ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός μη αγώγιμου σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας **α** και εξωτερικής ακτίνας **b**. Το κέλυφος χαρακτηρίζεται από μια θετική κατανομή φορτίου **ρ=A/r** όπου **A** είναι μια θετική σταθερά και **r** είναι η απόσταση από το κέντρο του κελύφους. Στο κέντρο του κελύφους υπάρχει επιπλέον, ένα σωματίδιο με θετικό φορτίο **q.**

α) Να υπολογιστεί το ολικό φορτίο του σφαιρικού φλοιού. **(1,5 μονάδα)**

Ποια είναι η έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές:

β) r<α **(0,5 μονάδες)**

γ) α<r<b **(2,0 μονάδες)**

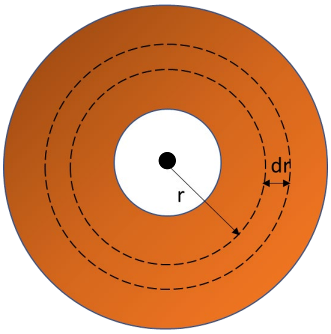
δ) Εάν *a* = 2.00 cm, *b* = 2.40 cm και *q* =45.0 fC να βρεθεί το A ώστε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κελύφους να είναι σταθερό**. (1 μονάδα)**

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α) Η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με την ακτίνα **r** εντός του φλοιού. Χωρίζουμε το φλοιό σε στοιχειώδεις ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς και ολοκληρώνουμε σε όλο τον όγκο προκειμένου να βρούμε το ολικό φορτίο.

Ο όγκος ενός στοιχειώδους φλοιού είναι $dV=4\pi r^2 dr$. Το φορτίο που περιέχει είναι $dq=\rho(r)\,dV=4\pi r^2\,(A/r)dr$.

Το ολικό φορτίο Q βρίσκεται ολοκληρώνοντας:



$$Q_{enc}=\int dq = \int \rho(\mathrm{r})\mathrm{dV}=\int_a^b 4\pi r^2\frac{A}{r}\mathrm{dr}$$
$$= 4\pi A\int_a^b r dr = 2\pi A(b^2-a^2)$$

β) Για r<α έχω:

$$\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{A}=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}\rightarrow E(4\pi r^2)=\frac{q}{\varepsilon_0}$$
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

γ) Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει πρώτα να υπολογίσω το περικλειόμενο φορτίο το οποίο ισούται με το άθροισμα του σημειακού φορτίου q και του φορτίου του φλοιού που περιέχεται μέχρι την περιοχή με ακτίνα r.

Άρα

$$Q_{enc} = q + \int dq \ = q + \int \rho(r')\mathrm{dV} = \ q + \int_a^r 4\pi r'^2 \frac{A}{r'}\mathrm{dr} = \ q + 4\pi A \int_a^r r' dr =$$
$$= Q + 2\pi A(r^2 - a^2)$$

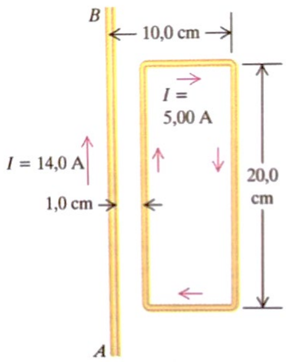
Το πεδίο ισούται με

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q + 2\pi A(r^2 - a^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r^2}\right)$$

δ) Προκειμένου το ηλεκτρικό πεδίο να είναι σταθερό θα πρέπει

$$\frac{q}{r^2} = \frac{2\pi A a^2}{r^2} \rightarrow A = \frac{q}{2\pi} a^2 = 1.79 \times 10^{-11}\ {C}/{m^2}$$

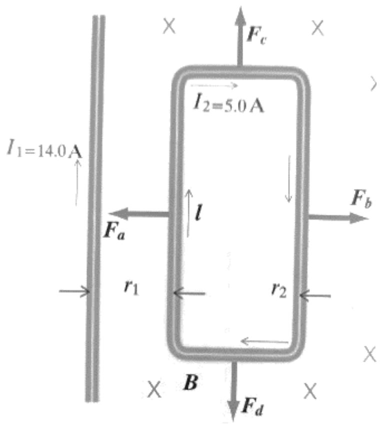
ΘΕΜΑ 2



Το άπειρο σύρμα ΑΒ του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα 14.0 A. O ορθογώνιος βρόχος του οποίου οι μεγάλες πλευρές είναι παράλληλες στο σύρμα διαρρέεται απο ρεύμα 5.0 A. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνιστάμενης δύναμης που ασκείται στο βρόχο από το μαγνητικό πεδίο του σύρματος.

(5 μονάδες)

<u>ΛΥΣΗ:</u>



Το πεδίο **B** που δημιουργείται από τον ευθύγραμμο αγωγό στην περιοχή του βρόχου είναι με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας (βλ. σχήμα). Η δύναμη που ασκεί το **B** στην αριστερή και δεξιά πλευρά του πλαισίου είναι:

$$\boldsymbol{F} = I_2\, \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

όπου I_2 είναι το ρεύμα που διαρρέει το βρόχο, η κατεύθυνση του οποίου φαίνεται στο σχήμα. Το πεδίο κατά μήκος αυτών των δυο πλευρών είναι σταθερό και έχει μέτρο:

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, r_1} \text{ και } B_b = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\, r_2}$$

Αντίστοιχα οι δυνάμεις έχουν μέτρο: $F_\alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\, r_1}$ και $F_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\, r_2}$, ενώ η συνισταμένη τους έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά με μέτρο:

$$F_\alpha - F_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\, r_1} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\, r_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

κατά μήκος των άλλων πλευρών το πεδίο μεταβάλλεται, οπότε σε ένα στοιχειώδες τμήμα dl του αγωγού η στοιχειώδης δύναμη dF είναι:

$$d\boldsymbol{F} = I_2\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

Παίρνοντας ζεύγη $d\boldsymbol{l}$**,** ένα στην επάνω και ένα στην κάτω πλευρά, σε ίσες αποστάσεις από το I_1, παρατηρούμε ότι ο ασκούμενες δυνάμεις είναι αντίθετες λόγω της αντίθετης φοράς του dl. Άρα οι ασκούμενες δυνάμεις στις πλευρές c,d αλληλοαναιρούνται.

Τελικά η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο:

$$F_{o\lambda} = \left(2 \times 10^{-7} T \cdot \frac{m}{A}\right)(14{,}0A)(5{,}0A)(0.20m)\left(\frac{1}{0.01m} - \frac{1}{0.1m}\right) = 2.52 \times 10^{-4}\, N$$