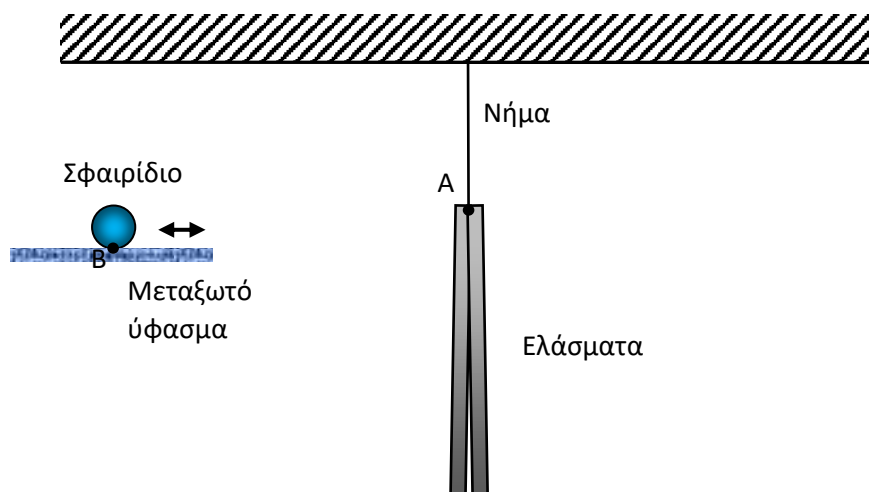
$$F_x = \pm \int_A \int_B dF \cos\theta = \pm k \int_A \int_B \frac{|dq||dq'|}{r^2} \cos\theta$$

Αυτό είναι γενικώς ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα επειδή τόσο το r όσο και το θ μεταβάλλονται όπως ολοκληρώνουμε επάνω στα σώματα A και B (δηλαδή παίρνουμε όλα τα πιθανά ζευγάρια dq και dq').

Θα αναβάλλουμε τη συζήτηση περί συνεχών κατανομών φορτίου για το επόμενο κεφάλαιο όπου θα εξετάσουμε την έννοια του πεδίου πρώτα. Θα πρέπει να αναφερθεί, ότι κατ' εξαίρεση ο νόμος του Coulomb ισχύει και για φορτισμένες σφαίρες με σφαιρική κατανομή φορτίου, με την απόσταση r να μετράει από τα κέντρα τους.

Προβλήματα

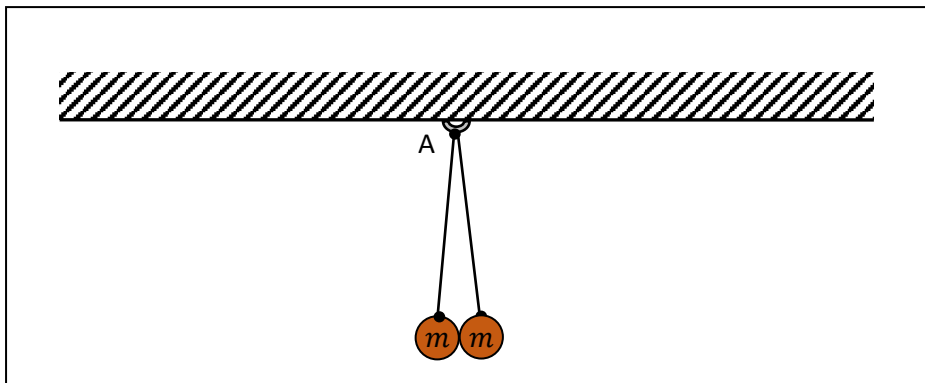
Πρόβλημα 1.1. Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα και πολύ ελαφριά λεπτά μεταλλικά ελάσματα τα οποία έχουν ένα κοινό σημείο A, αναρτούνται μέσω αβαρούς νήματος από την οροφή. Τα δυο ελάσματα μπορούν και περιστρέφονται ελεύθερα και ανεξάρτητα γύρω από το A. Επίσης ένα μικρό γυάλινο σφαιρίδιο, τρίβεται επάνω σε μεταξωτό ύφασμα ώστε το χαμηλότερό του σημείο B να ανταλλάξει φορτίο $4 \mu C$ με το ύφασμα. Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί εάν μεταφέρουμε το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του B να έρθει σε επαφή με τα ελάσματα στο κοινό τους σημείο A. Ποια ηλεκτρικά φαινόμενα λαμβάνουν χώρα; Σε κάθε φαινόμενο πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα (θυμηθείτε ότι στους μονωτές το επιπλέον φορτίο είναι εγκλωβισμένο ενώ αντίθετα στους αγωγούς μετακινείται ελεύθερα).



Πρόβλημα 1.2. Περιγράψτε αναλυτικά τι θα συμβεί στο προηγούμενο πρόβλημα εάν μεταφέρουμε κάπως διαφορετικά το σφαιρίδιο έτσι ώστε το σημείο του B να έρθει σε εγγύτητα με το κοινό σημείο A των ελασμάτων χωρίς όμως να έρθει σε άμεση επαφή μαζί του. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, πρέπει η απάντησή σας να συνοδεύεται και από αριθμητικά αποτελέσματα και να περιγράψετε τα εμφανιζόμενα ηλεκτρικά φαινόμενα. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το σύστημα των δυο ελασμάτων;

Πρόβλημα 1.3. Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα χάλκινα συμπαγή σφαιρίδια μάζας m το καθένα, αναρτούνται με ξεχωριστό αβαρές χαλύβδινο σύρμα το καθένα από τον ίδιο πλαστικό μικρό γάντζο στην οροφή. Τα δυο σύρματα είναι πανομοιότυπα με μήκος L και απειροελάχιστο πάχος το καθένα και συνδέονται σε ένα κοινό σημείο A. Αρχικά τα δυο σφαιρίδια είναι αφόρτιστα και ένας φοιτητής τοποθετεί με κάποιο τρόπο ένα συνολικό φορτίο q στο σημείο A και καταγράφει αμέσως

μετά την απόσταση x μεταξύ των δυο σφαιριδίων (από κέντρο σε κέντρο). Να βρείτε μια έκφραση του φορτίου q συναρτήσει των δεδομένων x, L, m αλλά και των σταθερών g (βαρυτική) και K (ηλεκτρική) της Φυσικής (Σημείωση: μπορείτε να θεωρήσετε κατάσταση ισορροπίας και να λάβετε προσεγγιστικά ότι για μικρές γωνίες ισχύει $\cos\theta \approx 1$. Τα σφαιρίδια μπορούν να εκληφθούν ως σημειακά κατά προσέγγιση).



Πρόβλημα 1.4. Δυο ετερόσημα σημειακά φορτία $\pm 3 \mu C$ τοποθετούνται επάνω στον άξονα x στις σταθερές θέσεις $x_1 = -1 \text{ mm}$ το αρνητικό και $x_2 = +3 \text{ mm}$ το θετικό φορτίο αντίστοιχα. Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $1 \mu C$ τοποθετείται στη θέση $x_3 = -2 \text{ mm}$ και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη μέτρου F_3 από τα δυο φορτία των $\pm 3 \mu C$. Να βρεθούν α) πόσο είναι το F_3 και β) σε ποια άλλη θέση επάνω στον άξονα x πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των $1 \mu C$ ώστε η συνιστάμενη δύναμη να έχει επίσης μέτρο F_3 ;

Πρόβλημα 1.5. Στο προηγούμενο πρόβλημα να βρεθεί σε ποια θέση επάνω στον άξονα x πρέπει να τοποθετηθεί το φορτίο των $1 \mu C$, έτσι ώστε η συνιστάμενη δύναμη που δέχεται από τα δυο φορτία των $\pm 3 \mu C$ (τα οποία είναι στερεωμένα σε σταθερές θέσεις) να είναι α) μηδέν και β) μέγιστη.

Πρόβλημα 1.6. Μια μεταλλική σφαίρα διαμέτρου 5 mm φορτίζεται με θετικό φορτίο $6 \mu C$. Ακολουθώς έρχεται σε ηλεκτρική επαφή με δεύτερη πανομοιότυπη σφαίρα μέσω ευθύγραμμου αγωγού απειροελάχιστου πάχους και μήκους L (ο αγωγός βρίσκεται επάνω σε άξονα που περνάει από τα δυο κέντρα των σφαιρών). Εάν η δύναμη μεταξύ των δυο σφαιρών είναι ίση με 4000 N , να βρεθεί το μήκος L .

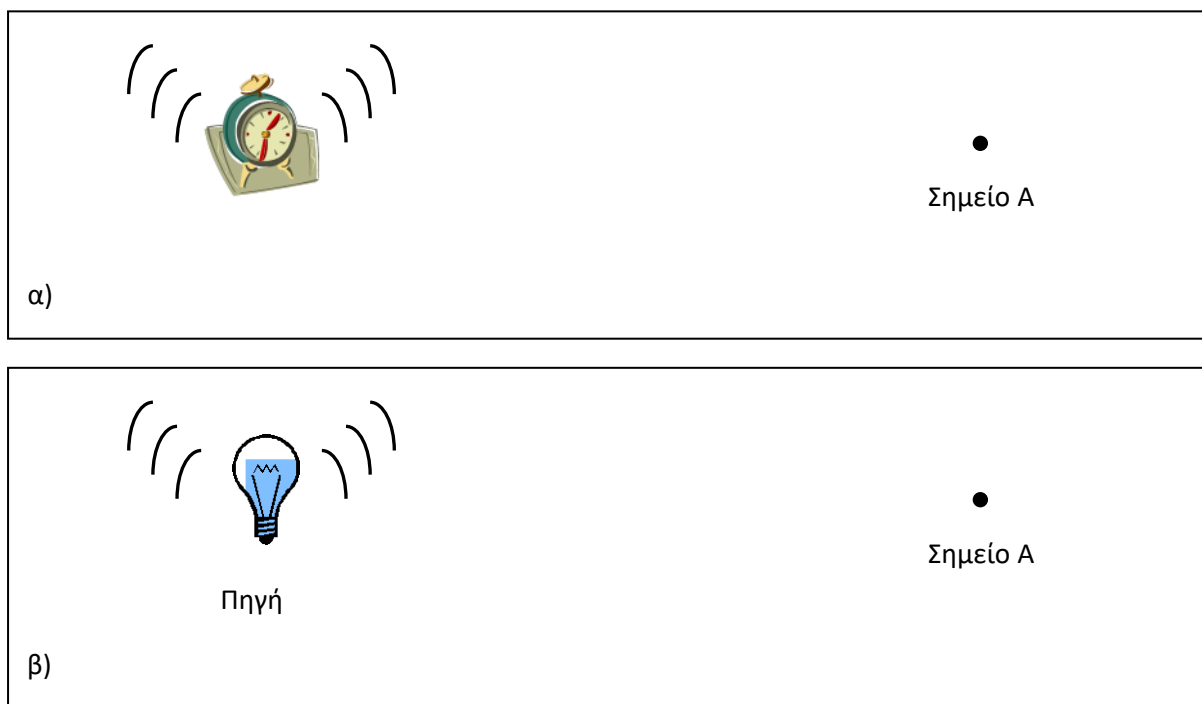
Πρόβλημα 1.7. Δυο πανομοιότυπα φορτία $+2 \mu C$ το καθένα, τοποθετούνται σε δυο διαδοχικές κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς 5 mm . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $4 \mu C$ τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τετραγώνου και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη F_3 από τα δυο φορτία των $+2 \mu C$. Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της F_3 .

Πρόβλημα 1.8. Δυο φορτία $\pm 2 \mu C$ τοποθετούνται στις δυο βάσεις ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 5 mm . Ένα τρίτο σημειακό φορτίο $4 \mu C$ τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τριγώνου και δέχεται μια συνιστάμενη δύναμη F_3 από τα δυο φορτία των $\pm 2 \mu C$. Να βρεθεί το μέτρο και η φορά της F_3 .

2. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

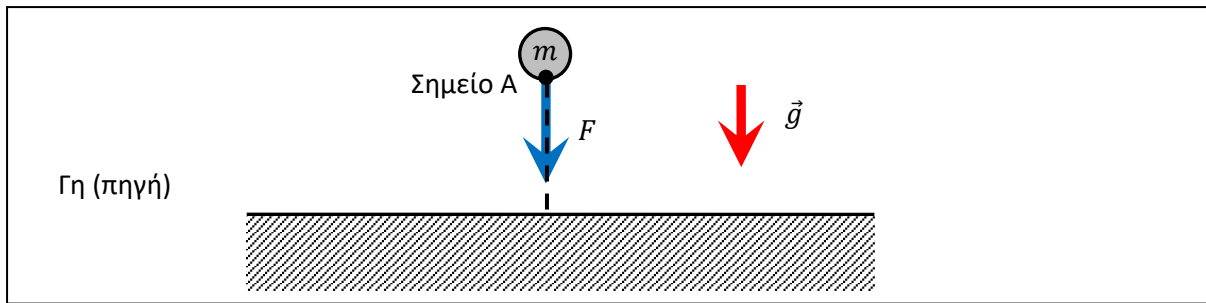
Ορισμός του Πεδίου

Ονομάζουμε πεδίο μια φυσική ποσότητα σε κάποιο σημείο του χώρου, η οποία δημιουργείται λόγω μιας μακρινής πηγής. Για παράδειγμα το ξυπνητήρι ρολόι στο παρακάτω Σχήμα 2.1α δημιουργεί ένα “ηχητικό πεδίο” στο σημείο A. Εάν τοποθετήσουμε το αυτί μας στο A θα ακούσουμε τον ήχο. Εάν κλείσουμε τα αυτιά μας δεν ακούμε πλέον αυτόν τον ήχο αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι ο ήχος δεν υπάρχει. Ο ήχος υπάρχει στο A είτε εμείς είμαστε εκεί είτε όχι. Επομένως το πεδίο είναι μια ιδιότητα του χώρου και γενικά παίρνει διαφορετικές τιμές από σημείο σε σημείο και άρα είναι μια συνάρτηση των συντεταγμένων του χώρου. Παρόμοιο παράδειγμα είναι ο ηλεκτρικός λαμπτήρας στο Σχήμα 2.1β ο οποίος δημιουργεί “πεδίο φωτός” στο A. Το φως υπάρχει εκεί είτε το κοιτάξουμε είτε όχι. Μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα και τα δυο πεδία στο A. Επίσης μπορούμε να έχουμε και δυο πεδία της ίδιας φύσης ταυτόχρονα σε ένα σημείο π.χ. ο ήχος από ένα αυτοκίνητο και από μια τηλεόραση λαμβάνονται ταυτόχρονα από το αυτί μας.



Σχήμα 2.1

Κλασσική περίπτωση πεδίου είναι η βαρύτητα όπου η γη δρα ως πηγή και έλκει αντικείμενα προς τα κάτω όπως η μάζα στο σημείο A στο Σχήμα 2.2. Επομένως στο A υπάρχει “βαρυτικό πεδίο” όπως λέμε και η F είναι η βαρυτική δύναμη.



Σχήμα 2.2

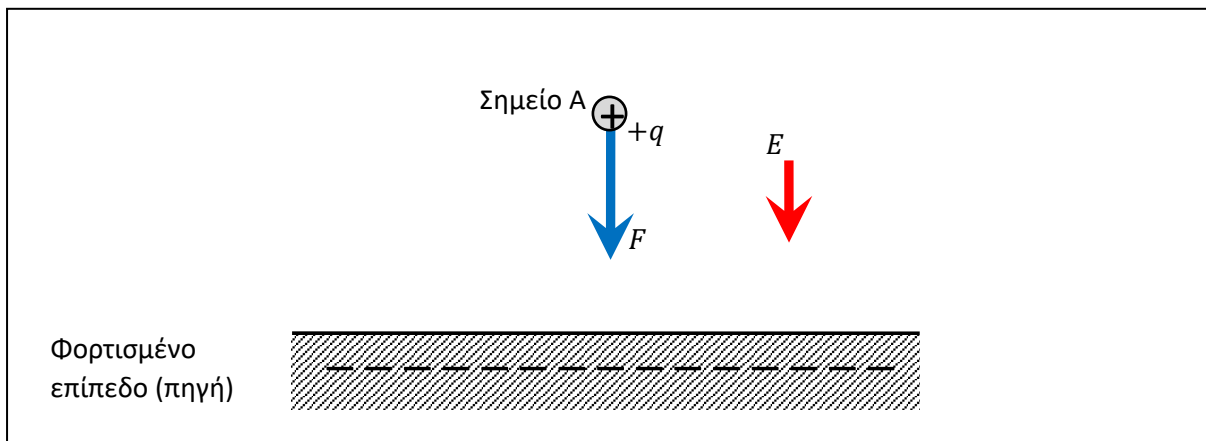
Για να ποσοτικοποιήσουμε το πεδίο βαρύτητας, ορίζουμε την ποσότητα

$$g = \frac{F}{m}$$

η οποία είναι η γνωστή μας σταθερά της βαρύτητας, το μέγεθος της οποίας χαρακτηρίζει το πεδίο, π.χ. για την γη $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ενώ για την σελήνη $g = 1.6 \text{ m/s}^2$, που υποδηλώνει ένα σημαντικά ασθενέστερο πεδίο από αυτό της γης.

Ηλεκτρικό Πεδίο

Παρόμοια με την βαρύτητα, μια αρνητικά φορτισμένη οριζόντια πλάκα όπως αυτή που εικονίζεται στο Σχήμα 2.3, δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A έτσι ώστε όταν ένα άλλο σημειακό φορτίο q τοποθετηθεί εκεί, θα δράσει επάνω του μια δύναμη F . Δηλαδή εδώ η πλάκα παίζει το ρόλο της γης και το σημειακό φορτίο παίζει το ρόλο της σημειακή μάζας. Το ηλεκτρικό πεδίο της φορτισμένης πλάκας υπάρχει στο σημείο A είτε εμείς τοποθετήσουμε εκεί το σημειακό φορτίο είτε όχι.



Σχήμα 2.3

Παρόμοια με το βαρυτικό πεδίο, ορίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} ως

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Ηλεκτρικό Πεδίο	2.1
-------------------------------	-----------------	-----

Οι μονάδες του E σύμφωνα με την παραπάνω ορισμό είναι τα N/C και η φυσική σημασία του είναι ότι όσο μεγαλύτερο είναι το E , τόσο πιο ισχυρή είναι η πηγή που το παράγει (για δεδομένη απόσταση από την πηγή). Το σημειακό φορτίο που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της Εξίσωσης 2.1 ονομάζεται "υποθετικό" ή "δοκιμαστικό" φορτίο επειδή μπορούμε να το απομακρύνουμε μετά τον προσδιορισμό του πεδίου, δηλαδή δεν χρειάζεται να είναι παρόν στο σημείο A για να υπάρχει το πεδίο. Το χρησιμοποιούμε δηλαδή μόνο για τη μέτρηση του E . Ο μόνος περιορισμός του σημειακού φορτίου είναι ότι α) πρέπει να είναι σημειακό και β) το φορτίο του πρέπει να είναι μικρό σε σχέση με το φορτίο της πηγής ώστε να μην διαταράξει το πεδίο της. Π.χ. εάν γνωρίζουμε ότι το φορτίο της πλάκας στο Σχήμα 2.3 είναι ίσο με $20 \mu C$ και οι διαστάσεις της πλάκας αλλά και η απόσταση του A από την πλάκα είναι μερικά μέτρα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούσαμε ως "δοκιμαστικό φορτίο" ένα μικρό φορτισμένο σφαιρίδιο διαμέτρου $1 mm$ (κατά προσέγγιση σημειακό αφού οι διαστάσεις του είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του προβλήματος) και με φορτίο $0.1 \mu C$ (μικρό σχετικά με το φορτίο της πηγής).

Όπως φαίνεται από την Εξ. 2.1, το \vec{E} είναι ένα διάνυσμα. Σε αντίθεση με το βαρυτικό πεδίο όπου οι μάζες είναι πάντοτε θετικές, τα δοκιμαστικά φορτία μπορεί να είναι είτε θετικά είτε αρνητικά. Από τους κανόνες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα που μελετήσαμε στη Φυσική Ι (ανατρέξτε στον 1^ο τόμο), βλέπουμε ότι όταν το q είναι θετικό, τότε τα \vec{E} και \vec{F} έχουν την ίδια φορά ενώ όταν το q είναι αρνητικό, τα \vec{E} και \vec{F} έχουν αντίθετη φορά. Ο κανόνας αυτός φαίνεται στον Πίνακα 2.1

$q: +$	\vec{E} παράλληλα με την \vec{F}
$q: -$	\vec{E} αντι-παράλληλα με την \vec{F}

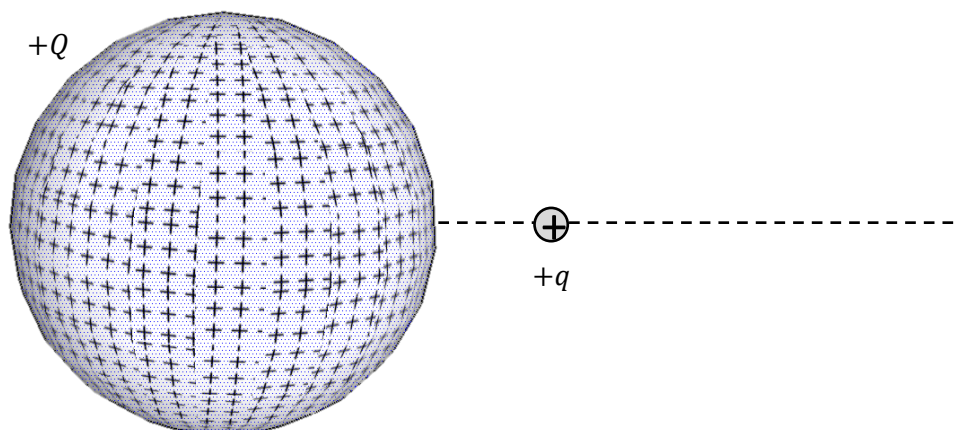
Πίνακας 2.1

Για να βρούμε το μέτρο του πεδίου, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την απόλυτη τιμή του q σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$E = \frac{F}{ q }$	Μέτρο του Ηλεκτρικού Πεδίου	2.2
---------------------	-----------------------------	-----

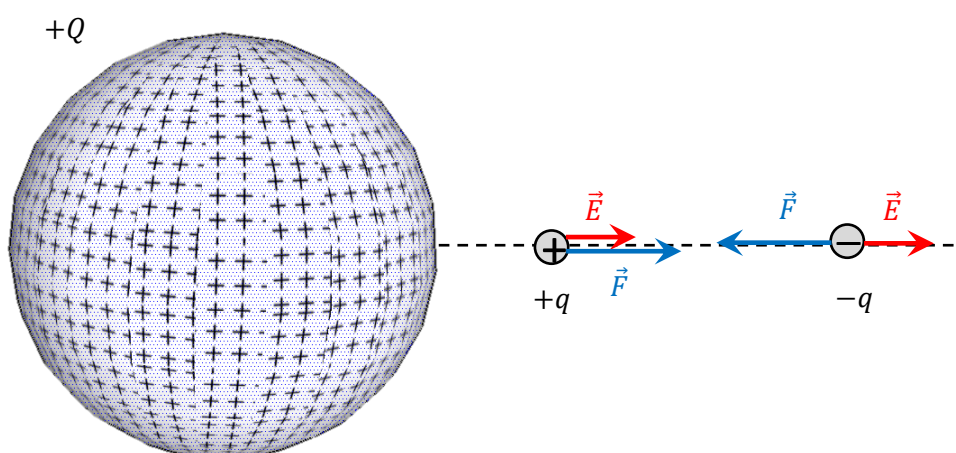
όπου F είναι το μέτρο της δύναμης.

Παράδειγμα 2.1: Στο παρακάτω σχήμα η μεγάλη σφαίρα φέρει μεγάλο θετικό φορτίο $+Q$. Βρείτε την φορά του \vec{E} που δημιουργεί η σφαίρα αυτή στην περιοχή που βρίσκεται το σημειακό φορτίο $+q$. Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν αντικαθιστούσαμε το θετικό σημειακό φορτίο με ένα αρνητικό σημειακό φορτίο $-q$ και σε διπλάσια απόσταση από τη σφαίρα; Πως θα άλλαζε η απάντησή σας εάν η σφαίρα ήταν αρνητικά φορτισμένη;

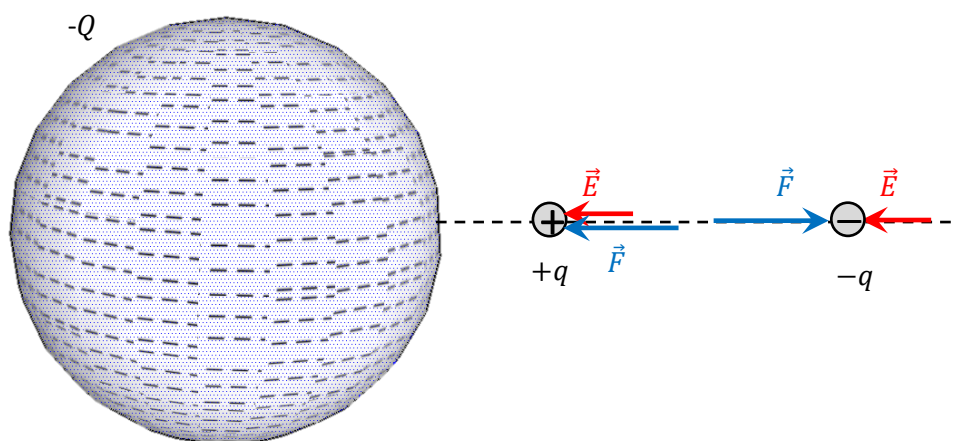
Λύση:

Η φορά των δυνάμεων F και των ηλεκτρικών πεδίων E φαίνονται στο παρακάτω σχήμα με την μορφή διανυσμάτων και για τα δυο φορτία $\pm q$ (υποθέτοντας ότι είναι παρόν μόνο το ένα την κάθε φορά). Η φορά των δυνάμεων εξηγείται με τον απλό κανόνα έλξης – άπωσης του κάθε φορτίου με τη σφαίρα. Η φορά των ηλεκτρικών πεδίων είναι η ίδια με την φορά των δυνάμεων στην περίπτωση του θετικού δοκιμαστικού φορτίου $+q$ και αντίθετη στην περίπτωση του αρνητικού δοκιμαστικού φορτίου $-q$.

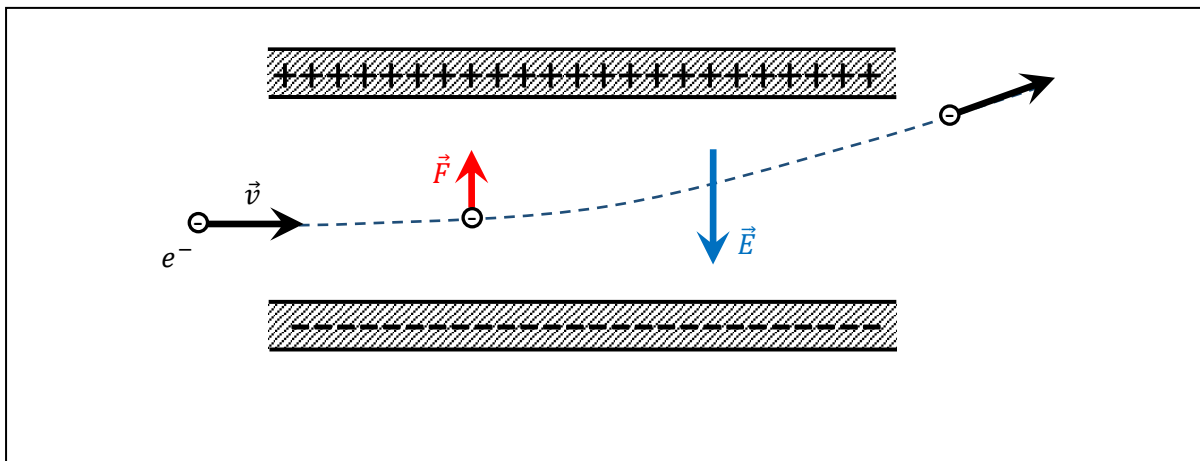
Παρατηρήστε ότι η φορά του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή, π.χ. κατευθύνεται μακριά από την πηγή (σφαίρα) σε αυτό το σχήμα. Έτσι το \vec{E} είναι όντως μια ποσότητα που χαρακτηρίζει πλήρως το πεδίο στο χώρο ανεξαρτήτως της φύσης του δοκιμαστικού φορτίου που χρησιμοποιούμε.



Όταν η σφαίρα φορτιστεί αρνητικά, όπως στο παρακάτω σχήμα, η φορά των δυο δυνάμεων αλλά και του πεδίου αλλάζει. Και πάλι η φορά του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή, π.χ. κατευθύνεται προς αυτήν (σφαίρα).



Παράδειγμα 2.2: Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δυο αντίθετα φορισμένων πλακών του παρακάτω σχήματος είναι σταθερό με μέτρο $5 \times 10^4 \text{ N/C}$ προς τα κάτω. Ποιο είναι το μέγεθος και η φορά της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο το οποίο εισέρχεται οριζόντια μεταξύ των πλακών;



Λύση:

Από την Εξ 2.2, η δύναμη έχει μέτρο

$$F = |q|E = 1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^4 = 8.0 \times 10^{-15} \text{ N}$$

Γνωρίζουμε ότι η φορά της \vec{F} για αρνητικό φορτίο είναι αντίθετη από την φορά του \vec{E} και έτσι η δύναμη είναι προς τα πάνω. Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και με τον απλό κανόνα έλξης – άπωσης των ετερόσημων-ομόσημων φορτίων αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.3.

Ένα σημειακό φορτίο $+2 \mu\text{C}$ τοποθετείται σε ένα σημείο P μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο και του ασκείται μια δύναμη $8 \times 10^{-4} \text{ N}$ προς τα κάτω. Ποια είναι η φορά και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτό το σημείο;

Λύση:

Από την Εξ 2.2, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο

$$E = \frac{F}{|q|} = \frac{8 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 400 \text{ N/C}$$

Αφού το σημειακό φορτίο είναι θετικό τότε το πεδίο και η δύναμη έχουν την ίδια φορά και έτσι το E είναι και αυτό προς τα κάτω.

Παράδειγμα 2.4. Ένα σημειακό φορτίο -5 nC τοποθετείται στο ίδιο σημείο P του προηγούμενου προβλήματος. Ποια είναι η φορά και το μέτρο της δύναμης σε αυτό το φορτίο των -5 nC ;

Λύση: Το πεδίο δημιουργείται από την πηγή (η οποία είναι άγνωστη σε αυτά τα δυο παραδείγματα) και όχι από τα δοκιμαστικά φορτία που φέρουμε σε κάποιο σημείο (όπως και το βαρυτικό πεδίο σε κάποιο σημείο δεν εξαρτάται από την μάζα που φέρουμε στο συγκεκριμένο σημείο). Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, το πεδίο είναι προς τα κάτω με μέτρο $E = 400 \text{ N/C}$. Αφού όμως το φορτίο q' αυτού του προβλήματος είναι αρνητικό, η δύναμη F' που δρα πάνω του είναι αντίθετη από το πεδίο E και έτσι είναι προς τα πάνω και με μέτρο που δίνεται από την Εξ. 2.2

$$F' = |q'|E = 5 \times 10^{-9} \times 400 = 2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

Παράδειγμα 2.5: Σε κάποιο σημείο του χώρου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο 40 N/C και φορά προς τα αριστερά. Ένα άγνωστο φορτίο σε αυτό το σημείο δέχεται μια δύναμη $5 \times 10^{-5} \text{ N}$ προς τα δεξιά. Ποιο είναι το πρόσημο και η τιμή αυτού του φορτίου;

Λύση: Αφού η φορά του \vec{E} είναι αντίθετη της φοράς της \vec{F} τότε το φορτίο q είναι αρνητικό. Από την Εξίσωση 2.2 έχουμε:

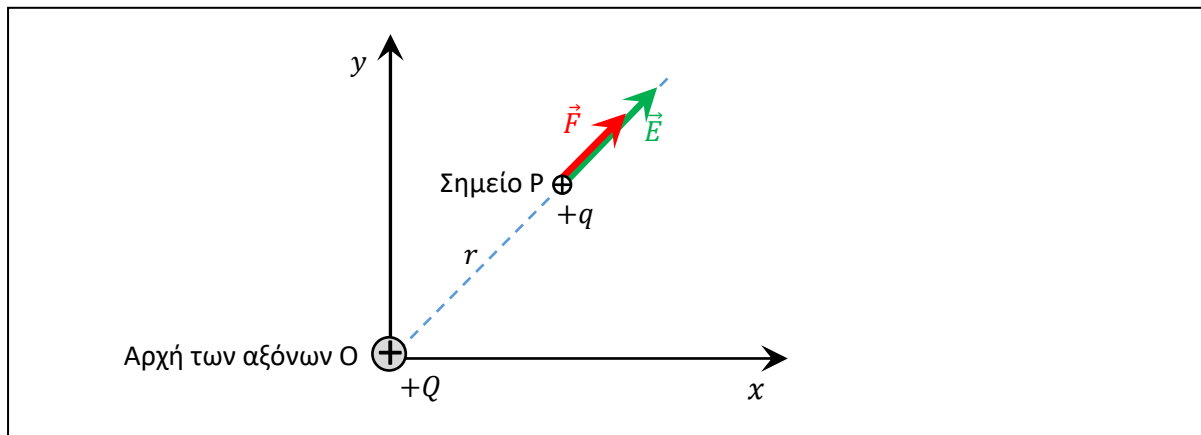
$$|q| = \frac{F}{E} = \frac{5 \times 10^{-5}}{40} = 1.25 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου για πηγές με απλή γεωμετρία

Η Εξ. 2.2 είναι χρήσιμη όταν είναι γνωστή η δύναμη που δρα σε ένα σημειακό φορτίο. Σε πολλές περιπτώσεις όμως δεν είναι γνωστή μια τέτοια δύναμη αλλά αντίθετως είναι δεδομένα κάποια φορτία που παράγουν ένα πεδίο και η γεωμετρία του χώρου, π.χ. μια φορτισμένη επίπεδη πλάκα με καθορισμένες διαστάσεις. Γενικά ο υπολογισμός του E για φορτισμένες πηγές τυχαίου σχήματος είναι δύσκολος. Υπάρχουν όμως κάποιες απλές περιπτώσεις με γεωμετρική συμμετρία στις οποίες ο υπολογισμός είναι εφικτός. Κάποιες από αυτές θα εξετασθούν στα επόμενα εδάφια ενώ οι υπόλοιπες θα δοθούν ως προβλήματα στο τέλος του κεφαλαίου, δείτε τον Πίνακα 2.2. Θα ξεκινήσουμε στο επόμενο εδάφιο από την πιο τετριμμένη περίπτωση που είναι το σημείο, δηλαδή η πηγή θα είναι σημειακή. Αυτό γίνεται επειδή ο υπολογισμός είναι πολύ εύκολος αλλά και γιατί το αποτέλεσμα θα αποτελέσει βάση για πιο πολύπλοκους υπολογισμούς με κατανομές φορτίου σε στερεά. Ακολουθώντας θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο των εξής φορτισμένων σωμάτων: δακτυλίου, γραμμής και φύλλου.

α) Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου

Έστω ότι στο παρακάτω Σχήμα 2.4 υπάρχει ένα μεγάλο σημειακό φορτίο Q στην αρχή των αξόνων O το οποίο δρα ως πηγή και ότι παράγει πεδίο \vec{E} σε κάποιο τυχαίο σημείο P του χώρου σε απόσταση r από αυτό.



Σχήμα 2.4

Εάν φέρουμε ένα δεύτερο μικρό δοκιμαστικό φορτίο q στο σημείο P , τότε λόγω αλληλεπίδρασης με το Q , θα δράσει επάνω του μια δύναμη F η οποία σύμφωνα με τον νόμο του *Coulomb* έχει μέτρο:

$$F = k \frac{|Q||q|}{r^2}$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου από την Εξ. 2.2 ισούται με $E = F/|q|$ και άρα:

$E = k \frac{ Q }{r^2}$	Μέτρο Ηλεκτρικού Πεδίου Σημειακού Φορτίου Q	2.3
-------------------------	--	-----

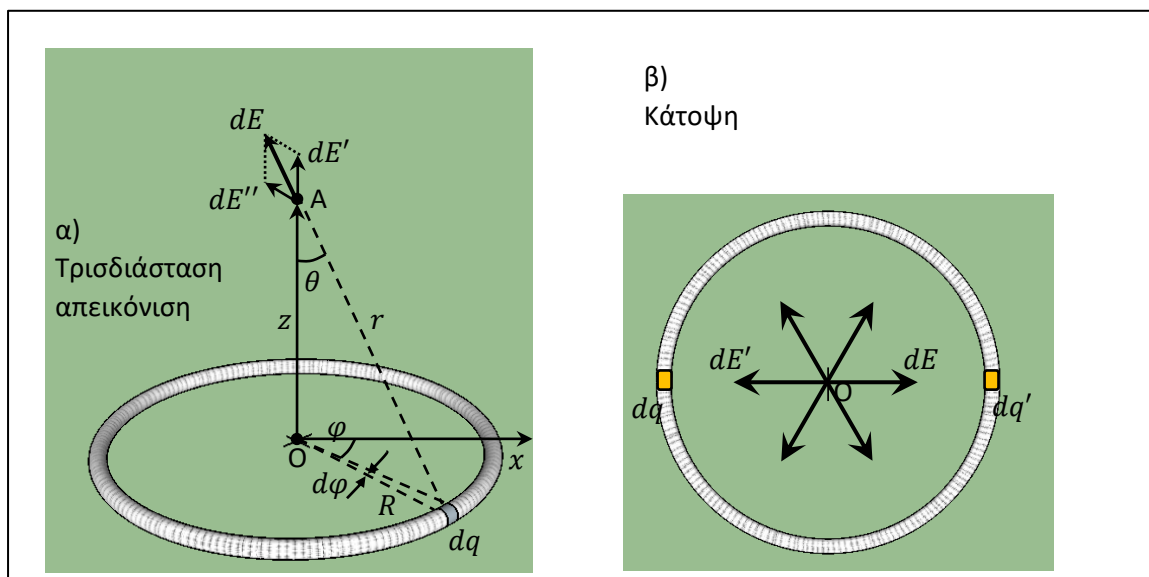
Αφού η πηγή Q είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων, τότε το διάνυσμα \vec{OP} είναι το διάνυσμα θέσης \vec{r} του σημείου P και η φορά του \vec{E} είναι κατά μήκος του \vec{r} για θετικό Q και αντίθετη του \vec{r} για αρνητικό Q . Εάν \vec{e}_r είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του \vec{r} , τότε μπορούμε να γράψουμε μια διανυσματική εξίσωση για το \vec{E} :

$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$	Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειακού Φορτίου Q	2.4
---------------------------------------	--	-----

Προσέξτε ότι στην παραπάνω εξίσωση δεν χρησιμοποιούμε πλέον απόλυτη τιμή για το Q αφού το πρόσημό του είναι εκείνο που καθορίζει τη φορά του \vec{E} (παράλληλο ή αντιπαράλληλο με το \vec{e}_r για $Q > 0$ και $Q < 0$ αντίστοιχα). Έτσι για αρνητικό φορτίο Q , η φορά του \vec{E} είναι προς το Q . Παρότι που σε πρακτικές εφαρμογές σπάνια εμφανίζονται σημειακά φορτία, εντούτοις η Εξ. 2.3 θα αποτελέσει τη βάση για πιο δύσκολους υπολογισμούς με συνεχείς κατανομές φορτίου, μέσω ολοκλήρωσης, όπως θα φανεί στις επόμενες δυο περιπτώσεις παρακάτω.

β) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου λεπτού δακτυλίου

Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο ενός λεπτού δακτυλίου όπως αυτού που εικονίζεται στο Σχήμα 2.5α (στα αριστερά), με αμελητέο πάχος, ακτίνα R και ομοιόμορφα φορτισμένο με φορτίο Q , σε σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, για τον υπολογισμό του πεδίου, "τεμαχίζουμε" τον δακτύλιο σε απειροστά κομμάτια που αντιστοιχούν σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και περιέχουν φορτίο dq το καθένα. Πριν όμως καταφύγουμε σε οποιοδήποτε υπολογισμό του πεδίου στο σημείο A , είναι χρήσιμο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο O του δακτυλίου, δηλαδή στο $z = 0$, είναι ίσο με μηδέν. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2.5β (στα δεξιά) όπου λόγω συμμετρίας, για κάθε στοιχειώδες φορτίο όπως το dq το οποίο απέχει απόσταση R από το σημείο O , υπάρχει και το αντιδιαμετρικό του ίσο φορτίο dq' (η ισότητα είναι λόγω ομοιογενούς κατανομής) το οποίο απέχει επίσης απόσταση R από το O και έτσι σύμφωνα με την Εξ. 2.3 δημιουργούν δυο ίσα και αντίθετα πεδία dE και dE' τα οποία αλληλοαναιρούνται. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο σε όλα τα σημεία του κύκλου, τα διανύσματα που προκύπτουν σχηματίζουν έναν αστέρα με συνολική συνισταμένη $E = 0$.



Σχήμα 2.5

Επιστρέφοντας τώρα στο αρχικό πρόβλημα, δηλαδή στον υπολογισμό του πεδίου στο σημείο A του Σχήματος 2.5α (στα αριστερά), παρατηρούμε ότι σε αυτό το σημείο το φορτίο dq σύμφωνα με την Εξ. 2.3 δημιουργεί ένα πεδίο μέτρου

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, όπου r είναι η απόσταση από το dq έως το σημείο A . Προσέξτε ότι αυτή η απόσταση είναι σταθερή για όλα τα φορτία επάνω στον δακτύλιο αφού όπως κινούμαστε επάνω σε αυτόν, το r σαρώνει ένα νοητό κώνο με βάση τον δακτύλιο και κορυφή το σημείο A . Δηλαδή το r ισούται με την πλευρά του κώνου η οποία είναι σταθερή. Αναλύουμε το dE σε δυο συνιστώσες, μια dE' κατά μήκος του άξονα z και μια dE'' κάθετη σε αυτόν. Εάν ολοκληρώσουμε σε όλο τον δακτύλιο, οι συνιστώσες dE'' σχηματίζουν ένα διανυσματικό αστέρα παρόμοιο με αυτό του Σχήματος 2.5β (στα δεξιά) και έτσι αλληλοαναιρούνται μεταξύ τους. Επομένως το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο στο A έχει μόνο z -συνιστώσα η οποία είναι ίση με

$$dE' = dE \cos\theta = k \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

όπου θ είναι η γωνία του κώνου και είναι επίσης σταθερή όπως περιστρεφόμαστε επάνω στο δακτύλιο. Αφού η κατανομή του φορτίου είναι ομοιογενής κατά μήκος του δακτυλίου, ένας λόγος δυο γωνιών θα είναι ίσος με τον αντίστοιχο λόγο των φορτίων που περιέχουν αυτές οι γωνίες. Επιλέγοντας ως πρώτη γωνία την στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και ως δεύτερη την γωνία 2π του όλου δακτυλίου, μπορούμε να γράψουμε για τους λόγους ότι

$$\frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{dq}{Q} \Rightarrow dq = Q \frac{d\varphi}{2\pi}$$

Επομένως η z -συνιστώσα του dE ισούται με

$$dE' = k \frac{Q}{2\pi r^2} \cos\theta d\varphi$$

Δε μένει παρά να ολοκληρώσουμε επάνω στον δακτύλιο και να βγάλουμε εκτός ολοκληρώματος τόσο τις φυσικές σταθερές όσο και τα Q , r και θ αφού και αυτά είναι σταθερά. Έτσι:

$$E = k \frac{Q}{2\pi r^2} \cos\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = k \frac{Q}{r^2} \cos\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία $\cos\theta = z/R$ οπότε

$$E = kQ \frac{z}{r^3}$$

Το z δεν είναι δεδομένο του προβλήματος αλλά μπορούμε να το γράψουμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος συναρτήσει των z και R . Το τελικό αποτέλεσμα είναι το

$E = kQ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$	Ηλεκτρικό Πεδίο Λεπτού Δακτυλίου στη Μεσοκάθετο	2.5
--------------------------------------	--	-----

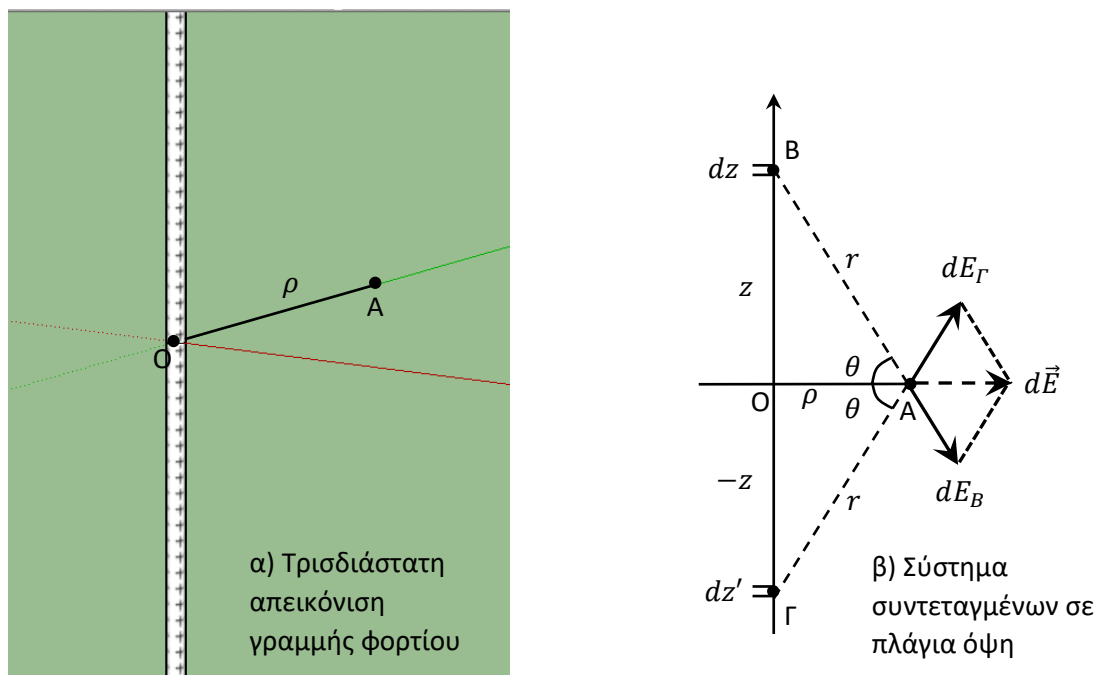
γ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους

Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης γραμμής απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ (φορτίο ανά μήκος) σε απόσταση ρ από τη γραμμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6α (στα αριστερά). Εάν "τεμαχίσουμε" τη γραμμή φορτίου σε πολύ μικρά κομμάτια, τότε το καθένα από αυτά θα δρα ως σημειακή πηγή και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.3 η οποία ισχύει για σημειακό φορτίο. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο Σχήμα 2.6β (στα δεξιά) με τη γραμμή φορτίου να βρίσκεται επάνω στον άξονα z . Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο Α στο χώρο και φέρουμε από αυτό την κάθετο προς τη γραμμή φορτίου στο σημείο Ο το οποίο το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Από τα δεδομένα, η απόσταση ΟΑ είναι ίση με ρ . Χωρίζουμε την γραμμή φορτίου σε μικρά ίσα απειροστά τμήματα μήκους dz το καθένα. Έστω ένα τέτοιο τμήμα στο σημείο Β το οποίο απέχει απόσταση z από το Ο. Από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ , το στοιχειώδες

τμήμα dz περιέχει φορτίο $dq = \lambda dz$. Σύμφωνα με την Εξ. 2.3, το σημειακό φορτίο dq δημιουργεί στο σημείο A ένα απειροστό πεδίο ίσο με:

$$dE_B = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda dz}{r^2}$$

με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, όπου r είναι η απόσταση AB. Θυμηθείτε ότι για θετικό σημειακό φορτίο το πεδίο έχει φορά απομακρυνόμενη από αυτό.



Σχήμα 2.6

Λόγω συμμετρίας προερχόμενη από το άπειρο μήκος της γραμμής, για κάθε σημείο όπως το B στο Σχήμα 2.6β με συντεταγμένη z , υπάρχει και το αντίστοιχο συμμετρικό του σημείο Γ με συντεταγμένη $-z$ το οποίο δημιουργεί πεδίο dE_Γ στο A. Επειδή το φορτίο dq' του Γ είναι ίσο με το dq του B (ομοιόμορφη κατανομή) και επειδή τα B και Γ ισαπέχουν από το A, τότε αναγκαστικά $dE_\Gamma = dE_B$ κατά μέτρο και έτσι το συνιστάμενο $d\vec{E}$ έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα, η οποία είναι κάθετη στη γραμμή φορτίου. Το μέτρο αυτού του συνιστάμενου πεδίου είναι ίσο με

$$dE = dE_B \cos\theta + dE_\Gamma \cos\theta = 2dE_B \cos\theta = 2k \frac{\lambda dz}{r^2} \cos\theta$$

Για να βρούμε το ολικό πεδίο E ολοκληρώνουμε επάνω σε όλη τη γραμμή φορτίου (ΓΦ), δηλαδή σε όλα τα ζευγάρια όπως το B και Γ:

$$E = 2k\lambda \int_{\Gamma\Phi} \frac{dz}{r^2} \cos\theta$$

Εκφράζουμε όλες τις μεταβλητές μέσα στο ολοκλήρωμα συναρτήσει του θ και της δεδομένης απόστασης ρ . Από απλή γεωμετρία έχουμε ότι $z = \rho \tan\theta$ οπότε

$$dz = \frac{\rho}{\cos^2\theta} d\theta$$

Επίσης $r \cos \theta = \rho$ οπότε $r = \rho / \cos \theta$. Για να βρούμε τα όρια του θ σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού δουλεύουμε με ζευγάρια σημείων όπως το Β και Γ, πρέπει να αθροίσουμε μόνο στον θετικό ημιάξονα z αφού αυτομάτως έχουμε συμπεριλάβει και τα αρνητικά z με τον παράγοντα 2 στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Ο θετικός ημιάξονας z αντιστοιχεί σε όρια από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi/2$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

$$E = 2k\lambda \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \cos \theta \frac{\rho}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{2k\lambda}{\rho} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2k\lambda}{\rho} [\sin \theta]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

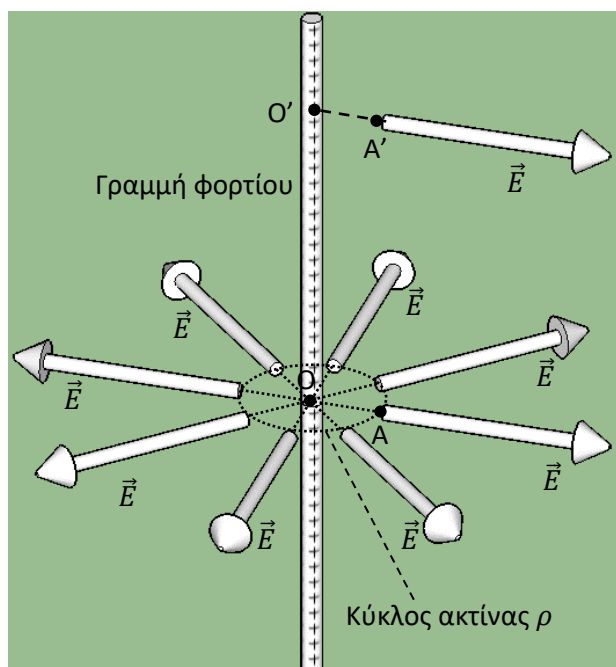
Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$E = \frac{2k\lambda}{\rho}$	Ηλεκτρικό Πεδίο Άπειρης Γραμμής Φορτίου	2.6
------------------------------	--	-----

Εάν ορίσουμε ως $\vec{\rho}$ το διάνυσμα \overrightarrow{OA} στο Σχήμα 2.6 (στην ουσία είναι η πολική ακτίνα στις πολικές συντεταγμένες) και το αντίστοιχο μοναδιαίο \vec{e}_ρ κατά μήκος του $\vec{\rho}$ κάθετο στον αγωγό με φορά προς το άπειρο, τότε μπορούμε να γράψουμε και μια διανυσματική εξίσωση για το \vec{E} :

$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{\rho} \vec{e}_\rho$	Ηλεκτρικό Πεδίο Άπειρης Γραμμής Φορτίου	2.7
---	--	-----

Προσέξτε ότι το πρόσημο του λ του είναι εκείνο που καθορίζει τη φορά του \vec{E} (παράλληλο ή αντιπαράλληλο με το \vec{e}_ρ). Δηλαδή για αρνητική κατανομή φορτίου, το λ είναι αρνητικό και το \vec{E} δείχνει προς τον αγωγό.



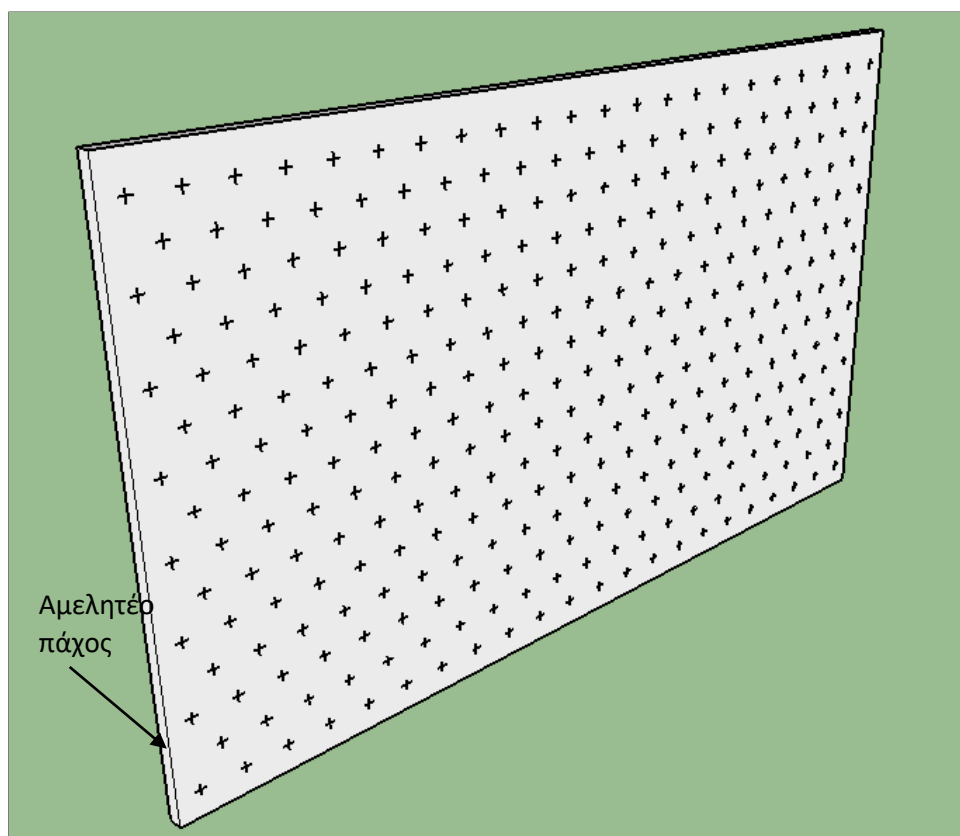
Σχήμα 2.7

Το σημείο Α στο Σχήμα 2.6 είναι ένα τυχαίο σημείο. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι πρέπει να απέχει απόσταση ρ από την γραμμή φορτίου. Το προκύπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη γραμμή

φορτίου. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7, υπάρχουν άπειρα σημεία που απέχουν απόσταση ρ από τη γραμμή και έχουν ηλεκτρικό πεδίο κάθετο σε αυτή, όπως αυτά που βρίσκονται επάνω στον διακεκομμένο κύκλο με ακτίνα ρ και κέντρο την αρχή των αξόνων O . Ανάλογα με το ποιο σημείο εξετάζουμε, το ηλεκτρικό πεδίο ως διάνυσμα είναι ακτινικό (σαν τις ακτίνες του ποδηλάτου) και προς τα έξω (για θετικό φορτίο). Επίσης, στην ανάλυση του Σχήματος 2.6, δουλέψαμε συμμετρικά ως προς την αρχή O ώστε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία ως προς $\pm z$. Επειδή όμως η γραμμή είναι απείρου μήκους, μπορούμε να λάβουμε την αρχή σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της γραμμής όπως το O' στο Σχήμα 2.7, να εφαρμόσουμε την ίδια ανάλυση και να βρούμε το πεδίο στο σημείο A' το οποίο θα είναι και αυτό ακτινικό.

δ) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων

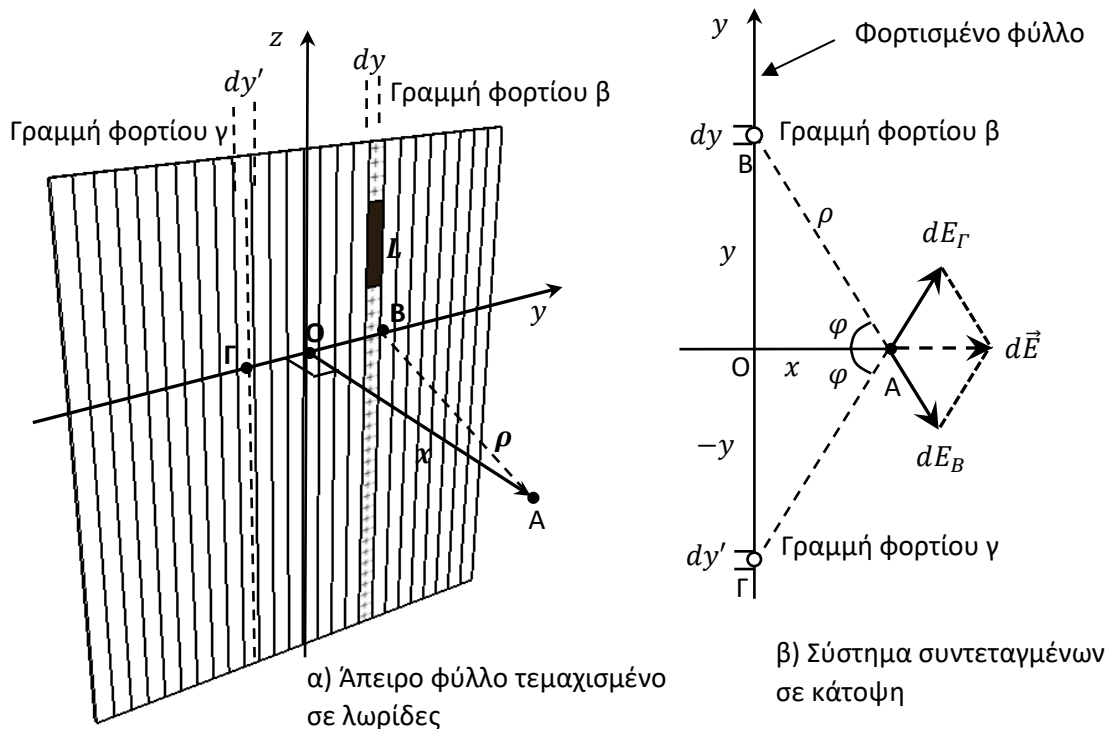
Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο ενός φορτισμένου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων και αμελητέου πάχους όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχήμα 2.7 παρακάτω, το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας).



Σχήμα 2.8

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.9α (στα αριστερά), "τεμαχίζουμε" το φύλλο σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών λωρίδων απειροστού πάχους ο καθένας, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμές φορτίου και έτσι να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της Εξ. 2.6 παραπάνω. Τοποθετούμε τον άξονα z κατά μήκος των γραμμών φορτίων, όπως κάναμε και στο προηγούμενο

εδάφιο και τον άξονα y έτσι ώστε να διαπερνάει το φύλλο, κάθετα προς τις γραμμές φορτίου που τεμαχίσαμε. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο A που απέχει απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων O. Έτσι θα ολοκληρώσουμε επάνω σε όλες τις γραμμές φορτίου δηλαδή κατά μήκος του άξονα y .



Σχήμα 2.9

Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την Εξ. 2.6, πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμική πυκνότητα της κάθε γραμμής φορτίου, δεδομένου ότι στο παρόν πρόβλημα μας δίνεται μόνο η επιφανειακή πυκνότητα. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε τη γραμμή φορτίου β στο Σχήμα 2.9α (στα αριστερά) η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο B και θεωρήστε ένα μικρό τμήμα της μήκους L . Το στοιχειώδες εμβαδό (κοιτώντας κάθετα προς το φύλλο) αυτού του τμήματος είναι ίσο με $dA = Ldy$ (μήκος \times πλάτος) και άρα από τον ορισμό του σ περιέχει φορτίο $dq = \sigma dA = \sigma Ldy$. Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με

$$\frac{dq}{L} = \sigma dy$$

Θα ονομάσουμε αυτή τη γραμμική πυκνότητα ως $d\lambda$ επειδή ως γινόμενο πεπερασμένου αριθμού επί απειροστού αριθμού, είναι και η ίδια απειροστή σε μέγεθος. Σύμφωνα λοιπόν με την Εξ. 2.6, αυτή η γραμμή φορτίου δημιουργεί στο A ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο ίσο με

$$dE_B = \frac{2k}{\rho} d\lambda$$

όπου ρ είναι η απόσταση ΒΑ από τη γραμμή φορτίου β έως το σημείο παρατήρησης. Θεωρήστε τώρα την κάτοψη στο Σχήμα 2.9β (στα δεξιά). Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, το $d\vec{E}_B$ είναι κάθετο προς τη γραμμή φορτίου με φορά προς το άπειρο (απομακρυνόμενο από τη γραμμή) και άρα ανήκει στην σελίδα του Σχήματος 2.9β αφού η γραμμή τέμνει το σχήμα αυτό κάθετα. Επομένως το $d\vec{E}_B$ βρίσκεται επάνω στην προέκταση της ευθείας ΒΑ. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τα ίδια βήματα της απόδειξης του προηγούμενου εδαφίου, δηλαδή θα θεωρήσουμε την γραμμή φορτίου η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Γ και η οποία ισαπέχει από τη γραμμή β ως προς την αρχή Ο. Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}_\Gamma$ έχει ίσο μέτρο με το $d\vec{E}_B$ και έτσι λόγω συμμετρίας το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE είναι κάθετο στον άξονα y δηλαδή κάθετα στο φύλλο (κατά μήκος του άξονα x). Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.6β και 2.9β βλέπουμε ότι οι γεωμετρίες (για την ολοκλήρωση) είναι οι ίδιες και για τα δυο προβλήματα, με την μόνη διαφορά ότι εδώ έχουμε άλλο τύπο για το dE_B και ότι το r έχει αντικατασταθεί από το ρ και η γωνία θ από την φ . Έτσι όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε να γράψουμε τις εξής απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις

$$\rho \cos\varphi = x$$

$$y = x \tan\varphi \Rightarrow dy = x d\varphi / \cos^2\varphi$$

Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE λόγω συμμετρίας είναι ίσο με

$$dE = dE_B \cos\varphi + dE_\Gamma \cos\varphi = 2dE_B \cos\varphi$$

Εφόσον λάβαμε τις γραμμές φορτίου σε ζεύγη, αρκεί να ολοκληρώσουμε από $\varphi = 0$ έως και $\pi/2$ (και όχι μεταξύ $\pm\pi/2$ αλλιώς θα βρούμε διπλάσιο αποτέλεσμα από το κανονικό). Η ολοκλήρωση γίνεται

$$E = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} 2dE_B \cos\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{4k}{\rho} \cos\varphi d\lambda = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\rho} dy$$

ή

$$E = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{x} \cos\varphi \frac{x}{\cos^2\varphi} d\varphi = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi = 2k\pi\sigma$$

Σημείωση: Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιείται μια άλλη σταθερά ϵ_0 του ηλεκτρισμού αντί της k που είχαμε μέχρι τώρα, η οποία ονομάζεται "διηλεκτρική σταθερά του κενού" και η οποία σχετίζεται με την σταθερά k ως εξής

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I.}$	Διηλεκτρική σταθερά του κενού	2.8
---	-------------------------------	-----

Συναρτήσει αυτής της σταθεράς, το παραπάνω αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης γράφεται απλούστερα και ως

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

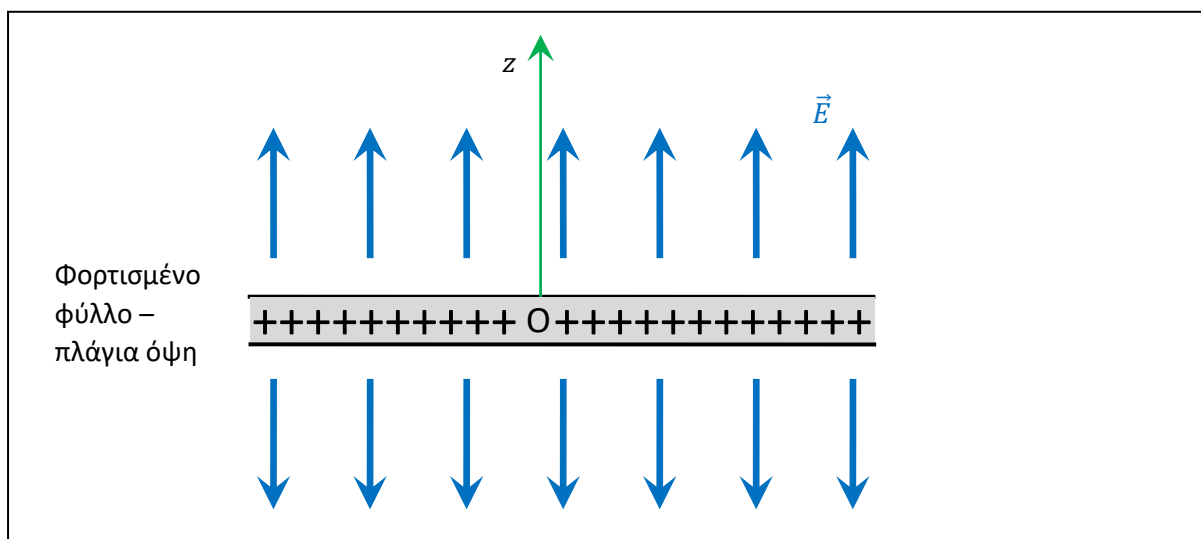
Στην παραπάνω ανάλυση στο Σχήμα 2.9β, θεωρήσαμε το \vec{E} μόνο από την δεξιά μεριά του φύλλου. Εάν εργαζόμασταν και στην αριστερή μεριά του, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο αλλά με την αντίθετη φορά δηλαδή το \vec{E} θα ήταν προς τα αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι το E αλλάζει φορά εκατέρωθεν του φύλλου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.10 όπου το φύλλο είναι οριζόντιο. Επομένως είναι πιο σωστό να γράψουμε ότι

$ E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.9
------------------------------------	--	-----

Θεωρώντας βέβαια ότι $\sigma > 0$. Μπορούμε να γράψουμε το \vec{E} και διανυσματικώς. Εάν π.χ. ο άξονας z στο Σχήμα 2.10 είναι κάθετος στο φύλλο με την αρχή των συντεταγμένων O επάνω στο φύλλο τότε:

$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, & z > 0 \end{cases}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.10
---	--	------

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μια ιδιαιτερότητα, δεν εξαρτάται καθόλου από την απόσταση, μόνο από την πυκνότητα του φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι είναι παντού σταθερό. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι το φύλλο είναι απείρων διαστάσεων. Σε πραγματικές περιπτώσεις όπου ένα φορτισμένο φύλλο έχει πεπερασμένες διαστάσεις, το πεδίο είναι όντως πολύ σταθερό κοντά στο φύλλο, αλλά φυσικά φθίνει με την απόσταση μακριά από αυτό. Η κατεύθυνση του E είναι κάθετη στο φύλλο, απομακρυνόμενο από αυτό για θετικό σ ενώ τείνει προς αυτό για αρνητικό σ . Σε κάθε πλευρά το E είναι αρκετά ομοιογενές όταν οι διαστάσεις του φύλλου είναι σχετικά μεγάλες.



Σχήμα 2.10

Παράδειγμα: Ένα φορτισμένο φύλλο διαστάσεων $6\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ έχει φορτίο $+12\mu\text{C}$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση 2 mm από το φύλλο.

Λύση: Η απόσταση των 2 mm είναι σχετικά μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις του φύλλου και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.9 που ισχύει για φύλλο απείρων διαστάσεων αφού όταν είμαστε πολύ κοντά στο φύλλο, αυτό θα μας φαίνεται τεράστιο. Η πυκνότητα φορτίου ισούται εξ' ορισμού με το φορτίο Q του φύλλου προς το εμβαδό του A και έτσι η Εξ. 2.9 γίνεται:

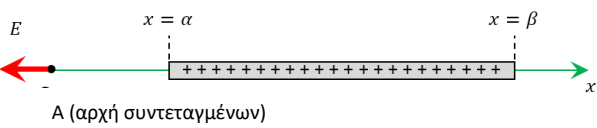
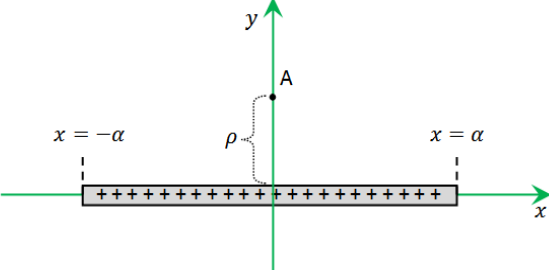
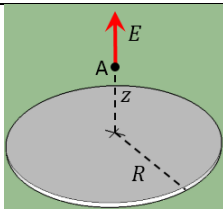
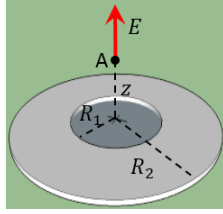
$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

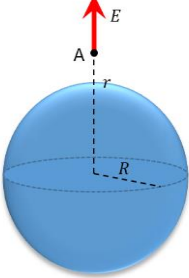
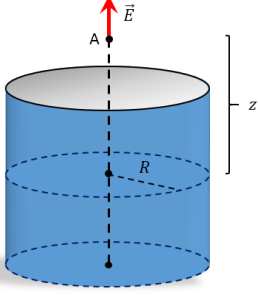
Το εμβαδό ισούται με $A = 0.06 \times 0.05 = 3 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ενώ το φορτίο ισούται με $Q = 12 \times 10^{-6} \text{C}$ και η σταθερά με $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{S.I.}$ Επομένως

$$E = \frac{1}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{12 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} = 2.25 \times 10^8 \text{ N/C}$$

Υπολογισμός του Ηλεκτρικού Πεδίου σε πιο σύνθετες γεωμετρίες

Στην επόμενη ενότητα δίνονται διάφορα άλυτα προβλήματα ως άσκηση, με μια ποικιλία γεωμετριών με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου επάνω τους στα οποία το ζητούμενο είναι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο σημείο στο χώρο. Συνήθως τα προβλήματα αυτά λύνονται με ολοκλήρωση κάποιου γνωστού αποτελέσματος όπως το σημειακό φορτίο ή το πεδίο δακτυλίου που είδαμε παραπάνω. Τα τελικά αποτελέσματα κάποιων από αυτά τα προβλήματα παρατίθενται στον παρακάτω Πίνακα 2.2:

Σχήμα	Περιγραφή	Πεδίο E στο σημείο A
	Λεπτή ράβδος μεταξύ $x = \alpha$ και β , ομοιόμορφο φορτίο Q .	$\frac{kQ}{\alpha\beta}$
	Λεπτή ράβδος μεταξύ $x = \pm a$, γραμμική πυκνότητα φορτίου λ .	$\frac{2k\lambda}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$
	Λεπτός δίσκος ακτίνας R , φορτίο Q , πεδίο στη μεσοκάθετο, ύψος z	$\frac{2kQ}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$
	Δακτύλιος, ακτίνες R_1, R_2 , φορτίο Q , πεδίο στη μεσοκάθετο, ύψος z	$\frac{2kQ}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_2^2}}\right)$
	Συμπαγής σφαίρα ακτίνας R , φορτίο Q	$k \frac{Q}{R^2}$

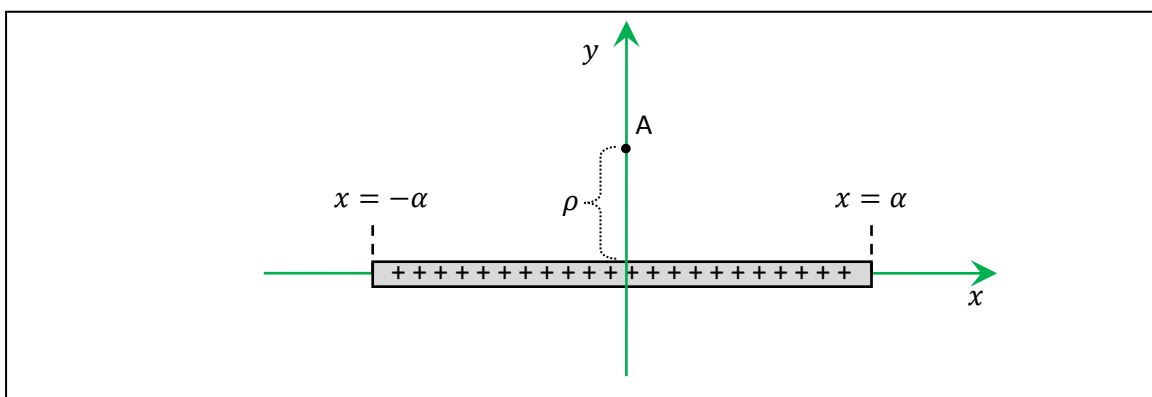
	στον όγκο της, πεδίο σε απόσταση $r > R$	
	Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας R , φορτίο Q στον όγκο της, πεδίο σε απόσταση r	$\begin{cases} \frac{kQ}{r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$
	Σωλήνας ακτίνας R , μήκους L φορτίο Q στην επιφάνεια, πεδίο σε απόσταση z	$\frac{kQ}{3L} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - L/2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + L/2)^2 + R^2}} \right]$

Πίνακας 2.2

Προβλήματα

Πρόβλημα 2.1. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στην αρχή των αξόνων λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που φέρει φορτίο Q και που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ (όπου $\beta > \alpha > 0$).

Πρόβλημα 2.2. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο A του παρακάτω σχήματος με συντεταγμένη $(0, \rho)$ λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που βρίσκεται επάνω στον άξονα x από το $x = -\alpha$ έως το $x = \alpha$ εάν η γραμμική πυκνότητα του φορτίου της είναι ίση με λ .



Απάντηση:

$$E = 2k\lambda \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

Πρόβλημα 2.3. Λεπτός ημιδακτύλιος αμελητέου πάχους και ακτίνας R βρίσκεται με το κέντρο του επάνω στην αρχή των συντεταγμένων O και εκτείνεται συμμετρικά ως προς τον άξονα x από γωνία $\varphi = -\pi/2$ έως και $\pi/2$. Εάν ο ημιδακτύλιος φέρει ομοιόμορφο θετικό φορτίο Q , να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο O .

Πρόβλημα 2.4. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν το φορτίο δεν είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα αλλά περιγράφεται από τη γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο / μήκος) που δίνεται από την έκφραση $\lambda(\varphi) = A \cos\varphi$ όπου η A είναι σταθερά.

Πρόβλημα 2.5. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου λεπτού δίσκου ακτίνας R και φορτίου ίσου με Q , σε σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του. Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος χωρίζοντας τον δίσκο σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δακτυλίων.

Πρόβλημα 2.6. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου λεπτού δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας R_1 , εξωτερικής ακτίνας R_2 και φορτίου ίσου με Q , σε σημείο A που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του.

Πρόβλημα 2.7. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R με φορτίο Q σε όλο τον όγκο της, σε σημείο A στο εξωτερικό της σε απόσταση r από το κέντρο της O . Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα παραπάνω Προβλήματος 3 χωρίζοντας την σφαίρα σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δίσκων.

Πρόβλημα 2.8. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα με τη φορτισμένη σφαίρα παραπάνω εάν πρόκειται για σφαιρικό κέλυφος, δηλαδή όλο το φορτίο Q βρίσκεται ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του κελύφους (και όχι στον όγκο ο οποίος τώρα είναι κενός). Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο και στο εσωτερικό του σφαιρικού κελύφους.

Πρόβλημα 2.9. Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και μικρού μήκους L με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ κατανεμημένη σε όλο τον όγκο του, σε σημείο A επάνω στον άξονά του και σε απόσταση r από το κέντρο του O , όπου $r > L/2$ (στον εξωτερικό χώρο του κυλίνδρου). Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του παραπάνω Προβλήματος 2.3 χωρίζοντας τον σωλήνα σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών δακτυλίων.

Απάντηση:

$$2k\rho\pi \left\{ \sqrt{(r + L/2)^2 + R^2} - \sqrt{(r - L/2)^2 + R^2} - L \right\}$$

Πρόβλημα 2.10.

Να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα με το φορτισμένο σωλήνα εάν το πάχος του είναι πεπερασμένο με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 .

Απάντηση:

$$c \left\{ \sqrt{(r + L/2)^2 + R_1^2} - \sqrt{(r - L/2)^2 + R_1^2} - \sqrt{(r + L/2)^2 + R_2^2} + \sqrt{(r - L/2)^2 + R_2^2} \right\}$$

Φυσική II – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

όπου $c = k\rho/2$

3. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

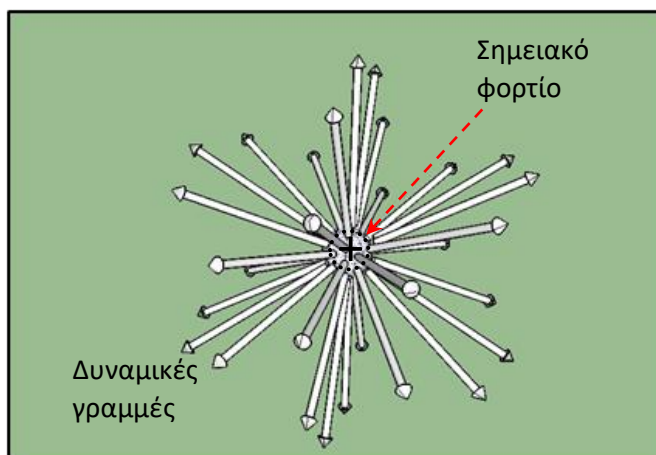
Δυναμικές Γραμμές

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην κατανόηση του Ηλεκτρομαγνητισμού είναι οι λεγόμενες "Δυναμικές Γραμμές" του ηλεκτρικού πεδίου. Οι δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι νοητές (φανταστικές) καμπύλες που σχεδιάζουμε στον χώρο, οι οποίες μας βοηθούν να απεικονίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου αυτού. Οι Δ.Γ. σχεδιάζονται σύμφωνα με τους εξής τέσσερις κανόνες:

1. Ξεκινούν από τα θετικά φορτία και καταλήγουν στα αρνητικά. Έχουν δηλαδή φορά και για αυτό τις σχεδιάζουμε με ένα βέλος
2. Δεν τέμνονται πουθενά μεταξύ τους
3. Το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι εφαπτόμενο στη Δ.Γ. που περνά από αυτό το σημείο
4. Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σε μια μικρή περιοχή του χώρου είναι ανάλογη του μέτρου $|\vec{E}|$ σε αυτό το χώρο

Παράδειγμα 3.1. Δυναμικές Γραμμές Σημειακού Φορτίου

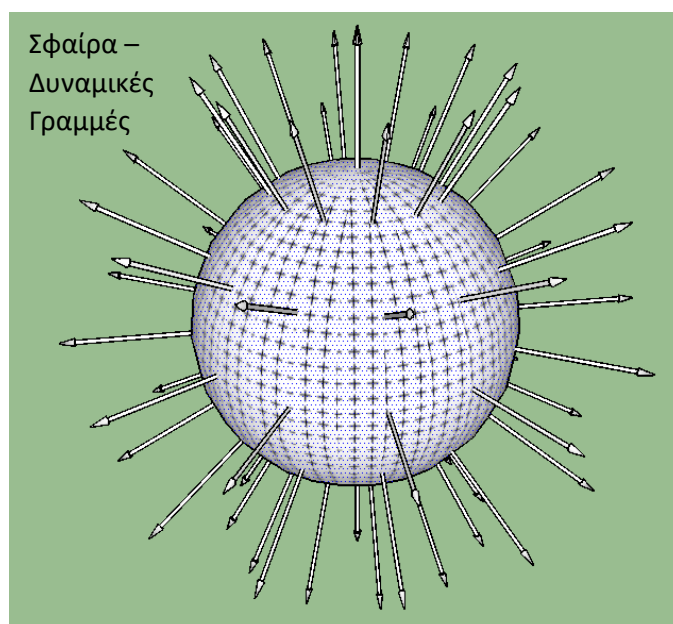
Στο παρακάτω Σχήμα 3.1 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός θετικού σημειακού φορτίου. Εδώ θεωρούμε ότι τα αρνητικά φορτία βρίσκονται στο άπειρο οπότε όλες οι δυναμικές πηγάζουν από το θετικό σημειακό φορτίο και κατευθύνονται προς όλες τις κατευθύνσεις προς το άπειρο. Είναι δηλαδή σαν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου με φορά και προς τις τρεις διαστάσεις (ή σαν τις ακτίνες του αχινού). Οι Δ.Γ. στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ευθείες γραμμές έτσι ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους αλλά και επειδή πρέπει να είναι εφαπτόμενες προς το \vec{E} το οποίο είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι είναι ακτινικό. Επίσης οι γραμμές απομακρύνονται συνεχώς μεταξύ τους και άρα η πυκνότητά τους φθίνει όσο απομακρυνόμαστε από το φορτίο. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.3 που δείχνει ότι το E ελαττώνεται με την απόσταση r . Στην περίπτωση ενός αρνητικού σημειακού φορτίου, οι δυναμικές γραμμές θα ήταν ακριβώς οι ίδιες αλλά με φορά από το άπειρο προς το φορτίο (τα βέλη δηλαδή στο σχήμα θα άλλαζαν φορά).



Σχήμα 3.1

Παράδειγμα 3.2. Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένης Σφαίρας

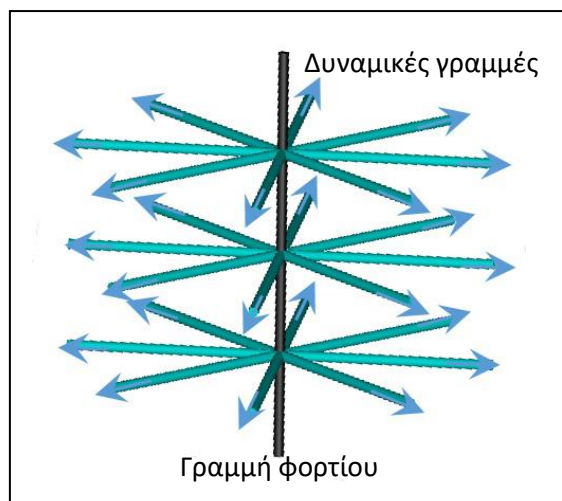
Παρόμοιες με τις Δ.Γ. του σημειακού φορτίου είναι και οι δυναμικές γραμμές μιας θετικά ομοιόμορφης φορτισμένης σφαίρας στον εξωτερικό της χώρο. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.2 φαίνεται μια φορτισμένη σφαίρα με συνολικό φορτίο Q στο εσωτερικό της, κατανεμημένο ομοιόμορφα είτε στην επιφάνειά της εάν πρόκειται για κοίλη σφαίρα, είτε στο εσωτερικό της εάν πρόκειται για συμπαγή σφαίρα. Όπως και στο σημειακό φορτίο, έτσι και εδώ οι Δ.Γ. τείνουν προς το άπειρο ώστε να καταλήξουν σε πιθανά αρνητικά φορτία εκεί. Στην προσπάθειά τους να μη τέμνονται μεταξύ τους, ταξιδεύουν ευθύγραμμα προς όλες τις κατευθύνσεις και έτσι η κατανομή τους είναι ακτινική (σαν τις ακτίνες του ήλιου και προς τις τρεις διαστάσεις), ακριβώς όπως οι Δ.Γ. ενός σημειακού φορτίου. Έτσι δεν είναι τυχαίο που στα αποτελέσματα των Προβλημάτων 2.7 και 2.8 τα οποία εμφανίζονται στον Πίνακα 2.2, το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό μιας σφαίρας ταυτίζεται με αυτό ενός σημειακού φορτίου.



Σχήμα 3.2

Παράδειγμα 3.3. Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένης Γραμμής Απείρου Μήκους

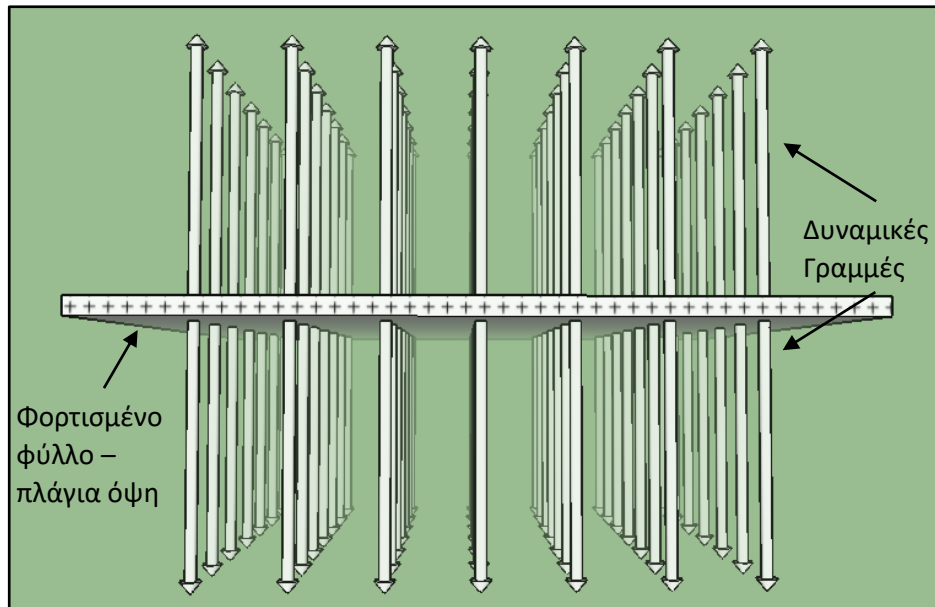
Στο Σχήμα 3.3 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές μιας θετικά φορτισμένης γραμμής άπειρου μήκους. Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι το παραγόμενο \vec{E} είναι κάθετο προς τη γραμμή και άρα οι δυναμικές γραμμές πρέπει να είναι και αυτές κάθετες στη γραμμή. Πηγάζουν από την γραμμή φορτίου με κατεύθυνση προς το άπειρο και έχουν επίπεδη ακτινική κατανομή, σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου. Και σε αυτή την περίπτωση οι Δ.Γ. απομακρύνονται μεταξύ τους όσο τείνουν προς το άπειρο που σημαίνει ότι η πυκνότητά τους ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την γραμμή, σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.6



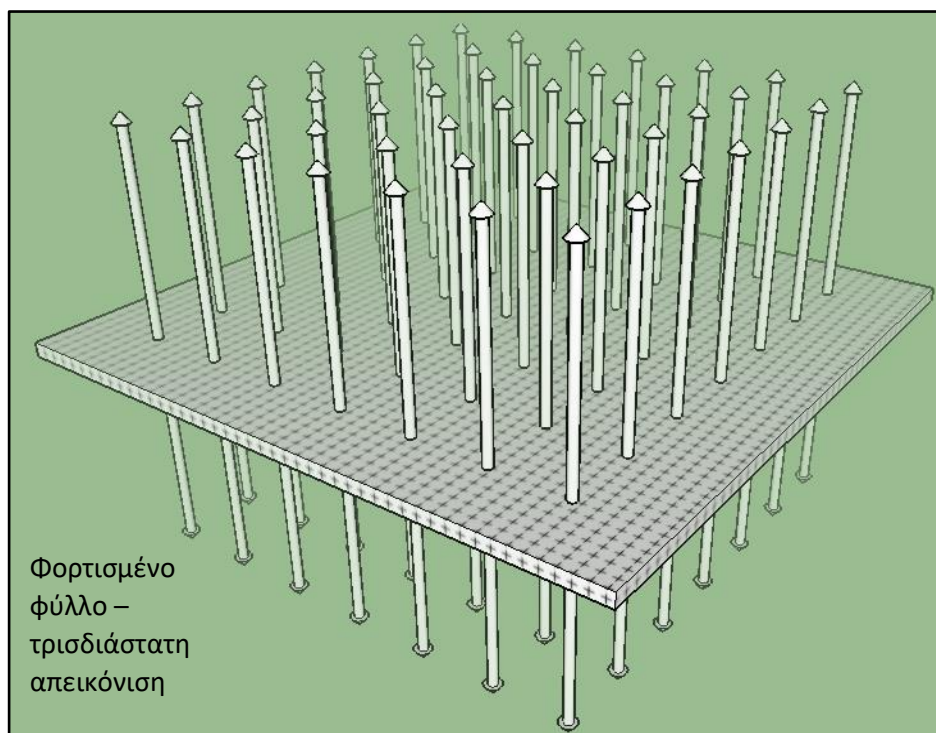
Σχήμα 3.3

Παράδειγμα 3.4. Δυναμικές Γραμμές Φορτισμένου Φύλλου Απείρων Διαστάσεων

Στα Σχήματα 3.4 και 3.5 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός θετικά φορτισμένου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων. Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι το παραγόμενο \vec{E} είναι κάθετο προς το φύλλο και άρα οι δυναμικές γραμμές πρέπει να είναι και αυτές κάθετες στο φύλλο. Πηγάζουν από το φύλλο με κατεύθυνση προς το άπειρο. Επειδή το φύλλο χωρίζει τον περιβάλλοντα χώρο του σε δυο μέρη, οι μισές Δ.Γ. στο Σχήμα 3.4 έχουν φορά προς τα πάνω και οι άλλες μισές προς τα κάτω. Στην προσπάθειά τους να μη τέμνονται, είναι παράλληλες μεταξύ τους. Εφόσον η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη, τότε αναγκαστικά και η πυκνότητά των Δ.Γ. είναι σταθερή που σημαίνει ότι το μέτρο του \vec{E} είναι παντού σταθερό δηλαδή το πεδίο είναι ομοιογενές (σταθερό στο χώρο). Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με την Εξ. 2.9 όπου βλέπουμε ότι το E δεν εξαρτάται από την απόσταση από την πηγή (σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα).



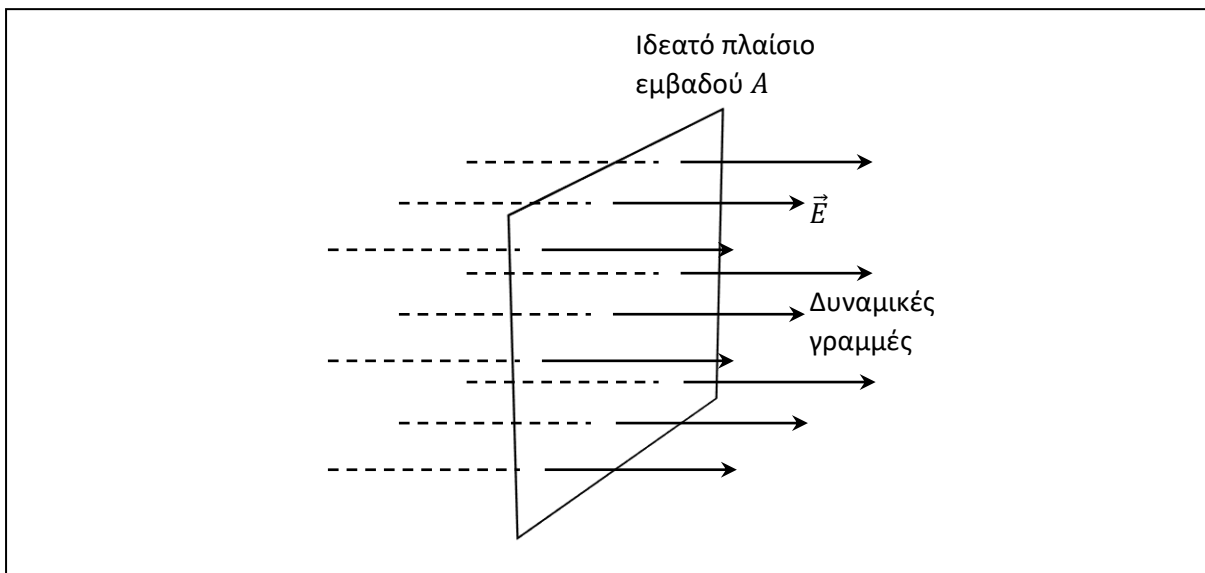
Σχήμα 3.4



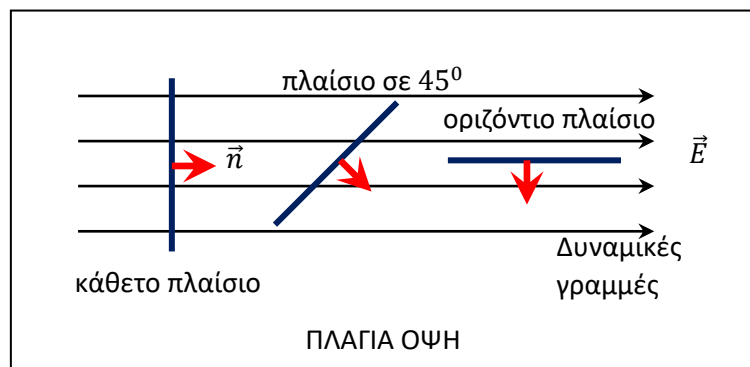
Σχήμα 3.5

Ηλεκτρική Ροή

Θεωρήστε στο Σχήμα 3.6 μια περιοχή του χώρου όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό και ομοιογενές και οι δυναμικές γραμμές είναι ευθύγραμμες και ισαπέχουσες. Θεωρήστε επίσης ένα ιδεατό ορθογώνιο πλαίσιο το οποίο τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές. Η **ηλεκτρική ροή** Φ_E ορίζεται ποιοτικώς ως ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν το πλαίσιο. Βάσει του παραπάνω ορισμού, καταλαβαίνει κανείς ότι τρεις κυρίως παράγοντες επηρεάζουν την ηλεκτρική ροή: α) Το εμβαδό A του πλαισίου, αφού μεγαλύτερο εμβαδό θα "συλλαμβάνει" περισσότερες γραμμές, β) η πυκνότητα των Δ.Γ. που από τις ιδιότητές τους γνωρίζουμε ότι είναι ανάλογη του E και γ) ο προσανατολισμός του πλαισίου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.7. όπου το ίδιο πλαίσιο έχει τοποθετηθεί με τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς. Για παράδειγμα το κάθετο πλαίσιο φαίνεται να "συλλαμβάνει" διπλάσιο αριθμό δυναμικών γραμμών σε σχέση με το πλαίσιο με προσανατολισμό 45° μοιρών (η αναλογία είναι εικονική) ενώ καμία Δ.Γ. δεν διαπερνά το οριζόντιο πλαίσιο όπως αναμένεται.



Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7

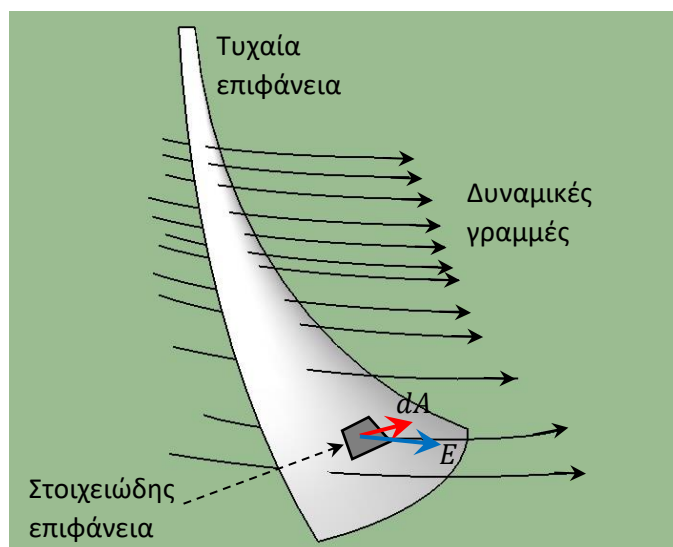
Ποσοτικώς η ηλεκτρική ροή ορίζεται ως

$\Phi_E = EA \cos \theta$	Ηλεκτρική ροή	3.1
---------------------------	---------------	-----

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{E} με το διάνυσμα \vec{n} το οποίο είναι ένα μοναδιαίο και αδιάστατο διάνυσμα (χωρίς μονάδες) κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου (περιστρέφεται μαζί με το πλαίσιο). Η παραπάνω σχέση συνοψίζει όλες τις παραπάνω ποιοτικές παρατηρήσεις και μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα με μονάδες εμβαδού, το διάνυσμα $\vec{A} = A\vec{n}$ το οποίο είναι επίσης κάθετο στην επιφάνεια του πλαισίου. Κάνοντας χρήση του εσωτερικού γινομένου, μπορούμε να γράψουμε

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$	Ηλεκτρική ροή	3.2
----------------------------------	---------------	-----

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.8, μπορούμε να ορίσουμε την ροή μέσω οποιασδήποτε τυχαίας επιφάνειας S και όχι μόνο μέσω ενός ορθογωνίου πλαισίου. Σε αυτή την περίπτωση, "τεμαχίζουμε" την επιφάνεια σε ένα σύνολο μικροσκοπικών πλαισίων απειροστού εμβαδού dA το καθένα, και ορίζουμε το κάθετο διάνυσμα $d\vec{A} = dA\vec{n}$ στο πλαίσιο, ακριβώς όπως κάναμε παραπάνω. Γενικά οι δυναμικές γραμμές θα τέμνουν το πλαίσιο υπό τυχαία γωνία και έτσι το διάνυσμα \vec{E} θα σχηματίζει κάποια γωνία θ ως προς το κάθετο διάνυσμα $d\vec{A}$.



Σχήμα 3.8

Η στοιχειώδης ροή διαμέσου αυτού του πλαισίου θα είναι σύμφωνα με την Εξίσωση 3.2 ίση με $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$ και άρα η συνολική ροή ισούται με

$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$	Ηλεκτρική ροή	3.3
--	---------------	-----

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλη την επιφάνεια S .

Ο Νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss είναι ένα χρήσιμο Μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό του \vec{E} σε περιπτώσεις όπου υπάρχει κάποια γεωμετρική συμμετρία. Έστω λοιπόν κάποιος χώρος όπου θέλουμε να υπολογίσουμε το \vec{E} . Σχεδιάζουμε μια ιδεατή **κλειστή** επιφάνεια σε αυτό το χώρο (μπορούμε να πάρουμε όποιο σχήμα θέλουμε αλλά συνήθως η επιλογή μας καθορίζεται από τη συμμετρία του προβλήματος όπως θα δούμε παρακάτω). Τότε ο **νόμος του Gauss** μας λέει ότι η ολική ροή διαμέσου της κλειστής αυτής επιφάνειας, ισούται με το συνολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια δια τη σταθερά ϵ_0 δηλαδή

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	Νόμος του Gauss	3.4
---	-----------------	-----

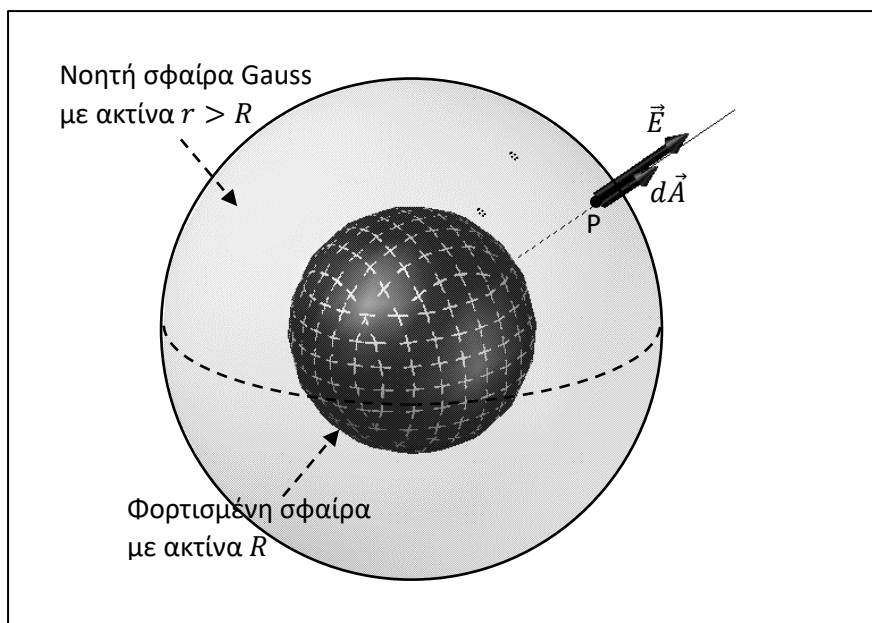
Το κυκλάκι επάνω στο ολοκλήρωμα συμβολίζει την ολοκλήρωση επάνω σε κλειστή επιφάνεια και το Q είναι το περικλειόμενο φορτίο. Οι παρακάτω εφαρμογές, θα αποσαφηνίσουν τον νόμο του Gauss καλύτερα.

α) Φορτισμένη συμπαγής σφαίρα

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί μια φορτισμένη συμπαγής σφαίρα ακτίνας R με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q παντού στον όγκο της.

Λύση:

Κατ' αρχάς θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η σφαίρα σε αυτό το πρόβλημα είναι υποχρεωτικά μονωτής. Όπως είχαμε δει στο Κεφάλαιο 1, σε ένα αγωγό τα επιπλέον φορτία δεν μπορούν να παραμείνουν στο εσωτερικό του αλλά απωθούνται μεταξύ τους έως ότου να καταλήξουν στην επιφάνεια του αγωγού, δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας που προφανώς δεν είναι η προκειμένη περίπτωση. Θα μπορούσαμε να λύσουμε το παρόν πρόβλημα στον χώρο εξωτερικά της σφαίρας (από την επιφάνεια της σφαίρας έως το άπειρο), με τις τεχνικές ολοκλήρωσης του προηγούμενου κεφαλαίου, δείτε σχετικά το Πρόβλημα 2.6. Στον εσωτερικό χώρο της σφαίρας όμως, τα πράγματα γίνονται πιο δύσκολα με την ολοκλήρωση. Θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε και τα δυο αποτελέσματα σχετικά εύκολα με την βοήθεια του νόμου του Gauss.



Σχήμα 3.9

Θεωρήστε λοιπόν τις παρακάτω δυο περιπτώσεις ξεχωριστά:

α.1) Εξωτερικός χώρος της σφαίρας. Θεωρήστε το τυχαίο σημείο P στο Σχήμα 3.9 το οποίο απέχει απόσταση $r > R$ από το κέντρο της σφαίρας και έστω \vec{E} το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό το σημείο. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, διαλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια ιδεατή σφαίρα ακτίνας r , ομόκεντρη με την δεδομένη σφαίρα. Όπως είχε επισημανθεί στο Σχήμα 3.2 στο προηγούμενο εδάφιο, η κατανομή των Δ.Γ. στην περίπτωση ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας είναι ακτινική και επομένως το \vec{E} στο Σχήμα 3.9 θα τέμνει κάθετα τη σφαίρα Gauss στο σημείο P (θυμηθείτε από τη γεωμετρία ότι οποιαδήποτε ακτίνα μιας σφαίρας τέμνει πάντα κάθετα τη σφαίρα). Επομένως το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{A}$ στο σημείο P το οποίο είναι εξ' ορισμού κάθετο στη σφαίρα Gauss στο P, θα είναι παράλληλο στο \vec{E} και έτσι το μεταξύ τους εσωτερικό γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos 0^\circ = E dA$$

είναι δηλαδή ίσο με το απλό γινόμενο των μέτρων των δυο διανυσμάτων. Έτσι ο νόμος του Gauss απλοποιείται σε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα Gauss. Περιμένουμε η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών, και άρα και το E , να μην αλλάζει επάνω στη σφαίρα. Η πυκνότητα τους μικραίνει όσο απομακρύνονται προς το άπειρο αλλά επάνω στη σφαίρα παραμένει σταθερή. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από πλευράς σφαιρικής συμμετρίας: Οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας Gauss και εάν εξετάσουμε, "βλέπουμε" ακριβώς την ίδια κατανομή φορτίου στην ίδια απόσταση. Επομένως το E είναι σταθερό στην παραπάνω ολοκλήρωση και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό του απειροστού τμήματος της σφαίρας στο σημείο P, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της σφαίρας που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με $4\pi r^2$. Επομένως

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

Από τον ορισμό της σταθεράς ϵ_0 στην Εξ. 2.8, μπορούμε να γράψουμε

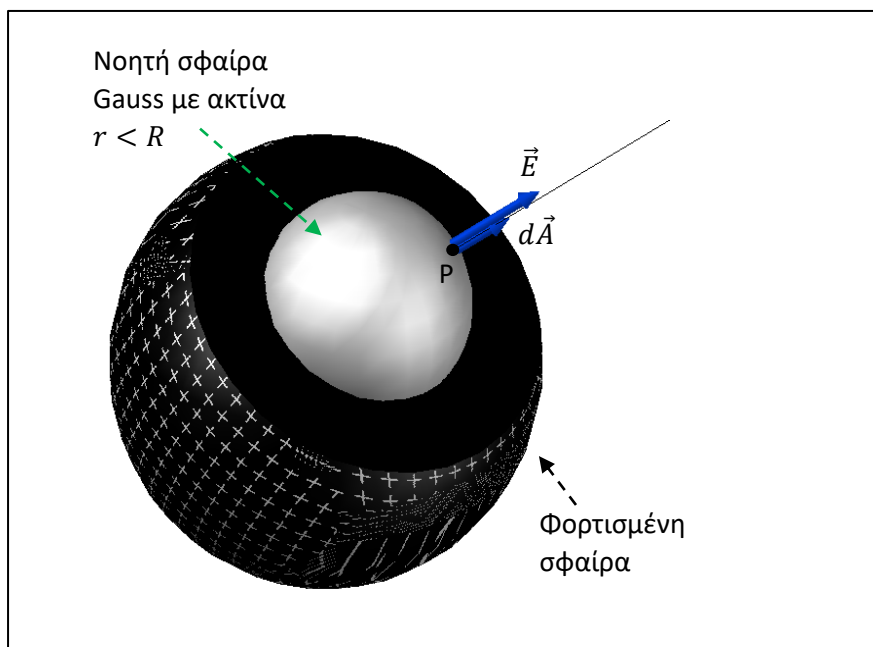
$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό του σημειακού φορτίου. Εμφανίζεται λοιπόν το πεδίο στο εξωτερικό της σφαίρας σαν να προέρχεται από ένα σημειακό φορτίο τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας!

α.2) Εσωτερικό της σφαίρας. Θεωρήστε το τυχαίο σημείο P στο Σχήμα 3.10 στο εσωτερικό της σφαίρας το οποίο απέχει απόσταση $r < R$ από το κέντρο της σφαίρας και έστω \vec{E} το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό το σημείο. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, διαλέγουμε και πάλι ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα ακτίνας r , αλλά τώρα αυτή βρίσκεται στο εσωτερικό της δεδομένης φορτισμένης σφαίρας. Δουλεύοντας ακριβώς όπως παραπάνω στην περίπτωση α.1, θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα

$$E = k \frac{Q'}{r^2}$$

με τη διαφορά όμως ότι τώρα η επιφάνεια Gauss περικλείει λιγότερο φορτίο $Q' < Q$.



Σχήμα 3.10

Για να βρούμε το φορτίο Q' , σκεφτόμαστε ως εξής: αφού η κατανομή είναι ομοιογενής, λογικό είναι να υποθέσουμε ότι ο λόγος των φορτίων που περικλείουν οι δυο σφαίρες στο Σχήμα 3.10, θα είναι ανάλογος του λόγου των όγκων τους. Έτσι έχουμε

Φυσική ΙΙ – Δ. Κουζούδης – Π. Πετρίδης

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow Q' = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Επομένως το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται

$$E = k \frac{Q'}{r^2} = k \frac{Q}{R^2} r$$

Δηλαδή το E αυξάνει γραμμικά στο εσωτερικό της σφαίρας. Συνοψίζοντας

$E = \begin{cases} k \frac{Q}{R^2} r, & r < R \\ k \frac{Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$	Συμπαγής μονωτική σφαίρα	3.5
---	--------------------------	-----

β) Φορτισμένη κοίλη σφαίρα

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί μια φορτισμένη κοίλη σφαίρα ακτίνας R με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q παντού στην επιφάνειά της.

Λύση: Όσον αφορά το υλικό, η σφαίρα μπορεί να είναι είτε μονωτής, στην επιφάνεια της οποίας έχει τοποθετηθεί ομοιόμορφα το φορτίο Q , είτε αγωγός στον οποίο έχει τοποθετηθεί το φορτίο Q οπουδήποτε, αφού έτσι και αλλιώς αυτό καταλήγει στην επιφάνεια, όπως συζητήθηκε σχετικά στο προηγούμενο εδάφιο.

Όσον αφορά στην λύση του προβλήματος, στον εξωτερικό χώρο της σφαίρας, δουλεύουμε ακριβώς όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή α παραπάνω και παίρνουμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

Στο εσωτερικό της κοίλης σφαίρας, η επιφάνεια Gauss θα είναι και πάλι σφαίρα με μικρότερη ακτίνα από αυτήν της δεδομένης σφαίρας. Όμως επειδή η σφαίρα Gauss σε αυτό το πρόβλημα περιβάλλει μηδενικά φορτία, το συνολικό περικλειόμενο φορτίο είναι $Q' = 0$ και έτσι:

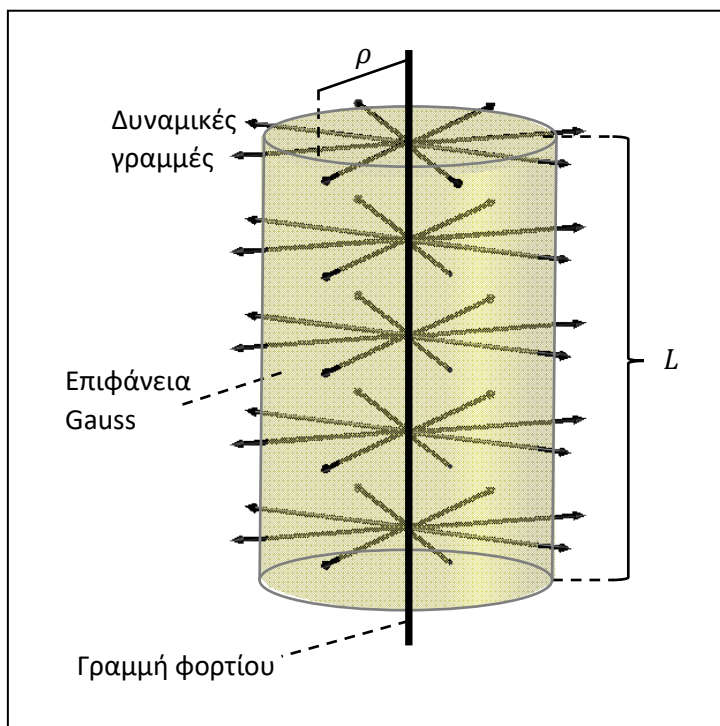
$$E = k \frac{Q'}{r^2} = 0$$

Συνοψίζοντας

$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ k \frac{Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$	Κοίλη σφαίρα ή Αγωγή Συμπαγής Σφαίρα	3.6
---	---	-----

γ) Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων

Να αποδειχθεί η Εξ. 2.6 με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο μιας άπειρης γραμμής με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ .



Σχήμα 3.11

Λύση:

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο με τυχαία ακτίνα ρ και τυχαίο μήκος L και με τον άξονα συμμετρίας του να συμπίπτει με τη γραμμή φορτίου. Είχαμε δει παραπάνω ότι οι δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) της γραμμής φορτίου είναι κάθετες στη γραμμή, με δισδιάστατη ακτινική κατανομή. Εάν θεωρήσουμε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο τριών επιμέρους επιφανειών, δηλαδή τις δυο βάσεις του (έστω B_1 και B_2) και την παράπλευρη επιφάνειά του (έστω Π), τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.11, οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες με τις βάσεις B_1 και B_2 και οπότε $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ εκεί ενώ αντιθέτως τέμνουν κάθετα την Π οπότε $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ σε αυτήν. Έτσι τα παραπάνω ολοκληρώματα γίνονται:

$$0 + 0 + \int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Οι Δ.Γ. απομακρύνονται μεταξύ τους όσο τείνουν προς το άπειρο αλλά λόγω συμμετρίας, επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου περιμένουμε να έχουν σταθερή πυκνότητα. Επομένως το E είναι σταθερό επάνω στην επιφάνεια Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (βάση×ύψος). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q . Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του κυλίνδρου και η γραμμική πυκνότητα φορτίου της γραμμής είναι λ , τότε $Q = \lambda L$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0}$$

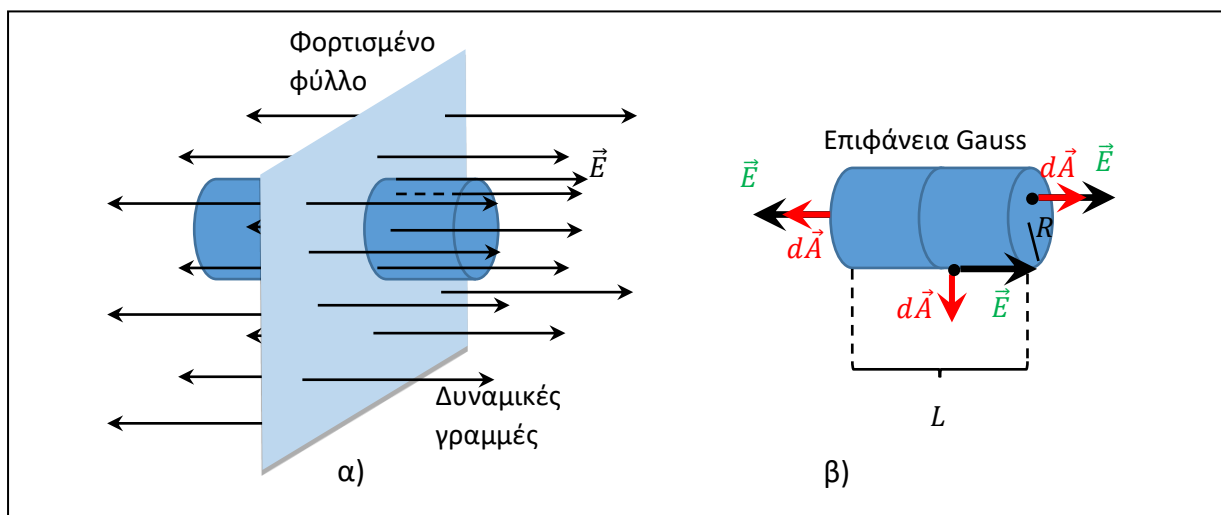
που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό της Εξίσωσης 2.6!

δ) Φορτισμένο φύλλο απείρων διαστάσεων

Να αποδειχθεί η Εξ. 2.9 με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο ενός λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων με πυκνότητα φορτίου σ .

Λύση:

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12α, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο κάθετο στο φύλλο με τυχαία ακτίνα R και τυχαίο μήκος L . Είχαμε δει παραπάνω ότι οι δυναμικές γραμμές του φύλλου είναι κάθετες στο φύλλο, παράλληλες και ισαπέχουσες μεταξύ τους, με αντίθετη φορά εκατέρωθεν του φύλλου.



Σχήμα 3.12

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα σε τρία μέρη, δυο επάνω στις βάσεις (έστω B_1 και B_2) και ένα επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια (έστω Π).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Στο Σχήμα 3.12β δείχνουμε τον γωνιακό προσανατολισμό του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} σε σχέση με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και στα τρία τμήματα κυλίνδρου. Σε αντίθεση με το προηγούμενο πρόβλημα, στις δυο βάσεις τώρα το \vec{E} είναι παράλληλο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ (θυμηθείτε ότι το κάθετο διάνυσμα έχει φορά πάντοτε προς τα έξω της επιφάνειας) και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ ενώ στην παράπλευρη επιφάνεια το \vec{E} είναι κάθετο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\int_{B_1} E dA + \int_{B_2} E dA + 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Είδαμε ότι για το φύλλο η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι σταθερή, και άρα και το E είναι σταθερό και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος (το \vec{E} αλλάζει κατά φορά εκατέρωθεν του φύλλου αλλά όχι κατά μέτρο και άρα το E είναι το ίδιο και στις δυο μεριές):

$$E \int_{B_1} dA + E \int_{B_2} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό, τότε το κάθε ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της κάθε βάσης που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο πR^2 . Επομένως

$$2E\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q . Κοιτώντας στο Σχήμα 3.12 στα αριστερά, αυτό το περικλειόμενο φορτίο είναι "παγιδευμένο" στην τομή του κυλίνδρου με το φύλλο που είναι ένας κύκλος με εμβαδό ίσο με αυτό της βάσης πR^2 . Αφού η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του φύλλου είναι σ , τότε $Q = \sigma \pi R^2$ και έτσι

$$2E\pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0}$$

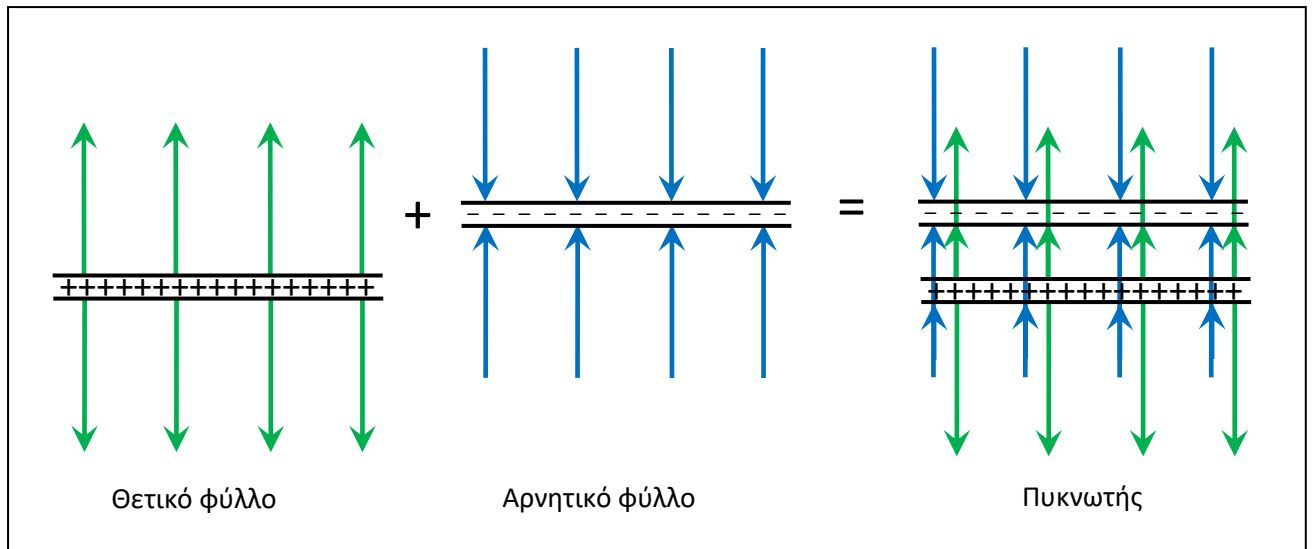
ή

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό της Εξίσωσης 2.7!

ε) Επίπεδος Πυκνωτής

Στο Σχήμα 3.13 φαίνεται μια διάταξη, γνωστή ως *επίπεδος πυκνωτής*, η οποία αποτελείται από δυο όμοια επίπεδα φύλλα με ίσα και αντίθετα φορτία, τοποθετημένα παράλληλα και σε μικρή απόσταση μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι οι δυναμικές γραμμές έχουν την ίδια φορά ανάμεσα στα δυο φύλλα ενώ έχουν αντίθετη φορά στον χώρο εκτός.



Σχήμα 3.13

Εάν σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου στα δυο φύλλα, τότε το κάθε φύλλο σύμφωνα με αυτά που είδαμε στο προηγούμενο υπο-εδάφιο, δημιουργεί ομοιόμορφο πεδίο μέτρου

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Στον εξωτερικό χώρο του πυκνωτή, τα δυο E έχουν αντίθετη φορά και έτσι το συνιστάμενο πεδίο μηδενίζεται:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0$$

Αντίθετα στον εσωτερικό χώρο, τα δυο E έχουν ίδια φορά (προς τα πάνω) και έτσι το συνιστάμενο πεδίο ισούται με

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

το οποίο είναι επίσης ομοιογενές. Συνοπτικά το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή ισούται με

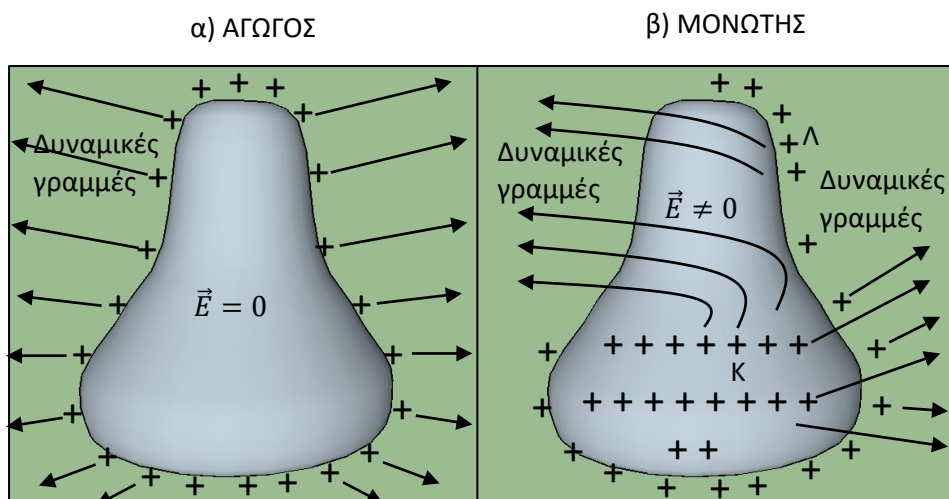
$E = \begin{cases} 0, & \text{εκτός} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}, & \text{εντός} \end{cases}$	Πυκνωτής	3.7
--	----------	-----

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου στο εσωτερικό των Αγωγών

Είδαμε ότι στην περίπτωση μιας αγώγιμης φορτισμένης σφαίρας, όλο το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνειά της και στο εσωτερικό της το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται σύμφωνα με την Εξ. 3.6. Αυτό όμως είναι ένα γενικό αποτέλεσμα, δηλαδή

Σε οποιοδήποτε φορτισμένο **αγώγιμο** σώμα τυχαίου σχήματος, το επιπλέον φορτίο κατανέμεται πάντοτε στην επιφάνειά του και το μέτρο του πεδίου είναι παντού **μηδέν** στο εσωτερικό του δηλαδή $E = 0$.

Το δεύτερο φαινόμενο $E = 0$ της παραπάνω πρότασης είναι απόρροια του πρώτου φαινομένου σύμφωνα με το οποίο το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνεια. Θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 3.14α (στα αριστερά) όπου εικονίζει έναν αγωγό τυχαίου σχήματος. Οι δυναμικές γραμμές ξεκινώντας από την επιφάνεια του αγωγού όπου υπάρχει φορτίο, τείνουν αναγκαστικά προς το εξωτερικό του αγωγού με κατεύθυνση προς το άπειρο όπου υπάρχει αρνητικό φορτίο. Στην προσπάθειά τους αυτή, οι γραμμές αποφεύγουν το εσωτερικό του αγωγού και έτσι εκεί η πυκνότητά τους και κατά συνέπεια το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν. Σε αντιπαραβολή με τον αγωγό, δείχνουμε σχηματικά στο Σχήμα 3.14β (στα δεξιά) έναν μονωτή με το ίδιο τυχαίο σχήμα όπως και του αγωγού. Στον μονωτή μπορεί να υπάρχουν φορτία και στο εσωτερικό του, όπως αυτά στο σημείο Κ, από τα οποία εκκινούν δυναμικές γραμμές αλλά και φορτία στην επιφάνειά του, όπως αυτά στο σημείο Λ, από τα οποία εκκινούν δυναμικές γραμμές οι οποίες μπορούν να διαπεράσουν το σώμα εάν δεν υπάρχει φορτίο στην απέναντι μεριά του. Επομένως στο εσωτερικό ενός μονωτή μπορεί να υπάρχουν δυναμικές γραμμές και άρα η πυκνότητά τους και κατά συνέπεια το E μπορεί γενικά να είναι διάφορο του μηδενός εκεί.

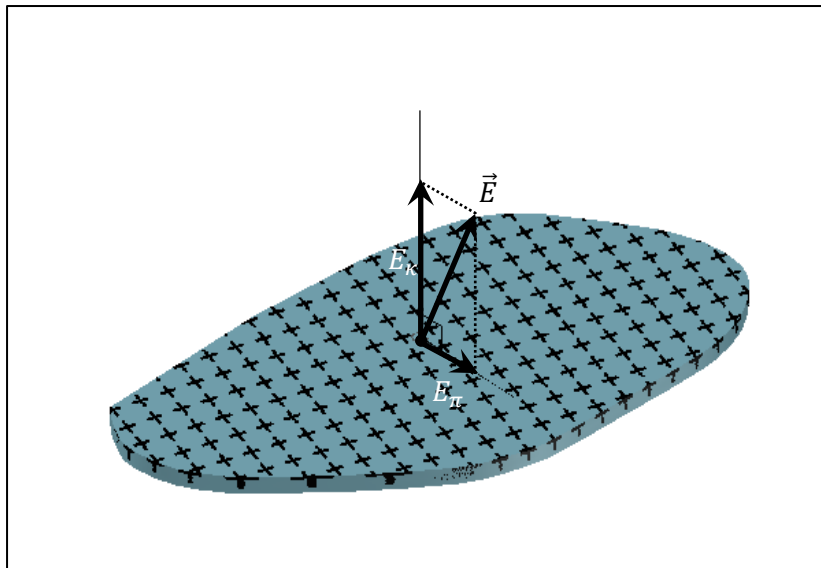


Σχήμα 3.14

Τι γίνεται όμως με την επιφάνεια του αγωγού; Εφόσον υπάρχουν εκεί δυναμικές γραμμές (από εκεί ξεκινούν) τότε το E δεν είναι μηδέν εκεί, έχει όμως την ιδιότητα να είναι κάθετο στην επιφάνεια. Για να καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αυτό, θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 3.15 που δείχνει ένα μικρό τμήμα μιας φορτισμένης αγώγιμης επιφάνειας και έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο E σχηματίζει τυχαία γωνία ως προς την επιφάνεια αυτή, ώστε να έχει τόσο κάθετη συνιστώσα E_K όσο και παράλληλη συνιστώσα E_π ως προς την επιφάνεια. Η E_K τείνει να τραβήξει τα φορτία εκτός υλικού αλλά οι δυνάμεις συνοχής του υλικού τα συγκρατούν. Ομοίως, εάν η συνιστώσα E_π δεν ήταν μηδέν, τότε θα επιτάχυνε τα φορτία κατά μήκος της επιφάνειας με αποτέλεσμα να αλλάξει η κατανομή φορτίου και άρα και το ηλεκτρικό πεδίο. Προφανώς η κατάσταση τότε δεν θα ήταν σταθερή αλλά θα άλλαζε συνεχώς. Αυτό που παρατηρούμε όμως στην ηλεκτροστατική είναι ότι όλα τα φορτισμένα συστήματα έρχονται γρήγορα σε μια κατάσταση και άρα το σύστημα κατανέμει με κάποιο μαγικό τρόπο το

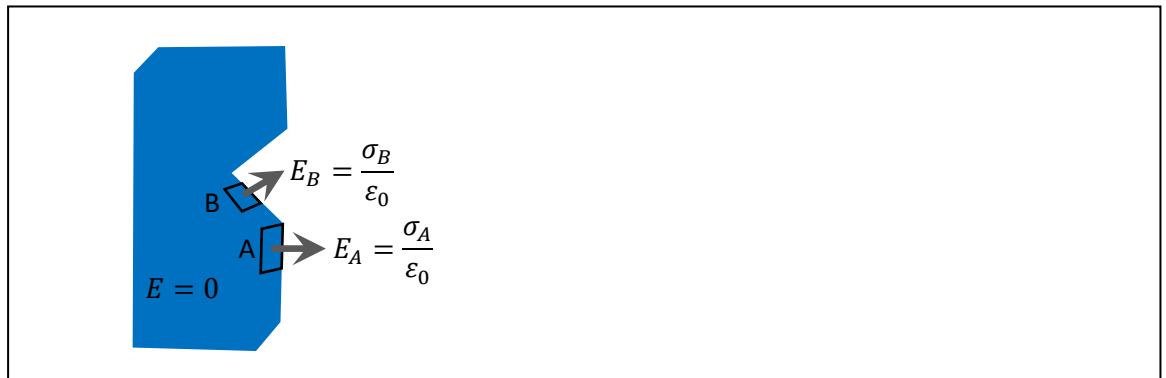
φορτίο ώστε $E_{\pi} = 0$ παντού στην επιφάνεια ενός αγωγού και έτσι να μην αλλάζουν θέση τα φορτία μεταξύ τους. Επομένως καταλήγουμε σε ένα ακόμη σημαντικό συμπέρασμα όσον αφορά τους αγωγούς:

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια ενός φορτισμένου **αγωγού** έχει μόνο **κάθετη** συνιστώσα δηλαδή τέμνει πάντα κάθετα την επιφάνειά του.



Σχήμα 3.15

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για το πεδίο επάνω στην επιφάνεια και πολύ κοντά σε αυτήν. Όπως απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια, το E μπορεί να έχει οποιαδήποτε συνιστώσα και είδαμε στα προηγούμενα εδάφια πως μπορούμε να το υπολογίσουμε σε περιπτώσεις όπου υπάρχει κάποια συμμετρία στο σχήμα του αγωγού. Σε αγωγούς τυχαίου σχήματος, τα πράγματα γίνονται πιο δύσκολα και πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές λύσεις. Παρόλα αυτά, μπορούμε να βρούμε μια πολύ καλή προσέγγιση για το E πολύ κοντά στην επιφάνεια του αγωγού ή ακριβώς επάνω σε αυτή. Παρατηρήστε ότι όταν πλησιάσουμε πολύ κοντά σε μια επιφάνεια, αυτή μας φαίνεται τοπικά ως επίπεδη, όση καμπυλότητα και εάν έχει. Π.χ. ένας αγρότης ισχυρίζεται ότι το χωράφι του είναι τελείως επίπεδο ενώ ο αστροναύτης στο διάστημα βλέπει τη γη σφαιρική. Με την ίδια λογική, πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός αγωγού, ή και ακριβώς επάνω σε αυτή, ένας αγωγός μπορεί να προσομοιαστεί τοπικά από ένα επίπεδο πλακίδιο όπως τα Α και Β στο Σχήμα 3.16. Δεδομένου ότι το πεδίο E είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και άρα κάθετο στο πλακίδιο, μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια με το λεπτό φορτισμένο φύλλο και να υπολογίσουμε το E . Θεωρήστε για παράδειγμα το Σχήμα 3.17 και συγκρίνετέ το με το Σχήμα 3.12 που αντιστοιχεί στο λεπτό φύλλο. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην επιφάνεια του αγωγού υπάρχει πεδίο μόνο στη μια μεριά του αφού στο εσωτερικό $E = 0$ ενώ στο φύλλο το E είναι συμμετρικό κατά μέτρο εκατέρωθεν του φύλλου. Επομένως θα ακολουθήσουμε παρόμοια βήματα με την απόδειξη που προηγείται του Σχήματος 3.12 και σχετίζεται με αυτό.

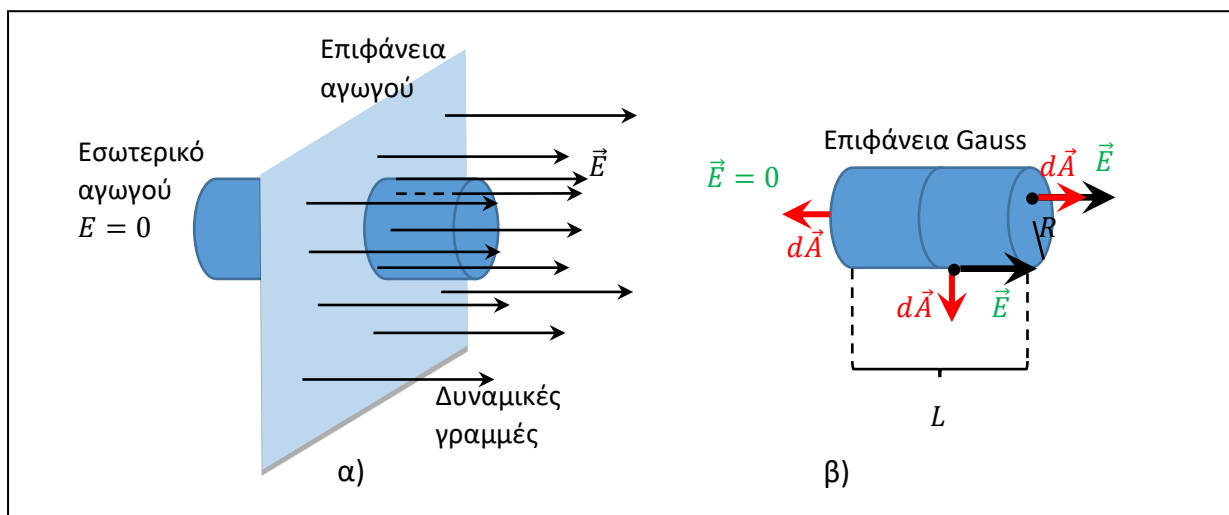


Σχήμα 3.16

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.17α, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο κάθετο στο φύλλο με τυχαία ακτίνα R και τυχαίο μήκος L . Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss Εξ. 3.4, πρέπει να ολοκληρώσουμε επάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Μπορούμε να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα σε τρία μέρη, δυο επάνω στις βάσεις (έστω B_1 και B_2) και ένα επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια (έστω Π).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Στο Σχήμα 3.17β δείχνουμε τον γωνιακό προσανατολισμό του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} σε σχέση με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και στα τρία τμήματα κυλίνδρου. Στην παράπλευρη επιφάνεια το \vec{E} είναι κάθετο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$. Στην βάση η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού, έστω τη B_1 , το πεδίο είναι μηδέν. Αντίθετα, στην άλλη βάση B_2 το \vec{E} είναι παράλληλο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$.



Σχήμα 3.17

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\int_{B_2} EdA + 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Επειδή θεωρούμε μόνο ένα μικρό πλακίδιο του αγωγού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι σταθερή, και άρα και το E είναι σταθερό και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{B_2} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδό της βάσης που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο πR^2 . Επομένως

$$E\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q . Κοιτώντας στο Σχήμα 3.12 στα αριστερά, αυτό το περικλειόμενο φορτίο είναι "παγιδευμένο" στην τομή του κυλίνδρου με το φύλλο που είναι ένας κύκλος με εμβαδό ίσο με αυτό της βάσης πR^2 . Εάν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του πλακιδίου είναι σ , τότε $Q = \sigma\pi R^2$ και έτσι

$$E\pi R^2 = \frac{\sigma\pi R^2}{\epsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

που είναι το διπλάσιο αποτέλεσμα από το αντίστοιχο του λεπτού φύλλου Εξ. 2.7. Γιατί όμως γίνεται αυτό; Αφού οι δυο γεωμετρίες είναι παρόμοιες, θα περίμενε κανείς να είναι και τα πεδία ίσα. Μη ξεχνάτε όμως ότι $E = 0$ στο εσωτερικό του αγωγού και επομένως οι δυναμικές γραμμές που θα είχαμε π.χ. στα αριστερά του φύλλου στο Σχήμα 3.12α, τώρα αναγκάζονται να κατευθυνθούν προς τα δεξιά, προστιθέμενες έτσι στις ήδη υπάρχουσες στην δεξιά μεριά ώστε να διπλασιαστεί το E . Επομένως έχουμε την παρακάτω εξίσωση για το πεδίο στην επιφάνεια ενός αγωγού:

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	Επιφάνεια αγωγού	3.8
---------------------------------	------------------	-----

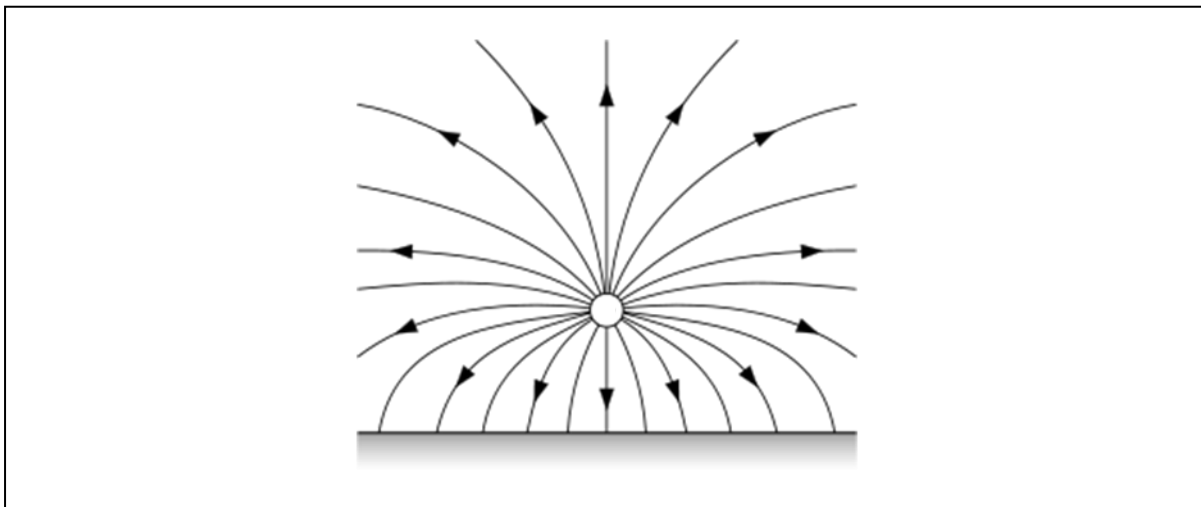
Βέβαια σε ένα τυχαίο αγωγό όπως αυτόν στο Σχήμα 3.16, δεν περιμένουμε η πυκνότητα φορτίου σ να είναι παντού σταθερή για αυτό και το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μόνο τοπική ισχύ. Για παράδειγμα έστω ότι στο Σχήμα 3.15, οι πυκνότητες φορτίου στα δυο σημεία Α και Β είναι σ_A και σ_B αντίστοιχα, γενικά διαφορετικές μεταξύ τους. Τότε σύμφωνα με την Εξ. 3.8, τα αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία θα είναι ίσα με σ_A/ϵ_0 και σ_B/ϵ_0 , κάθετα στο αντίστοιχο πλακίδιο.

Προβλήματα

Πρόβλημα 3.1. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων σημειακών φορτίων με αντίθετο πρόσημο σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

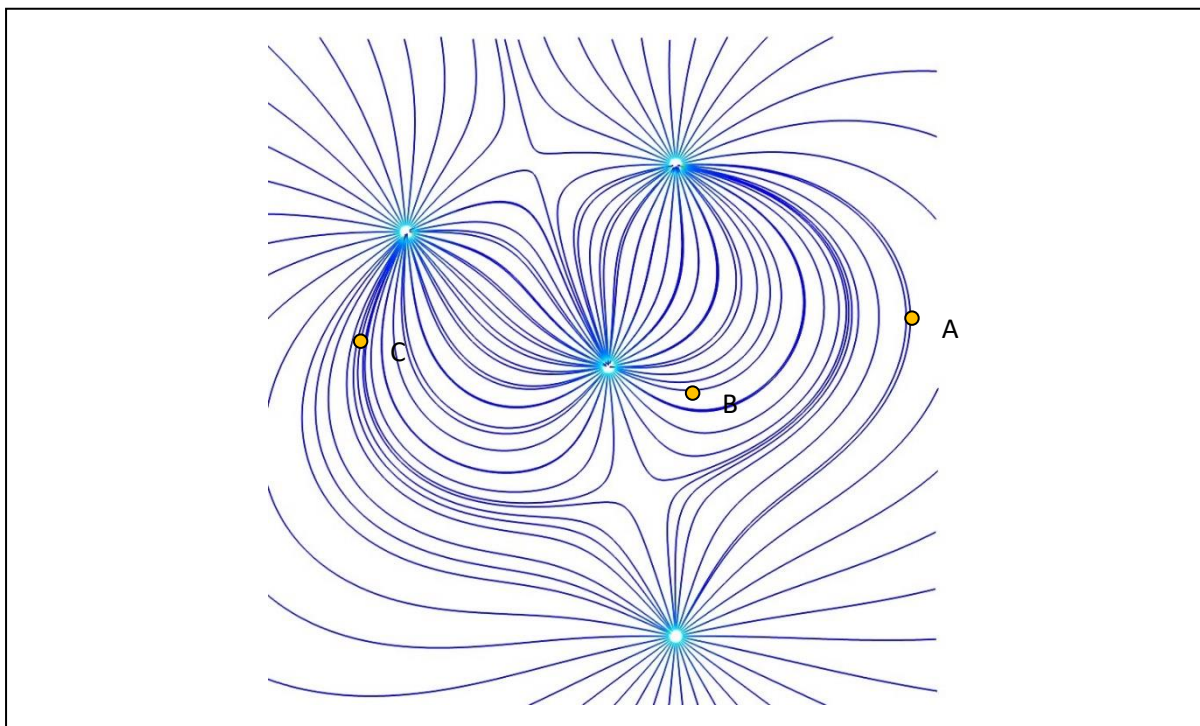
Πρόβλημα 3.2. Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος δυο ίσων θετικών σημειακών φορτίων σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3.3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. Να συζητηθεί ποιοτικώς η φύση του συστήματος αυτού (πρόσημο φορτίων, κατανομή κ.τ.λ.)



<http://physics.stackexchange.com/questions/37572/are-the-field-lines-the-same-as-the-trajectories-of-a-particle-with-initial-velo>

Πρόβλημα 3.4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές ενός συστήματος φορτίων. α) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα οι τοποθεσίες όπου υπάρχουν φορτία κατά τη γνώμη σας. β) Να συζητηθεί το είδος των φορτίων αυτών εάν γνωρίζετε ότι το χαμηλότερο από αυτά στο σχήμα είναι θετικό. γ) Να σημειωθούν επάνω στο σχήμα δυο σημεία όπου περιμένετε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι πρακτικώς μηδέν. δ) Σε ποιο από τα τρία σημεία A, B και C του σχήματος, θα ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη σε ένα τέταρτο υποθετικό σημειακό φορτίο (πολύ μικρότερου μεγέθους από τα φορτία του συστήματος); ε) Σχεδιάστε τα διανύσματα του πεδίου \vec{E} σε καθένα από τα παραπάνω τρία σημεία με το μήκος του διανύσματος να αντιπροσωπεύει ποιοτικώς το μέτρο του (δηλαδή σχεδιάστε ένα μεγαλύτερο διάνυσμα εκεί που πιστεύετε ότι το πεδίο είναι ισχυρότερο κ.ό.κ.) και τον προσανατολισμό του διανύσματος να αντιπροσωπεύει τη γωνία του \vec{E} . στ) Ποιο από τα παραπάνω τρία σημεία A, B και C του σχήματος βρίσκετε εγγύτερα σε φορτίο; Είναι το ίδιο σημείο που βρήκατε στο υποερώτημα δ παραπάνω; Σχολιάστε



<http://elektromagnetisme.no/2010/09/25/using-mayavi-to-visualize-electric-fields/>

Πρόβλημα 3.5. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο που δημιουργεί μονωτικό σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο Q παντού στο εσωτερικό του.

Πρόβλημα 3.6. Σημειακό φορτίο $+Q$ βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγωγικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 . α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος β) Να βρεθεί το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο (εντός, εκτός και στο εσωτερικό του κελύφους)

Πρόβλημα 3.7. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού επάνω στην εξωτερική επιφάνεια ενός λεπτότοιχου αγωγικού σωλήνα μεγάλου μήκους L και ακτίνας R , εάν φέρει ομοιόμορφο φορτίο Q (Σημείωση, μπορείτε να "τεμαχίσετε" τον σωλήνα σε σύνολο μικρών επιπέδων πλακιδίων)

Πρόβλημα 3.8. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός αγωγικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με σ

Πρόβλημα 3.9. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος).

Απάντηση:

$$E = \begin{cases} \frac{\eta R^2}{2\epsilon_0 \rho} & \rho \geq R \\ \frac{\eta \rho}{2\epsilon_0} & \rho < R \end{cases}$$

Πρόβλημα 3.10. Να αποδειχθεί η Εξ. 2.2 που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου Q , με τη χρήση του νόμου του Gauss.

Πρόβλημα 3.11. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός ομοαξονικού καλωδίου απείρου μήκους που αποτελείται από ένα εσωτερικό κυλινδρικό αγωγίμο πυρήνα ακτίνας a και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου σ και ενός κυλινδρικού αγωγίμου κελύφους ακτίνας b και ομοιόμορφης επιφανειακής κατανομής φορτίου $-\sigma$ που περιβάλλει τον πυρήνα. Οι άξονες του πυρήνα και του κελύφους συμπίπτουν.

Πρόβλημα 3.12. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν ο εσωτερικός πυρήνας είναι μονωτής με ομοιόμορφη χωρική κατανομή φορτίου (ενώ το κέλυφος εξακολουθεί να φέρει επιφανειακή κατανομή φορτίου $-\sigma$), έτσι ώστε το καλώδιο ανά μονάδα μήκους να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

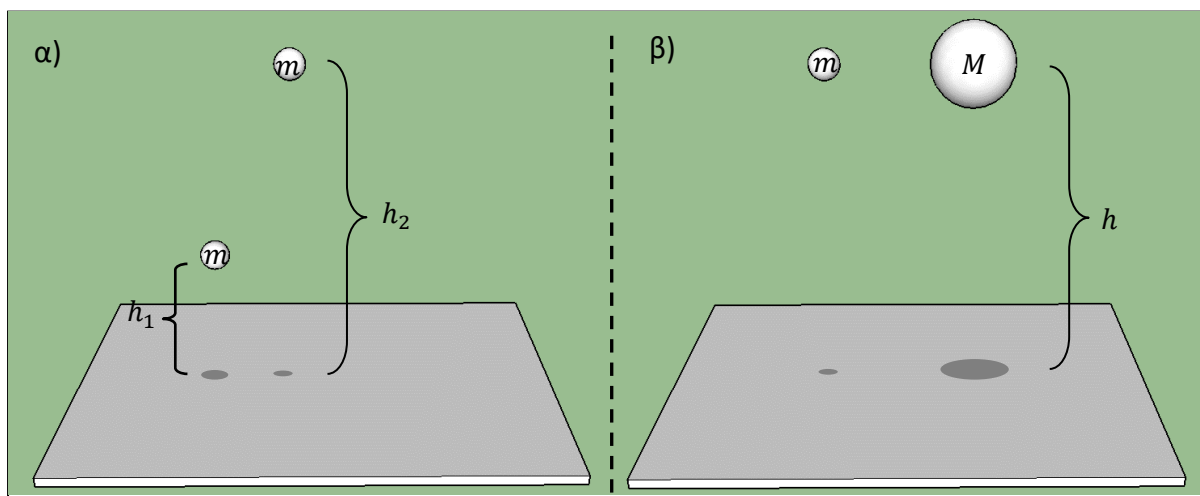
Πρόβλημα 3.13. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο μιας επίπεδης μονωτικής πλάκας απείρου επιφάνειας και πεπερασμένου πάχους d με ομοιόμορφα χωρική πυκνότητα φορτίου η . Πάρτε για ευκολία τον άξονα x κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, με το $x = 0$ στο κεντρικό επίπεδο της πλάκας (έτσι ώστε οι επιφάνειες της πλάκας να είναι στο $x = \pm d/2$).

Πρόβλημα 3.14. Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα εάν η πλάκα είναι αγωγίμη με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ και στις δυο επιφάνειες.

4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 4.1 όπου εικονίζονται δυο διαφορετικές περιπτώσεις δυο μαζών μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης, σε κάποιο ύψος από την επιφάνεια της γης. Ποια από αυτές τις πέτρες μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά εάν αφεθεί ελεύθερη; Η απάντηση σύμφωνα με τη Φυσική Ι είναι ότι μεγαλύτερη ζημιά θα προκαλέσει η πέτρα με τη μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια. Από ποιους παράγοντες όμως εξαρτάται η βαρυτική δυναμική ενέργεια; Ας εξετάσουμε τις δυο διαφορετικές περιπτώσεις ξεχωριστά. Στο Σχήμα 4.1 (στα αριστερά) εικονίζονται δυο όμοιες μάζες m οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος h_1 και $h_2 > h_1$. Προφανώς η πέτρα στο μεγαλύτερο ύψος h_2 θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται από το ύψος. Στην περίπτωση του Σχήματος 4.1β (στα δεξιά), εικονίζονται δυο μάζες στο ίδιο ύψος h αλλά με την μάζα M να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την άλλη μάζα m . Εάν αφήσουμε τις μάζες ελεύθερες, η M σίγουρα θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από τη μάζα. Τέλος εάν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πτώσης στη γη και στη σελήνη, περιμένουμε στη γη να έχουμε μεγαλύτερη ζημιά από ότι στη σελήνη και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από το g (η σταθερά της βαρύτητας) αφού στην γη είναι μεγαλύτερο.



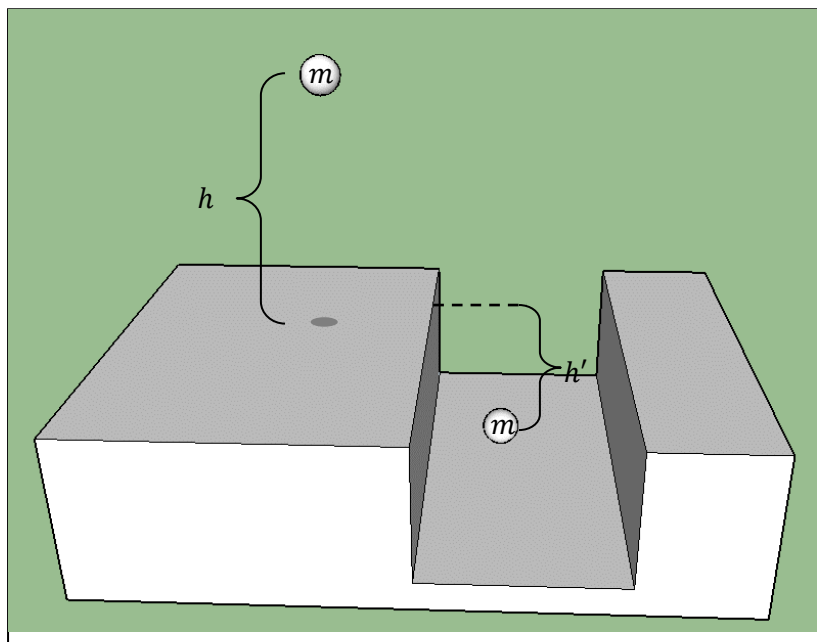
Σχήμα 4.1

Όντως τα αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος είναι σε συνέπεια με αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική αφού σύμφωνα με αυτή, η βαρυτική δυναμική ενέργεια U κοντά στην επιφάνεια της γης δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$U = mgh$	Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια	4.1
-----------	----------------------------	-----

Οι μονάδες της δυναμικής ενέργειας είναι τα *Joules* που συμβολίζονται με το γράμμα J . Προσέξτε ότι η δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι τόσο θετική, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, που σημαίνει ότι οι πέτρες μπορούν να προκαλέσουν έργο κατά την πτώση τους (υδροηλεκτρικά εργοστάσια με πτώση νερού) αλλά και αρνητική επειδή το ύψος μπορεί να είναι αρνητικό όπως για

μια μάζα m μέσα στο αυλάκι του παρακάτω Σχήματος 4.2 με ύψος $h' < 0$. Στη δεύτερη περίπτωση η πέτρα όχι μόνο δεν μπορεί να παράξει έργο αλλά αντιθέτως απαιτείται έργο για να την επαναφορά της στην επιφάνεια της γης.



Σχήμα 4.2

Βέβαια ο αναγνώστης πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι το ύψος h είναι μια σχετική ποσότητα και το μηδέν του λαμβάνεται αυθόρμητα. Συνήθως παίρνουμε $h = 0$ στην επιφάνεια της γης αλλά και η γη δεν είναι τελείως επίπεδη. Έτσι π.χ. για ανθρώπους που ζουν σε κάποιο υψόμετρο όπως ένα χωριό στα 235 μέτρα από την επιφάνεια της γης, φαίνεται λογικό να θεωρούν ότι οι πέτρες στο έδαφός του χωριού έχουν ύψος $h = 0$ και άρα και δυναμική ενέργεια $U = 0$. Για κάποιον άλλον όμως παρατηρητή που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας, αυτές οι πέτρες φαίνονται να έχουν ύψος $h = 235 \text{ m}$ και άρα και δυναμική ενέργεια $U \neq 0$. Ποιος από τους δυο έχει δίκιο; Κανένας από τους δυο, δεν υπάρχει απόλυτη τιμή του h και κατ' αναλογία και απόλυτη τιμή του U . Ο κάθε παρατηρητής ορίζει το μηδέν του ύψους του με κάποιο πρακτικό τρόπο ώστε να είναι ευκολότερη η μέτρησή του. Για παράδειγμα για τον άνθρωπο του χωριού είναι λογικό να πάρει κατά σύμβαση ότι $h = 0$ στο έδαφος του χωριού του γιατί έτσι διευκολύνει την ζωή του. Ομοίως για τον άνθρωπο στην ακτή, είναι λογικό να επιλέξει το $h = 0$ στο επίπεδο της θάλασσας. Παρόλο που οι δυο παρατηρητές διαφωνούν στις απόλυτες μετρήσεις τους, εντούτοις συμφωνούν απόλυτα στις διαφορές ύψους. Έτσι εάν ένας άνθρωπος στο χωριό ανυψώσει μια κοτρώνα από το έδαφος στα 1.5 m, τότε ο παρατηρητής στην ακτή θα καταγράψει μια μεταβολή από $h = 235$ έως τα $h = 236.5 \text{ m}$ δηλαδή διαφορά $\Delta h = 236.5 - 235 = 1.5 \text{ m}$, ακριβώς όση παρατηρεί και ο άνθρωπος του χωριού. Επομένως καταλήγουμε στο εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Οι διαφορές ύψους αλλά και οι διαφορές δυναμικής ενέργειας, είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων του κάθε παρατηρητή. Επομένως διαφορετικοί παρατηρητές καταγράφουν τις ίδιες διαφορές παρότι που μπορεί να διαφωνούν στις επιμέρους τιμές που καταγράφουν για ένα συγκεκριμένο σημείο.

Μηχανικό Έργο

Όπως προαναφέρθηκε, μια μάζα η οποία αφήνεται ελεύθερη από κάποιο θετικό ύψος, παράγει έργο κατά την πτώση αυτή. Το ύψος, άρα και η δυναμική ενέργεια, ελαττώνεται κατά την πτώση αυτή ενώ το παραγόμενο έργο είναι θετικό. Αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται το μείον στην σχέση έργου – δυναμικής ενέργειας που είδαμε στην μηχανική:

$W = -\Delta U$	Έργο παραγόμενο από το πεδίο	4.2
-----------------	------------------------------	-----

Η ποσότητα $\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}}$ είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας για την συγκεκριμένη μετατόπιση (θυμηθείτε ότι πάντοτε οι μεταβολές στην Φυσική λαμβάνονται ως η τελική μείον την αρχική ιδιότητα). Δηλαδή το έργο στην παραπάνω σχέση, είναι το έργο που παράγει η δύναμη του πεδίου. Επίσης πρέπει να καταλάβουμε ότι ένα φυσικό σύστημα όπως μια μάζα στα προηγούμενα παραδείγματα, τείνει αυθόρμητα από καταστάσεις υψηλής προς καταστάσεις χαμηλής δυναμικής ενέργειας. Αντιστρόφως, εάν προσπαθήσουμε να βγάλουμε την μάζα από τον πυθμένα του πηγαδιού στο Σχήμα 4.2, τότε πρέπει να προσφέρουμε έργο και επομένως το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή το έργο που παράγει η δύναμη του πεδίου ως δύναμη × μετατόπιση είναι αρνητικό αφού η βαρύτητα είναι αντίθετη στη μετατόπιση. Από την παραπάνω Εξίσωση 4.2, βλέπουμε ότι η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας σε αυτή τη μετακίνηση είναι θετική, δηλαδή η δυναμική ενέργεια της μάζας αυξάνεται.

Επομένως έχουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Όταν ένα σύστημα αφεθεί ελεύθερο, τότε αυτό θα κινηθεί αυθόρμητα από περιοχές υψηλότερης προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας και κατά την μετακίνησή του αυτή, η δύναμη του πεδίου παράγει έργο. Αντιστρόφως, για να μετακινηθεί ένα σώμα από περιοχές χαμηλότερης προς περιοχές υψηλότερης δυναμικής ενέργειας, απαιτείται εξωτερικό έργο αφού το έργο του πεδίου είναι αρνητικό.

Παρατηρήστε ότι η έννοια της χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας δεν σημαίνει αναγκαστικά μηδενική ή και αρνητική τιμή, απλά μικρότερη αλγεβρική τιμή. Για παράδειγμα μια πέτρα με δυναμική ενέργεια 1000 J κυλάει αργά επάνω σε μια πλαγιά στην προσπάθειά της να πέσει στο έδαφος. Στην πορεία όμως συναντά ένα θάμνο και παγιδεύεται σε τέτοιο ύψος ώστε η νέα της δυναμική ενέργεια να είναι 400 J . Η κίνησή της έγινε αυθόρμητα αφού μετέβη σε χαμηλότερη δυναμική ενέργεια. Ομοίως ένα αντικείμενο που είναι πεσμένο στο δρόμο έχει δυναμική ενέργεια μηδέν (κατά σύμβαση όπως το συζητήσαμε παραπάνω). Εάν κατά λάθος πέσει από ένα παραθύρι ενός υπογείου, θα βρεθεί κάτω από το έδαφος με αρνητική τελική δυναμική ενέργεια έστω -200 J . Και πάλι η κίνηση έγινε αυθόρμητα επειδή αλγεβρικός η τελική δυναμική του ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική. Και βέβαια το συγκεκριμένο αντικείμενο μπορεί να πέσει ακόμα χαμηλότερα, π.χ. από το τραπέζι ενός υπογείου στο πάτωμα του υπογείου και να μειώσει αλγεβρικός την δυναμική του ενέργεια ακόμα περισσότερο, δηλαδή να την κάνει περισσότερο αρνητική. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, αυτό που μετράει είναι η διαφορά της δυναμικής ενέργειας ΔU που είναι αρνητική και έτσι η κίνηση γίνεται αυθόρμητα και επιπλέον η βαρύτητα παράγει έργο σύμφωνα με την Εξ. 4.2. Αντίθετως, εάν κάποιος θέλει να ανυψώσει ένα αντικείμενο από το πάτωμα του υπόγειου γκαράζ του με δυναμική ενέργεια έστω -400 J και να το φέρει κατά ένα μέτρο υψηλότερα, έστω στα

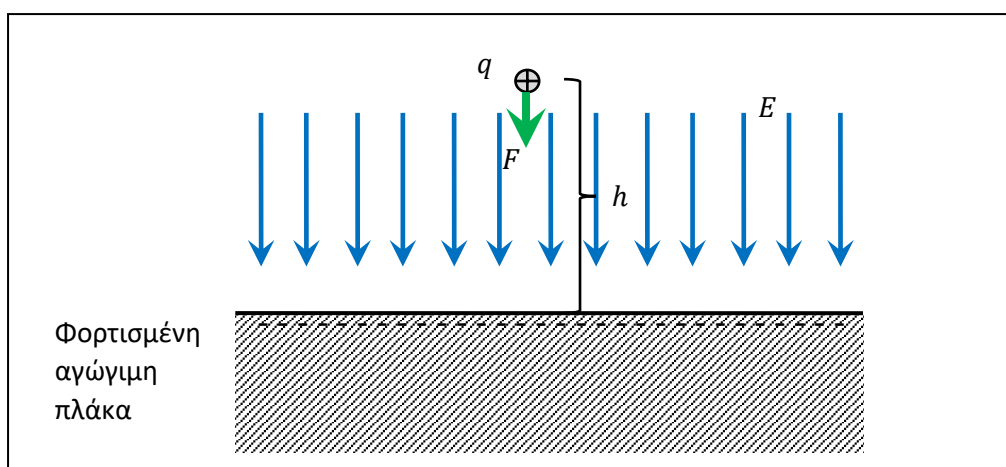
-150 J , αλγεβρικός η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι θετική $\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = -150 - (-400) = 250$ παρόλο που και οι δυο ενδιάμεσες τιμές της U είναι αρνητικές. Σε αυτή τη περίπτωση το έργο της βαρύτητας είναι αρνητικό αφού αυτή αντιτίθεται στη μετακίνηση.

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Ομοιογενές E

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να προσομοιώσουμε το βαρυτικό πεδίο με τη βοήθεια των ηλεκτρικών δυνάμεων. Το αντίστοιχο πεδίο βέβαια είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Εφόσον το g είναι αρκετά σταθερό κοντά στην επιφάνεια της γης, αρκεί να δημιουργήσουμε ένα ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε μια ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου όπως αυτή στην φορτισμένη πλάκα του Σχήματος 4.3, η οποία είναι αρνητική και έτσι το πεδίο E είναι προς τα κάτω, όπως και η βαρύτητα. Εάν φέρουμε στο χώρο επάνω από την πλάκα ένα θετικό σημειακό φορτίο q , τότε θα ασκηθεί επάνω του μια δύναμη F και θα κινηθεί προς τα κάτω τείνοντας προς την αρνητική πλάκα η οποία είναι το ανάλογο της επιφάνειας της γης στη βαρύτητα. Άρα αυτό το φορτίο μπορεί να παράξει έργο και άρα διαθέτει δυναμική ενέργεια η οποία σε αναλογία με την Εξ. 4.1 ισούται με:

$U = q E h$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, Φορτίο σε ομοιογενές E	4.3
-------------	--	-----

Προσέξτε ότι η μάζα m έχει αντικατασταθεί από το φορτίο q και το g από το $|E|$.



Σχήμα 4.3

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Μη Ομοιογενές E

Η Εξίσωση 4.3 μπορεί να αποδειχθεί και από αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική. Η δυναμική ενέργεια στην μια διάσταση ορίζεται ως η συνάρτηση $U(x)$ που ικανοποιεί την σχέση

$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.4
----------------------------	----------------------------	-----

ή αντιστρόφως

$U(x) = - \int F(x) dx$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.5
-------------------------	----------------------------	-----

όπου η $F(x)$ είναι η δύναμη του πεδίου που ασκείται στο σώμα. Στον ηλεκτρισμό $F = qE$ και οπότε με ολοκλήρωση για σταθερό E παίρνουμε $U = -qEx$. Η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν εάν δεχθούμε κατά σύμβαση ότι στο $x = 0$ έχουμε και $U = 0$. Το πεδίο είναι προς τα κάτω οπότε είναι αρνητικό και έτσι $E = -|E|$ που οδηγεί στο $U = q|E|x$. Αυτή η εξίσωση είναι η ίδια με την Εξ. 4.3 με το ύψος h να γράφεται ως x .

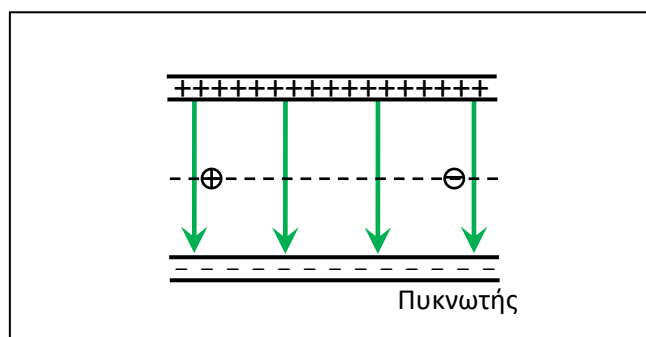
Στη γενική περίπτωση όπου το $E(x)$ δεν είναι σταθερό, τότε και ηλεκτρική δύναμη $F(x) = qE(x)$ που ασκείται σε ένα σημειακό δοκιμαστικό φορτίο q που βρίσκεται μέσα σε αυτό το πεδίο, δεν είναι σταθερή και πρέπει να καταφύγουμε στην Εξ. 4.5 για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του φορτίου αυτού η οποία θα δίνεται γενικά από την εξίσωση

$U(x) = -q \int E(x) dx$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια - Φορτίο μέσα σε Πεδίο	4.6
--------------------------	---	-----

Βέβαια και στον ηλεκτρισμό όπως και στη βαρύτητα ισχύει η Εξ. 4.2 που συνδέει το έργο με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας $W = -\Delta U$. Σε αντίθεση όμως με τη βαρύτητα, στον ηλεκτρισμό υπάρχουν δυο ειδών φορτία, τα θετικά και τα αρνητικά τα οποία έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς την κίνηση αλλά και πολλές ομοιότητες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας πυκνωτής που φέρει φορτίο $Q = \pm 100 \text{ nC}$ στους οπλισμούς του οι οποίοι βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση 2 mm και με εμβαδό ίσο με 18.83 cm^2 ο καθένας. Δυο δοκιμαστικά σημειακά φορτία $q = \pm 2 \text{ nC}$ τοποθετούνται στο εσωτερικό του σε ίση απόσταση από τους δυο οπλισμούς και μακριά μεταξύ τους (ώστε η μεταξύ αλληλεπίδρασή τους να θεωρείται αμελητέα) και αφήνονται ελεύθερα. Αφού αφεθούν ελεύθερα και μετακινηθούν κατά 0.5 mm από την αρχική τους θέση το καθένα, να βρεθεί (α) η μεταβολή της δυναμικής τους ενέργειας, (β) το έργο που αποδίδει το πεδίο χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του έργου, και (γ) να σχολιαστεί η φορά της μετακίνησης των φορτίων ως προς το πεδίο και ως προς την μεταβολή της δυναμικής τους ενέργειας. Πάρτε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή.



Λύση:

(α) Είδαμε ότι στο εσωτερικό του πυκνωτή υπάρχει ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από την απλή έκφραση Εξ. 3.7

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι επειδή το συγκεκριμένο E είναι προς τα κάτω σύμφωνα με την φορά των δυναμικών γραμμών. Το σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του οπλισμού και ισούται με φορτίο ανά επιφάνεια $\sigma = Q/A$ επομένως

$$E = -\frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{-100 \times 10^{-9}}{18.83 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}} = -6.00 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Η αρχική θέση των δυο φορτίων είναι στην μέση του πυκνωτή. Αφού το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βρίσκεται στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή, αναγκαστικά και το ύψος h της Εξ. 4.3 θα μετράει από εκεί. Έτσι στην αρχική τους θέση τα δυο φορτία έχουν $h = 1 \text{ mm}$ και επομένως η δυναμική τους ενέργεια είναι αντίστοιχα ίση με

$$U_+ = q|E|h = 2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$U_- = -q|E|h = -2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 10^{-3} = -12 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Το θετικό φορτίο κινείται αυθόρμητα προς τα κάτω (προς τον αρνητικό οπλισμό) οπότε η τελική του θέση είναι σε ύψος $h = 0.5 \text{ mm}$ και η τελική του δυναμική ενέργεια

$$U_+' = q|E|h = 2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U_+ = 6 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6} = -6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Το αρνητικό φορτίο κινείται αυθόρμητα προς τα πάνω (προς τον θετικό οπλισμό) οπότε η τελική του θέση είναι σε ύψος $h = 1.5 \text{ mm}$ και η τελική του δυναμική ενέργεια

$$U_-' = -q|E|h = -2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-3} = -18 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U_- = -18 \times 10^{-6} - (-12) \times 10^{-6} = -6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Βλέπουμε ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι η ίδια για τα δυο φορτία. Αυτό γίνεται επειδή κατά μέτρο τα δυο φορτία είναι ίσα και επειδή κατ' απόλυτη τιμή μετακινήθηκαν κατά την ίδια απόσταση. Το σημαντικό δεν είναι η επιμέρους τιμές των δυο ΔU αλλά το ότι οι μεταβολές αυτές έχουν το ίδιο πρόσημο.

(β) Ο αυστηρός ορισμός του έργου για κατακόρυφη μετακίνηση είναι ο

$$W = F\Delta y$$

Στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, η δύναμη είναι ίση με $F = qE$ και επομένως

$$W = qE\Delta y$$

Το θετικό φορτίο κινείται προς τα κάτω και έτσι $\Delta y_+ = -0.5 \text{ mm}$ ενώ αντιθέτως για το αρνητικό φορτίο $\Delta y_- = +0.5 \text{ mm}$. Επομένως τα αντίστοιχα έργα είναι ίσα με

$$W_+ = qE\Delta y_+ = 2 \times 10^{-9} \times (-6 \times 10^6) \times (-0.5 \times 10^{-3}) = 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$W_- = -qE\Delta y_- = -2 \times 10^{-9} \times (-6 \times 10^6) \times 0.5 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

Δηλαδή και στις δυο περιπτώσεις το πεδίο παρήγαγε έργο.

(γ) Όπως είδαμε παραπάνω, το θετικό φορτίο ακολουθεί τη φορά του πεδίου ενώ το αρνητικό κινείται αντίθετα με αυτό. Παρόλα αυτά, βλέπουμε από το υποερώτημα α ότι και τα δυο φορτία μείωσαν την δυναμική τους ενέργεια.

Το ασφαλές συμπέρασμα που εξάγεται από το παραπάνω παράδειγμα είναι το εξής:

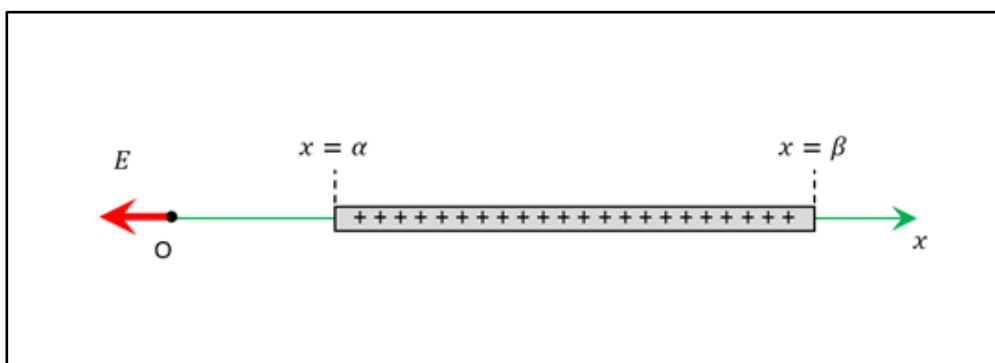
Ανεξάρτητα από το είδος του φορτίου, η αυθόρμητη κίνηση τους είναι από περιοχές υψηλότερης προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας, παρόλο που τα θετικά φορτία κινούνται αντίθετα από τα αρνητικά φορτία υπό την επίδραση του ίδιου πεδίου.

Παράδειγμα 4.2.

Στο Κεφ. 2 στο Πρόβλημα 2.1, μια φορτισμένη γραμμή πεπερασμένου μήκους με ομοιόμορφο φορτίο Q εκτείνεται στον άξονα x από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ και ζητείται το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων. Στον Πίνακα 2.2. δίνεται η λύση αυτού του προβλήματος ως:

$$E_0 = \frac{kQ}{\alpha\beta}$$

Να βρεθούν (α) το πεδίο $E(x)$ σε σημείο P με τυχαία συντεταγμένη $x < \alpha$ και (β) η δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού δοκιμαστικού φορτίου q όταν αυτό τοποθετηθεί στο παραπάνω σημείο P. Πάρτε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων



Λύση:

α) Εάν παίρναμε το σημείο P ως νέα αρχή των αξόνων το οποίο απέχει από την προηγούμενη αρχή O απόσταση x , τότε τα όρια της ράβδου θα άλλαζαν από α και β σε $\alpha - x$ και $\beta - x$ αντίστοιχα και άρα από το δεδομένο αποτέλεσμα το πεδίο στο P θα ήταν ίσο με

$$E_P = \frac{kQ}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

Αφού το σημείο P έχει συντεταγμένη x σύμφωνα με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, τότε το παραπάνω πεδίο E_P στο P είναι στην ουσία ίσο με το $E(x)$. Επομένως

$$E(x) = \frac{kQ}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

β) Σύμφωνα με την Εξ. 4.6, η δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου όταν βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $E(x)$ δίνεται από την

$$U(x) = -q \int E(x) dx$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκαμε στο υποερώτημα α παραπάνω, μπορεί να γραφεί σε ελαφρά διαφορετική μορφή

$$E(x) = \frac{kQ}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x} \right)$$

η οποία είναι πιο εύκολο να ολοκληρωθεί. Έτσι

$$U(x) = -q \frac{kQ}{\beta - \alpha} \int \left(\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x} \right) dx$$

ή

$$U(x) = k \frac{Qq}{\beta - \alpha} [\ln(\alpha - x) - \ln(\beta - x)] + c$$

Η σταθερά c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτή η σταθερά εκφράζει το γεγονός ότι η δυναμική ενέργεια είναι σχετική και όχι απόλυτη ποσότητα και μόνο οι διαφορές της έχουν νόημα. Επομένως η προσθαφαίρεση μιας σταθεράς δεν αλλάζει την Φυσική του προβλήματος. Συνήθως η σταθερά επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας σε κάποιο βολικό σημείο αναφοράς. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μας ζητείται να επιλέξουμε την αρχή O όπου $x = 0$. Έτσι

$$U(0) = 0 \Rightarrow k \frac{Qq}{\beta - \alpha} [\ln(\alpha) - \ln(\beta)] + c = 0$$

δηλαδή

$$c = -k \frac{Qq}{\beta - \alpha} [\ln(\alpha) - \ln(\beta)]$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στην $U(x)$ παραπάνω έχουμε

$$U(x) = k \frac{Qq}{\beta - \alpha} \left[\ln \left(\frac{\alpha - x}{\alpha} \right) - \ln \left(\frac{\beta - x}{\beta} \right) \right]$$

Παράδειγμα 4.3.

Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού θετικού δοκιμαστικού φορτίου q όταν αυτό τοποθετηθεί στο πεδίο ενός άλλου θετικού σημειακού φορτίου $Q \gg q$. Υποθέστε ότι και τα δυο φορτία βρίσκονται επάνω στον άξονα x και εργαστείτε στη μια διάσταση.

Λύση:

Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το θετικό σημειακό φορτίο Q σε απόσταση r από αυτό σύμφωνα με την Εξ. 2.2 ισούται με:

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

Η απόσταση r από το φορτίο παίζει τον ρόλο του x στην Εξ. 4.6 επομένως

$$U(r) = -q \int E(r) dr = -q \int k \frac{Q}{r^2} dr = k \frac{Qq}{r} + c$$

όπου c είναι όπως και προηγουμένως η σταθερά ολοκλήρωσης. Επειδή το $1/r$ τείνει στο μηδέν όταν $r \rightarrow \infty$, ένα βολικό σημείο αναφοράς είναι το άπειρο. Έτσι το επιλέγουμε ως το μηδέν της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $U(\infty) \rightarrow 0$. Αυτό οδηγεί στο $c = 0$ που απλουστεύει πάρα πολύ την παραπάνω έκφραση $U(r)$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αποδείχθηκε το εξής πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

$U = k \frac{Qq}{r}$	Δυναμική Ενέργεια δυο Σημειακών Φορτίων	4.7
----------------------	--	-----

Παρόλο που στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν μόνο θετικά φορτία, η παραπάνω σχέση έχει γενική ισχύ εάν χρησιμοποιήσουμε και αρνητικά φορτία. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα από τα δυο φορτία είναι αρνητικό. Τότε η παραπάνω εξίσωση προβλέπει αρνητική δυναμική ενέργεια. Εάν αφήσουμε ελεύθερα αυτά τα δυο φορτία, τότε αυτά θα πλησιάσουν αυθόρμητα μεταξύ τους λόγω αμοιβαίας έλξης και έτσι το r θα μειωθεί, το $1/r$ θα αυξηθεί αλλά το U ως αρνητικό θα μειωθεί (θα γίνει περισσότερο αρνητικό). Επομένως η Εξ. 4.7 οδηγεί στην ορθή πρόβλεψη ότι το σύστημα των δυο φορτίων θα κινηθούν αυθόρμητα προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Αντιθέτως όταν τα δυο φορτία είναι ομόσημα (π.χ. και τα δυο αρνητικά), τότε η Εξ. 4.7 προβλέπει θετική δυναμική ενέργεια η οποία μειώνεται όταν τα δυο φορτία απομακρύνονται μεταξύ τους, η οποία είναι και πάλι σε συμφωνία με την αυθόρμητη κίνηση των φορτίων λόγω αμοιβαίας άπωσης. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι (α) αρνητική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει έλξη ενώ (β) θετική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει άπωση.

Παράδειγμα 4.4.

Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος τριών σημειακών φορτίων $q_1 = 4 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$ και $q_3 = -1 \mu\text{C}$ που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 2 cm . Να ερμηνευτεί το πρόσημο της απάντησής σας.

Λύση:

Πρέπει να εφαρμόσουμε την Εξ. 4.7 για κάθε ζεύγος φορτίων. Λόγω επαλληλίας, η συνολική δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} = 9 \times 10^9 \left(\frac{4 \times (-2)}{2} + \frac{4 \times (-1)}{2} + \frac{(-2) \times (-1)}{2} \right) \times \frac{10^{-12}}{10^{-2}}$$

ή

$$U = -4.5 \text{ Joules}$$

Όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, το αρνητικό πρόσημο σημαίνει γενικά έλξη οπότε το σύστημα εάν αφεθεί ελεύθερο, θα μειώσει την δυναμική του ενέργεια συμπυκνώνοντας τα τρία φορτία μαζί. Αυτό γίνεται επειδή έχουμε ένα μεγάλο θετικό φορτίο (το q_1) το οποίο έλκει τα δυο μικρότερα αρνητικά και παρόλο που τα δυο τελευταία απωθούνται μεταξύ τους, η έλξη προς το θετικό φορτίο τελικά υπερνικά. Αντιθέτως εάν και τα τρία φορτία ήταν θετικά (ή αρνητικά) τότε θα παίρναμε $U > 0$ και τα τρία φορτία θα απομακρύνονταν αυθόρμητα μεταξύ τους έως το άπειρο.

Ηλεκτρικό Δυναμικό– Ορισμός

Είδαμε ότι για τον προσδιορισμό του E σε κάποιο σημείο του χώρου που δημιουργείται από κάποια μακρινά φορτία, χρησιμοποιήσαμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q στο σημείο αυτό. Το δοκιμαστικό φορτίο είναι άνευ σημασίας γιατί συνήθως μας ενδιαφέρει η τιμή E η οποία δεν εξαρτάται από το q . Για παράδειγμα, το E σε ένα σημείο του χώρου που παράγεται από κάποια σταθερά φορτία, θα είναι και αυτό σταθερό, έστω 100 N/C . Για να μετρήσουμε αυτή τη τιμή, θα μπορούσαμε να έχουμε χρησιμοποιήσει ένα αριθμό διαφορετικών δοκιμαστικών φορτίων, π.χ. 2 nC , 4 nC , 6 nC κ.ό.κ. Όλες οι μετρήσεις θα κατέληγαν στην ίδια τιμή του E αλλά βέβαια θα έδιναν διαφορετική τιμή για την δύναμη αφού αυτή είναι ανάλογη του q . Αυτός είναι και ο λόγος που διαιρούμε τη δύναμη F με το q για να πάρουμε το E επειδή αυτό είναι μια ποσότητα που χαρακτηρίζει μόνο την πηγή. Εντελώς παρομοίως, η δυναμική ενέργεια U σε ένα σημείο του χώρου όπου έχουμε φέρει ένα δοκιμαστικό φορτίο q , εξαρτάται τόσο από την πηγή όσο και από το q (π.χ. δείτε τα Παραδείγματα 4.1 έως 4.3 ή και την Εξίσωση 4.3 παραπάνω) και μάλιστα είναι ευθέως ανάλογη του q σύμφωνα με την Εξ. 4.6. Επομένως η ποσότητα $V = U/q$ δεν εξαρτάται από το q αλλά μόνο από την πηγή. Αυτή η ποσότητα ονομάζεται "**Ηλεκτρικό Δυναμικό**" και είναι μια πολύ σημαντική ποσότητα στον ηλεκτρισμό.

$V(x) = \frac{U(x)}{q}$	Ηλεκτρικό Δυναμικό	4.8
-------------------------	--------------------	-----

Οι μονάδες του Δυναμικού είναι το 1 Volt που ισούται με 1 Joule/C . Από την Εξ. 4.6 οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$V(x) = - \int E(x) dx$	Δυναμικό – Ηλεκτρικό Πεδίο	4.9
-------------------------	----------------------------	-----

και αντιστρόφως

$E(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$	Ηλεκτρικό Πεδίο - Δυναμικό	4.10
-----------------------------	----------------------------	------

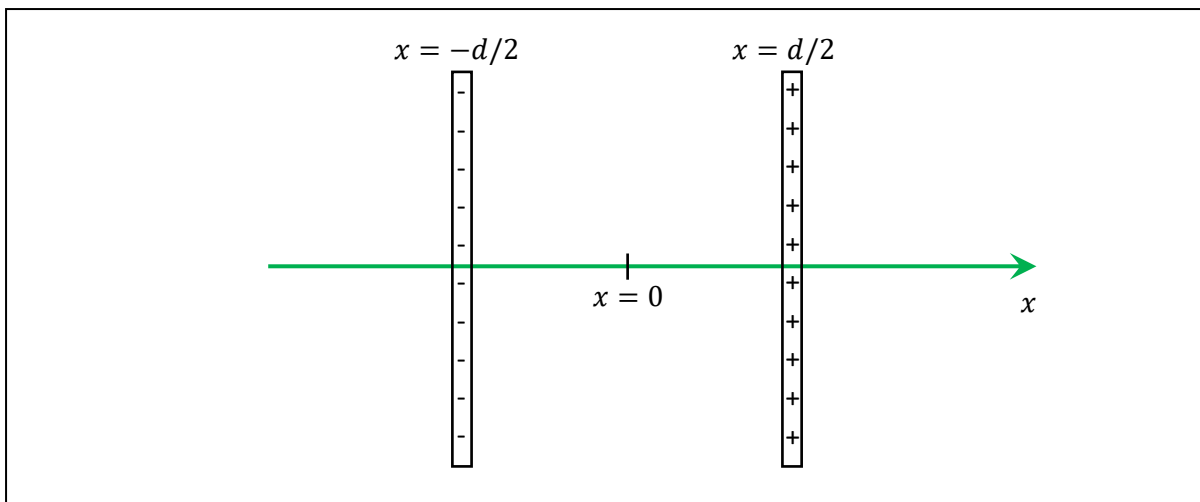
Ο αναγνώστης πρέπει να συγκρίνει αυτά τα αποτελέσματα με αυτά των Εξ. 4.4 και 4.5 παραπάνω. Έχουμε τον πλήρη παραλληλισμό με $F \rightarrow E$ και $U \rightarrow V$.

Παράδειγμα 4.5.

Επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δυο ορθογώνιες πλάκες με ομοιόμορφο φορτίο Q και εμβαδό A η καθεμία, οι οποίες βρίσκονται κάθετα στον άξονα x στις συντεταγμένες $x = \pm d/2$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο εάν είναι μηδέν στο $x = 0$.

Λύση:

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τον εσωτερικό και τον εξωτερικό χώρο του πυκνωτή.



Από την Εξ. 4.9 έχουμε

$$V(x) = - \int E dx = -E \int dx = -Ex + c$$

Από την συνοριακή συνθήκη $V(0) = 0$ προκύπτει $c = 0$ και έτσι $V(x) = -Ex$. Επάνω στους οπλισμούς έχουμε $V(\pm d/2) = \mp Ed/2$ και η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους ισούται με

$$\Delta V = V(d/2) - V(-d/2) = -\frac{Ed}{2} - \left(\frac{Ed}{2}\right) = -Ed$$

Αφού το E είναι αρνητικό, μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα:

$\Delta V = E d$	Διαφορά δυναμικού - πυκνωτής	4.11
-------------------	---------------------------------	------

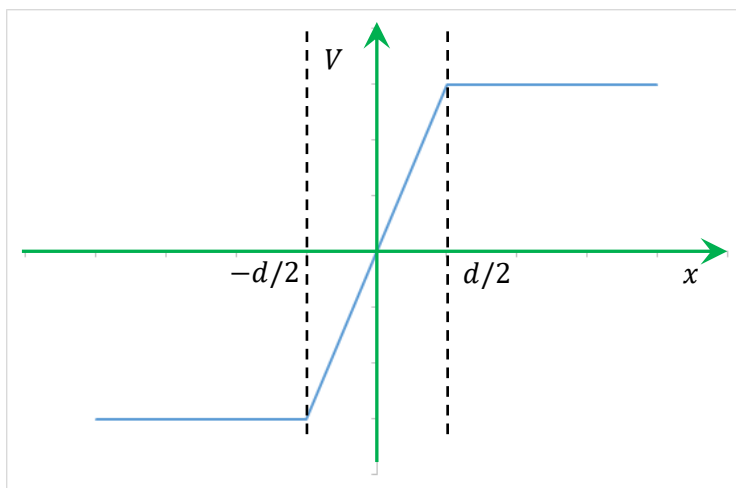
Από την Εξ. 3.7 το ηλεκτρικό πεδίο στον εσωτερικό χώρο του πυκνωτή είναι σταθερό και ίσο με:

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Το μείον προκύπτει επειδή το πεδίο είναι προς τα αριστερά στο παραπάνω σχήμα. Αντικαθιστώντας για το E στην Εξ. 4.11 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\Delta V = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

Στο εξωτερικό του πυκνωτή όπως είδαμε $E = 0$ και από την Εξ. 4.9 συνάγεται ότι $V(x) = c_A$ στα αριστερά και $V(x) = c_D$ στα δεξιά όπου τα c_A και c_D είναι σταθερές. Εφόσον η παράγωγος της $V(x)$ είναι ίση κατά μέτρο με το ηλεκτρικό πεδίο E , τότε πρέπει αναγκαστικά να είναι μια συνεχής συνάρτηση του x αλλιώς το E απειριζόταν εκεί όπου η $V(x)$ θα εμφάνιζε άλματα στις τιμές της. Έτσι επάνω στο σύνορο των τριών χώρων (αριστερά, μέσα και δεξιά του πυκνωτή), που είναι οι δυο οπλισμοί, η συνάρτηση $V(x)$ πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή εκατέρωθεν του συνόρου. Στο εσωτερικό του πυκνωτή είδαμε ότι $V(x) = -Ex$ και επομένως οι σταθερές c_A και c_D πρέπει να είναι ίσες με τις τιμές αυτής της συνάρτησης επάνω στους οπλισμούς $V(\pm d/2) = \mp Ed/2$. Έτσι η γραφική παράσταση της $V(x)$ παντού στο χώρο είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Αυτή η γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην μαθηματική τμηματική εξίσωση:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{|E|d}{2} & x \leq -b/2 \\ |E|x & -b/2 < x < b/2 \\ \frac{|E|d}{2} & x \geq b/2 \end{cases}$$

όπου $E = -Q/A\epsilon_0$. Στην πράξη σε πολλά κυκλώματα, παίρνουμε κατά σύμβαση το δυναμικό του αρνητικού οπλισμού ίσο με μηδέν (γείωση) οπότε το δυναμικό στον άλλο οπλισμό είναι αυτομάτως ίσο με $V = |E|d$ όση δηλαδή όλη η διαφορά δυναμικού του παραπάνω προβλήματος (να λυθεί ως άσκηση το ίδιο πρόβλημα αλλά με $V = 0$ στον αρνητικό οπλισμό). Βέβαια στην παραγωγή οι σταθερές μηδενίζονται οπότε όποια και να είναι η επιλογή μας στο δυναμικό, το E είναι πάντοτε το ίδιο.

Διαφορές Δυναμικού – Ηλεκτρική Τάση

Σε πολλές εφαρμογές είναι γνωστή η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων A και B. Για παράδειγμα οι ρευματολήπτες της Δ.Ε.Η. βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού 220 V (από τον ένα ακροδέκτη στον άλλο). Επίσης οι γνωστές μας μπαταρίες AAA που χρησιμοποιούμε στις περισσότερες ηλεκτρονικές συσκευές μικρής ισχύος, αναγράφουν επάνω τους 1.5 V που σημαίνει ότι μεταξύ των δυο πόλων η διαφορά δυναμικού είναι ίση με 1.5 V. Επίσης εάν κοιτάξουμε κάτω από τους φορτιστές των ηλεκτρικών μας συσκευών όπως τα κινητά κ.λ.π., αναγράφεται η τιμή σε Volts που εφαρμόζει ο φορτιστής σε δυο μεταλλικές απολήξεις της συσκευής. Η διαφορά δυναμικού στον ηλεκτρισμό ονομάζεται εν συντομία "**τάση**" και είναι ίσως από τις πιο σημαντικές ποσότητες στην

πράξη. Η σημασία της, όπως θα δούμε στο Κεφ. 7 έγκειται στο γεγονός ότι τα θετικά φορτία μετακινούνται αυθόρμητα από περιοχές υψηλού προς περιοχές χαμηλού δυναμικού και επομένως η ύπαρξη διαφοράς δυναμικού συμβάλλει στη μεταφορά φορτίου (το γνωστό "ρεύμα").

Ας μελετήσουμε πρώτα τη διαφορά δυναμικού στη μια διάσταση και μετά θα γενικεύσουμε σε όλο το χώρο. Για αυτό το σκοπό θεωρήστε δυο σημεία Α και Β επάνω στον άξονα x σε κάποιο χώρο όπου υπάρχουν ηλεκτρικά πεδία με συντεταγμένες x_A και x_B αντίστοιχα. Αναζητούμε τη διαφορά δυναμικού $\Delta V = V_B - V_A$ μεταξύ αυτών των δυο σημείων. Σύμφωνα με την Εξ. 4.9, η διαφορά αυτή ισούται με $V(x_B) - V(x_A)$. Σε αυτή την έκφραση ο κάθε όρος έχει την μορφή αόριστου ολοκληρώματος το οποίο καλούμαστε να το υπολογίσουμε σε δυο συγκεκριμένα σημεία και μετά παίρνουμε τη διαφορά. Αυτό όμως από τα Μαθηματικά είναι ακριβώς ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος και έτσι η ζητούμενη διαφορά δυναμικού είναι ίση με

$V_B - V_A = - \int_A^B E(x) dx$	Διαφορά Δυναμικού – Πεδίο	4.12
----------------------------------	---------------------------	------

όπου το ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται στις συντεταγμένες x_A και x_B . Θεωρήστε τώρα την περίπτωση όπου μεταφέρουμε ένα σημειακό δοκιμαστικό φορτίο q από το Α στο Β κατά μήκος του άξονα x . Τότε η δύναμη που ασκείται από το πεδίο στο φορτίο είναι ίση με $F = qE$ και επομένως

$$V_B - V_A = - \frac{1}{q} \int_A^B F(x) dx$$

Όμως από τη Μηχανική γνωρίζουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ίσο με το έργο της δύναμης F για τη μετακίνηση από το Α στο Β το οποίο μπορούμε να το συμβολίσουμε ως $W_{A \rightarrow B}$. Επομένως

$$V_B - V_A = - \frac{1}{q} W_{A \rightarrow B}$$

Η παραπάνω μετακίνηση του φορτίου επάνω στον άξονα x είναι κάπως περιορισμένη. Στην γενική περίπτωση όπου η μετακίνηση είναι σε τυχαία διαδρομή στο χώρο, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον πιο γενικό ορισμό του έργου στις τρεις διαστάσεις ο οποίος είναι ο εξής:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

όπου το $d\vec{l}$ είναι το διάνυσμα στοιχειώδους μήκους επάνω στη διαδρομή και η τελεία συμβολίζει εσωτερικό γινόμενο (δείτε το βιβλίο "Φυσική Ι" από τους ίδιους συγγραφείς). Έτσι

$$V_B - V_A = - \frac{1}{q} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

δηλαδή

$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$	Διαφορά Δυναμικού – 3Δ	4.13
---	------------------------	------

Με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού ΔV εάν είναι γνωστό το E στον χώρο. Όπως προαναφέρθηκε στην αρχή του εδαφίου, σε πολλές περιπτώσεις η ΔV είναι γνωστή (π.χ. μπαταρίες, ρευματολήπτες, φορτιστές ηλεκτρικών συσκευών κ.λ.π.) και μας

ενδιαφέρει το έργο (ή η ισχύς) που καταναλώνεται από κάποια συσκευή. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B)$	Ηλεκτρικό Έργο	4.14
--------------------------------------	----------------	------

Στο παραπάνω εδάφιο "Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Μη Ομοιογενές Ε", καταλήξαμε στο ασφαλές συμπέρασμα ότι κατά την αυθόρμητη κίνησή τους, τα φορτία μετακινούνται προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $\Delta U < 0$ (οπότε και από την Εξ. 4.2. παράγεται έργο από το πεδίο). Τι ισχύει όμως για την αντίστοιχη μεταβολή του δυναμικού ΔV ; Σύμφωνα με την Εξ. 4.8, αυτή η μεταβολή ισούται με

$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$	Μεταβολές Δυναμικού	4.15
---------------------------------	---------------------	------

Οπότε δεδομένου του $\Delta U < 0$ έχουμε και πάλι δυο περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του φορτίου:

α) Θετικό δοκιμαστικό φορτία $q > 0$. Προκύπτει $\Delta V > 0$ και άρα η αυθόρμητη κίνηση των θετικών φορτίων είναι προς περιοχές χαμηλότερου δυναμικού.

β) Αρνητικό δοκιμαστικό φορτία $q < 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει $\Delta V > 0$ οπότε η αυθόρμητη κίνηση των αρνητικών φορτίων είναι προς περιοχές υψηλότερου δυναμικού.

Παράδειγμα 4.6.

Έστω ότι ο πυκνωτής του Παραδείγματος 4.5 φέρει φορτίο $Q = 100 \text{ nC}$, το εμβαδό του κάθε οπλισμού ισούται με 18.83 cm^2 και ότι βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση 2 mm . Χρησιμοποιώντας την Εξ. 4.14, να βρεθεί το έργο που αποδίδει το πεδίο του πυκνωτή σε ένα θετικό σημειακό φορτίο $q = 2 \text{ nC}$ εάν αυτό μετακινείται από το $x = -0.5 \text{ mm}$ έως και το $x = 0.5 \text{ mm}$ από μια εξωτερική δύναμη.

Λύση:

Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι στον εσωτερικό χώρο του πυκνωτή το δυναμικό δίνεται από την έκφραση $V(x) = -Ex$ όπου

$$E = -\frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{-100 \times 10^{-9}}{18.83 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}} = -6.00 \times 10^6 \text{ N/C}$$

Στα δεδομένα σημεία έχουμε $x = \mp 0.5 \text{ mm} = \mp 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ και τα αντίστοιχα δυναμικά είναι ίσα με

$$V_A = -Ex_A = 6.00 \times 10^6 (-0.5 \times 10^{-3}) = -3000 \text{ V}$$

$$\text{και } V_B = -Ex_B = 6.00 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-3} = 3000 \text{ V}$$

Από την Εξ. 4.15

$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = 2 \times 10^{-9} (-3000 - 3000) = -12 \mu\text{J}$$

Το έργο είναι αρνητικό επειδή το q μετακινήθηκε αντίθετα από το πεδίο και άρα πρέπει να ξοδέψουμε έργο για τη μετακίνηση αυτή (η φυσική του πορεία είναι προς τα αριστερά οπότε και το πεδίο θα παράγαγε θετικό έργο).

Για σύγκριση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του έργου από τη Μηχανική

$$W = |F||\Delta x|\cos\theta$$

όπου η δύναμη του πεδίου είναι κατά μέτρο ίση με $|F| = q|E| = 2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 = 12 \times 10^{-3} \text{ N}$. Η δύναμη αυτή έχει φορά προς τα αριστερά (το πεδίο είναι προς τα αριστερά, δείτε το προηγούμενο παράδειγμα) ενώ η μετακίνηση $\Delta x = 0.5 - (-0.5) = 1 \text{ mm}$ προς τα δεξιά και άρα $\cos\theta = -1$ και το παραπάνω έργο γίνεται ίσο με

$$W = -12 \times 10^{-3} \times 10^{-3} = -12 \mu\text{J}$$

ακριβώς όπως το βρήκαμε παραπάνω.

Προβλήματα

Πρόβλημα 4.1.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο βρίσκεται 40 mm επάνω από ένα αρνητικά φορτισμένο φύλλο (διάταξη πυκνωτή) και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ τους ισούται με $5 \times 10^5 \text{ N/C}$. Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός φορτίου $+4 \mu\text{C}$ εάν αυτό τοποθετηθεί σε μια απόσταση α) 15 mm και β) 30 mm από το θετικό φύλλο. Πάρτε ως αναφορά του δυναμικού το αρνητικό φύλλο.

Πρόβλημα 4.2.

Στο προηγούμενο Πρόβλημα α) πόση δύναμη F_E ασκείται στο φορτίο όταν αυτό βρίσκεται στην αρχική του θέση; β) πόση δύναμη F πρέπει να του ασκηθεί για να το φέρουμε πολύ αργά από τη γείωση (αρνητικό φύλλο) στην αρχική του θέση; γ) Υπολογίστε το έργο στο προηγούμενο υποερώτημα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του έργου από την Μηχανική και δ) Υπολογίστε το έργο από την Εξ. 4.2.

Πρόβλημα 4.3.

Ένα θετικά φορτισμένο φύλλο με φορτίο $25 \mu\text{C}$ και διαστάσεις $20 \times 12 \text{ mm}^2$ βρίσκεται 50 mm επάνω από ένα άλλο όμοιο φύλλο με ίσο και αντίθετο φορτίο (διάταξη πυκνωτή). Βρείτε την δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου $+5 \mu\text{C}$ εάν είναι τοποθετημένο 15 mm από το αρνητικό φύλλο

Πρόβλημα 4.4.

Σε ποια απόσταση από ένα φορτίο $-7 \mu\text{C}$ ένα άλλο μικρότερο φορτίο -3 nC θα έχει δυναμική ενέργεια 60 mJ ; Ποια θα είναι η αρχική δύναμη που θα ασκηθεί στο φορτίο των -3 nC ;

Πρόβλημα 4.5.

Ένα φορτίο $+6 \mu\text{C}$ βρίσκεται 30 mm από ένα άλλο φορτίο $16 \mu\text{C}$. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος;

Πρόβλημα 4.6.

Οι οπλισμοί ενός πυκνωτή έχουν φορτίο $\pm 25 \mu\text{C}$ και διαστάσεις $20 \times 12 \text{ mm}^2$ και βρίσκονται σε απόσταση 50 mm μεταξύ τους. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P που απέχει απόσταση ίση με α) 15 mm και β) 20 mm από τον αρνητικό οπλισμό.

Πρόβλημα 4.7.

Στο προηγούμενο πρόβλημα, πόση είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου $+4 \mu\text{C}$ εάν τοποθετηθεί στις δυο θέσεις (α) και (β) παραπάνω;

Πρόβλημα 4.8.

Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο A που βρίσκεται 6 cm από ένα φορτίο $8.40 \mu\text{C}$; Ποια είναι η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου 2 nC που έχει τοποθετηθεί σε αυτό το σημείο;

Πρόβλημα 4.9.

Να βρεθεί το δυναμικό $V(z)$ παντού στο χώρο ενός θετικά φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Πάρτε τον άξονα z κάθετα στο φύλλο και θεωρήστε ότι το φύλλο έχει δυναμικό μηδέν.

Πρόβλημα 4.10.

Στο προηγούμενο πρόβλημα, ένα ιδεατό ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ πλευράς $a = \sqrt{3} \text{ m}$ "αιωρείται" από το φορτισμένο φύλλο έχοντας το επίπεδό του κάθετο στο επίπεδο του φύλλου, με την μια κορυφή του Ο να βρίσκεται στο επίπεδο του φύλλου στην αρχή των συντεταγμένων και τον άξονα z να τη διχοτομεί, ενώ οι δυο άλλες κορυφές Β και Γ να βρίσκονται κάτω από το φύλλο και συμμετρικά ως προς τον άξονα z . Ένα θετικό φορτίο $3 \mu\text{C}$ αναγκάζεται από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις να κινηθεί από το κέντρο συμμετρίας Κ του τριγώνου έως και το σημείο Β. Να βρεθεί η διαφορά της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μεταξύ των σημείων Κ και Β εάν η επιφανειακή πυκνότητα του φύλλου είναι ίση με 8.85 nC/m^2 .

Πρόβλημα 4.11.

Να βρεθεί α) το ηλεκτρικό πεδίο $E(x)$ στη μια διάσταση παντού στον άξονα x που παράγεται εξαιτίας δυο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ που βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm a$ αντίστοιχα β) το αντίστοιχο δυναμικό $V(x)$ χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του πρώτου υποερωτήματος.

Πρόβλημα 4.12. Να βρεθεί το δυναμικό σε τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της πλάκας του Προβλήματος 3.13 και από αυτό να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες.