ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Η πυκνότητα φορτίου μιας μη ομογενούς αλλά σφαιρικά συμμετρικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{4r}{3R}\right) \qquad \gamma\iota\alpha\ r \le R$$

$$\rho(r) = 0 \qquad\qquad \gamma\iota\alpha\ r \ge R$$

όπου ρ_0 είναι μια θετική σταθερά.

α) Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κατανομή φορτίου. (2 μονάδες)

β) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή από $r \ge R$.

(0.25 μονάδες)

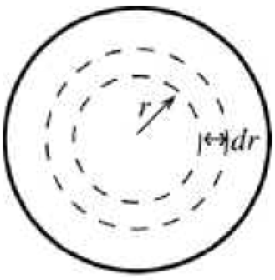
γ) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή $r \le R$. (2 μονάδες)

δ) Βρείτε την τιμή του r στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι μέγιστο και βρείτε την τιμή του μέγιστου αυτού πεδίου. (0.75 μονάδες)

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

a) Η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με την ακτίνα r εντός της σφαίρας. Χωρίζουμε τον όγκο της σφαίρας σε λεπτούς ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς και ολοκληρώνουμε σε όλο τον όγκο προκειμένου να βρούμε το ολικό φορτίο.



Ο όγκος ενός στοιχειώδους φλοιού είναι $dV=4\pi r^2 dr$. Το φορτίο που περιέχει είναι $dq=\rho(r)\, dV=4\pi r^2\rho_0(1-4r/3R)dr$.

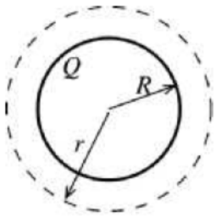
Το ολικό φορτίο Q βρίσκεται ολοκληρώνοντας:

$$Q = \int dq = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0\left(1 - \frac{4r}{3R}\right) dr$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{4r^3}{3R}\right) dr$$

$$Q = 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3} - \frac{4r^4}{12R}\right]_0^R = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{3R}\right) = 0$$

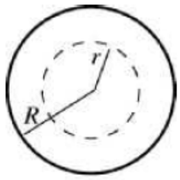
β) Εφαρμόζουμε ν.Gauss σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r>R.



$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \to E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

γ) Εφαρμόζουμε ν.Gauss σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r<R.



Το διαφορετικό εδώ είναι ο περιπλοκότερος υπολογισμός του περικλειόμενου φορτίου. Για τον υπολογισμό του, χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική με το υποερώτημα (α), όμως εδώ ολοκληρώνουμε από 0 έως r.

$$Q_{enc} = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 \left(1 - \frac{4r'}{3R}\right) dr' = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(r'^2 - \frac{4r'^3}{3R}\right) dr'$$

$$Q_{enc} = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^4}{3R}\right]_0^r = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{3R}\right) = 4\pi\rho_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{3R}\right)$$

Συνεπώς από το ν.Gauss λαμβάνω:

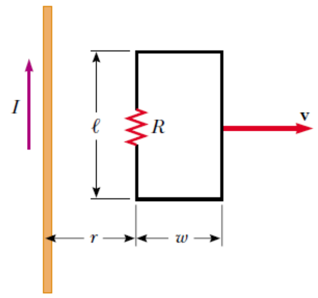
$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{3R}\right)$$

$$E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

δ) Το E μεγιστοποιείται όπου $\frac{dE}{dr} = 0 \to \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} - \frac{2\rho_0 r}{3\varepsilon_0 R} = 0 \to r_{max} = \frac{R}{2}$

Στην περιοχή αυτή το πεδιο ειναι $E = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0 2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$

ΘΕΜΑ 2



Ένας ορθογώνιος βρόχος διαστάσεων l και **w** κινείται με σταθερή ταχύτητα **v** κοντά σε ένα μακρύ σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως **I** και βρίσκεται στο επίπεδο του βρόχου. Η συνολική αντίσταση του βρόχου είναι **R**. Εξάγετε μια έκφραση που δίδει την ένταση του ρεύματος στο βρόχο αυτό τη στιγμή που η πλησιέστερη πλευρά του, απέχει απόσταση **r** από το σύρμα.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση x από το σύρμα είναι:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

και η ροή που διαπερνά το πλαίσιο βρίσκεται με ολοκλήρωση ενός στοιχειώδους εμβαδού dx παράλληλου με τις πλευρές μήκους l.

$$\Phi_B = \int B dA \rightarrow \Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\, l\, dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_r^{r+w} \frac{dx}{x}$$

Τελικά

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} [\ln x]_r^{r+w} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\ln \frac{r+w}{r}\right) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{r}\right)$$

και

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I l u}{2\pi r} \frac{w}{r+w} \text{ ,άρα}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I l u}{2\pi R r} \frac{w}{(r+w)}$$