Ερώτηση. Φυσική μετακίνηση (αυθόρμητη) των φορτίων προς την μεριά όπου $\Delta U \leq 0$

↓

Δυναμ. ενέργεια

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \qquad \Delta U \leq 0$$

√ Θετικό → Εάν $q > 0 \Rightarrow \frac{1}{q} > 0$

$$\frac{\Delta U}{q} \leq 0$$

$$\Delta V \leq 0$$

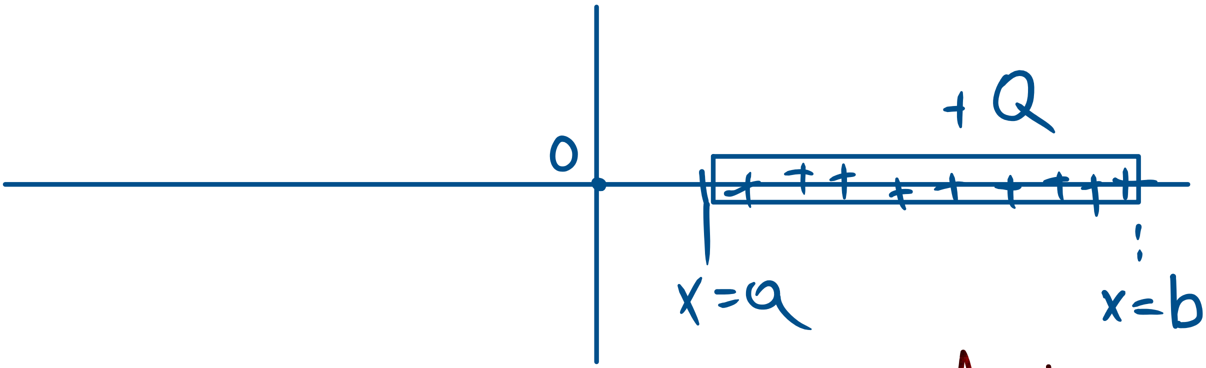
Θετικά q ⇒ οδηγούν χαμηλότερο V

√ Αρνητικό → Εάν $q < 0 \Rightarrow \frac{1}{q} < 0$

$$\frac{\Delta U}{q} \geq 0$$

Αρνητικά q οδηγούν προς υψηλότερο V

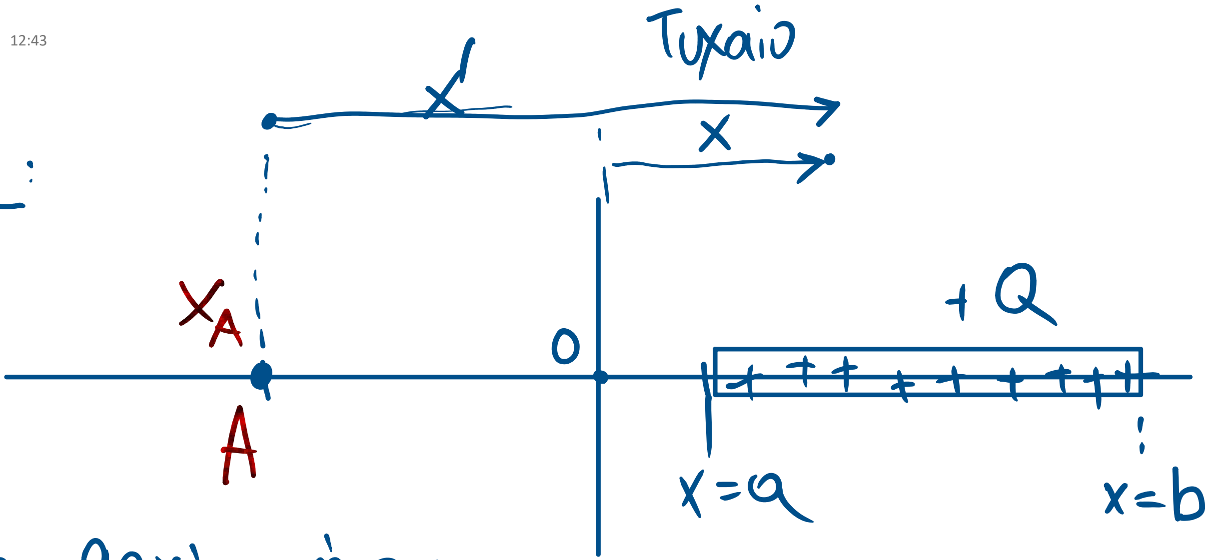
Πρόβλημα: Είχαμε βρεί $E_0 = k\frac{Q}{ab}$



α) βρείτε E παντού σε σημείο A ώστε $x_A < 0$

β) Τοποθετούμε $q \ll Q$ σε τυχαίο $x < 0$
βρείτε την δυναμική του ενέργεια θεωρώντας το μηδέν της στο $x \to -\infty$

Λύση:



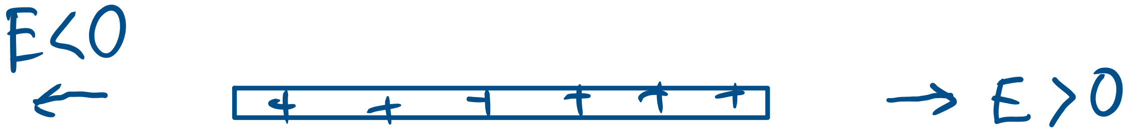
Εάν η αρχή ήταν το A στο νέο σύστημα αξόνων αριστερό άκρο της ράβδου $x' = -x_A + a$ ενώ το δεξιό άκρο στο $x' = -x_A + b$. Άρα ο τύπος γίνεται

$$E_A = k\frac{Q}{(a-x_A)(b-x_A)}$$

Επειδή το A είναι αυθαίρετο σημείο, γενικεύω για κάθε σημείο στον αρνητικό $x<0$

$$|E(x)| = k\frac{Q}{(a-x)(b-x)} \quad (\text{κατά μέτρο})$$

$E<0$


E<0
+ + + + + +
E>0

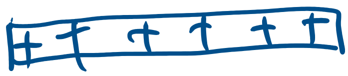
β) Ορισμός δυναμικής ενέργειας

Εναλλακτικά $V = -\int F dx + c$

Μας δίνεται $V(-\infty) = 0$

$$V(x) = -q\int E(x) dx + c = -q$$

$E \leftarrow$



$$V(x) = -q\int -|E(x)| dx + c$$

→ επειδή είναι στο $x<0$

$$V(x) = qkQ\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} + c$$

$$\frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{1}{(a-x)(b-x)}$$

Ψάχνουμε σταθερές A, B

$$\frac{Ab - Ax + Ba - Bx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(a-x)(b-x)}$$

$$\frac{Ab - Ax + Ba - Bx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{(a-x)(b-x)}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$Ab + Ba = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{b-a}}$$

$$V(x) = -kQq\left[\frac{1}{b-a}\ln(a-x) - \frac{1}{b-a}\ln(b-x)\right] + c$$

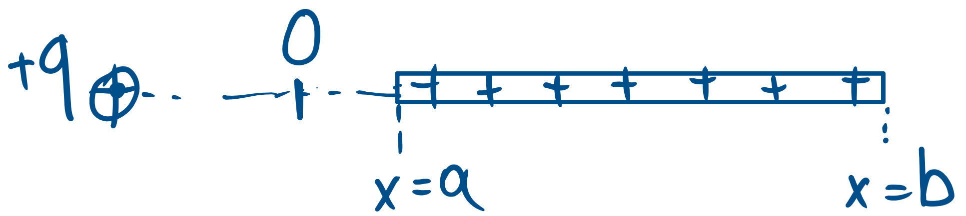
$$V(x) = -\frac{kQq}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x} + c$$

Στο $x \to -\infty$ $\quad \frac{a-x}{b-x} \to \frac{-x}{-x} = 1$

Αφού $\ln(1) = 0 \Rightarrow c = 0$

$V(-\infty) = 0$

Τελικά $\quad V(x) = kQq\ln\frac{b-x}{a-x} > 0$

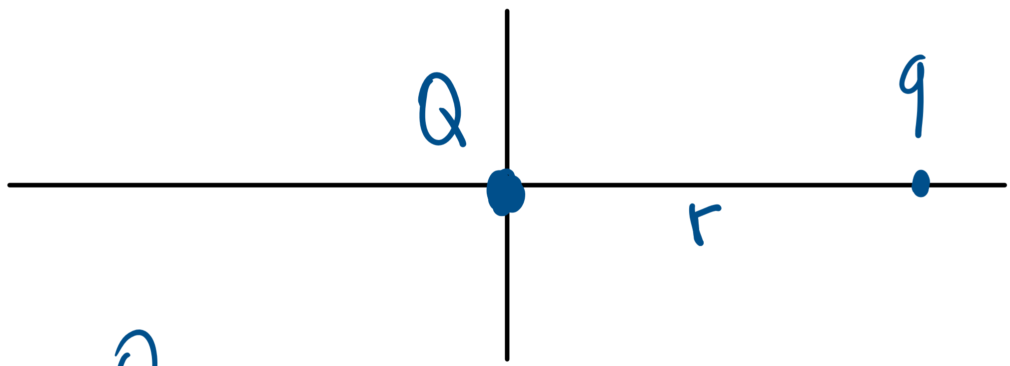


Πρόβλημα: (α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια δύο σημειακών φορτίων q, Q με $|q| \ll |Q|$ τοποθετημένα σε απόσταση r μεταξύ τους.

(β) Να σχολιαστεί η αυθόρμητη κίνηση των φορτίων για όλους τους συνδυασμούς προσήμων τους, και να σχολιαστεί ο τύπος στο α.

Θεωρήστε $V(\pm\infty) \to 0$

α) Τοποθετώ το Q στην αρχή των αξόνων και το q σε απόσταση r από αυτό, επάνω στον άξονα x.



Το Q δημιουργεί ηλ. πεδίο σε απόσταση r ίσο με $E = k\frac{Q}{r^2}$

Ορισμός δυναμ. ενέργειας

$$V(r) = -q\int E(r)\,dr + C = -kqQ\int \frac{dr}{r^2} + C$$

$$V(r) = k\frac{Qq}{r} + C$$

Για $r \to \infty$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Τελικά $\boxed{V(r) = k\frac{Qq}{r}}$

Δυναμ. ενέργεια δύο σημειακών

γενικά

$$\boxed{U(r) = k\frac{q_1 q_2}{r}}$$

δύο σημειακών φορτίων σε απόσταση r

β) Πιθανοί συνδυασμοί:

I. $Q>0, q>0$ αυθόρμητη κίνηση αύξηση r

αρχικά r: πεπερασμένο $\rightarrow$ $r \rightarrow \infty$

$U>0$ Τελικά 0 $\Delta U<0$

II. $Q>0, q<0$ αυθόρμητη μείωση r

$r \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ r: πεπερασμένο

$U=0$ Τελικά $U=k\frac{Qq}{r}<0$

$\Delta U<0$

III. $Q<0$ $q>0$ ομοίως

IV $Q<0$ $q<0$ αυθόρμητη αύξηση r

r: πεπερασμένο $\rightarrow$ $r \rightarrow \infty$

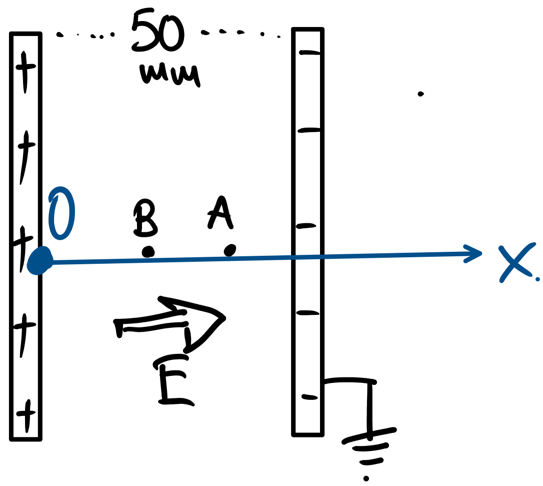
$U=k\frac{Qq}{r}>0$ $\rightarrow$ $U=0$

$\Delta U<0$

Πρόβλημα 4.6.

Οι οπλισμοί ενός πυκνωτή έχουν φορτίο $\pm 25\ \mu C$ και διαστάσεις $20 \times 12\ mm^2$ και βρίσκονται σε απόσταση $50\ mm$ μεταξύ τους. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο P που απέχει απόσταση ίση με α) $15\ mm$ και b) $20\ mm$ από τον αρνητικό οπλισμό. Θεωρήστε γειωμένο τον αρνητικό οπλισμό!

Θεωρώ αρχή επάνω στον θετικό οπλισμό



Λύση: Θεωρώ στο A ένα υποθετικό q

$$U_A = -q\int E\,dx =$$

E: σταθ $= \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$

Δυναμ. ενέργεια

$$= -qEx + c$$

$$V_A = \frac{U_A}{q} = -Ex + c'$$

Αρνητική πλάκα στο $x = d = 50\ mm$

$$0 = -Ed + c' \Rightarrow c' = Ed$$

A

Δυναμικό

$$V_A = E(d - x_A)$$

$$V_A = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d - x_A)$$