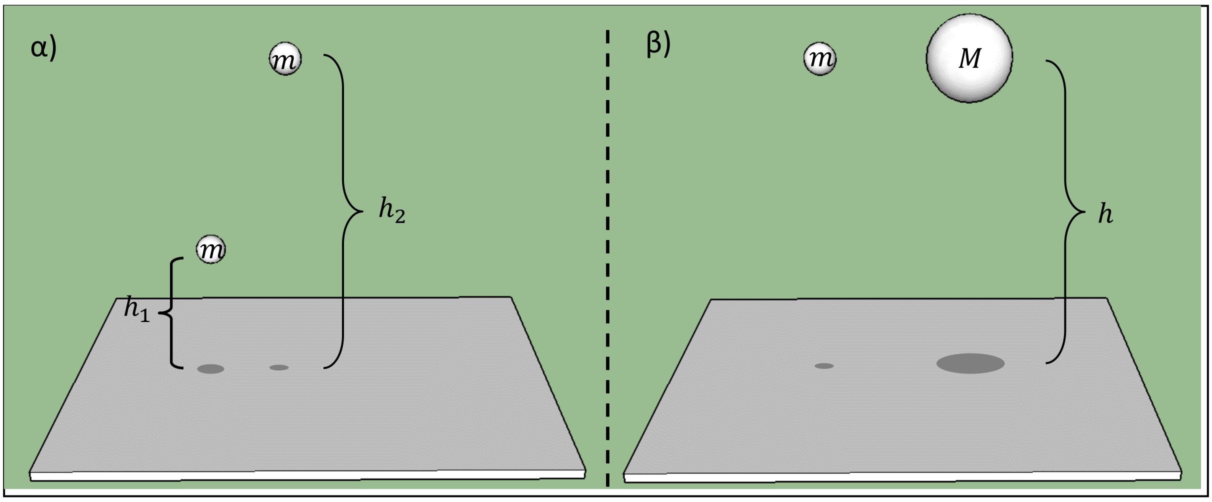
4. ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Θεωρήστε το παρακάτω Σχήμα 4.1 όπου εικονίζονται δυο διαφορετικές περιπτώσεις δυο μαζών μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης, σε κάποιο ύψος από την επιφάνεια της γης. Ποια από αυτές τις πέτρες μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά εάν αφεθεί ελεύθερη; Η απάντηση σύμφωνα με τη Φυσική Ι είναι ότι μεγαλύτερη ζημιά θα προκαλέσει η πέτρα με τη μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια. Από ποιους παράγοντες όμως εξαρτάται η βαρυτική δυναμική ενέργεια; Ας εξετάσουμε τις δυο διαφορετικές περιπτώσεις ξεχωριστά. Στο Σχήμα 4.1 (στα αριστερά) εικονίζονται δυο όμοιες μάζες m οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικό ύψη h_1 και $h_2 > h_1$. Προφανώς η πέτρα στο μεγαλύτερο ύψος h_2 θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται από το ύψος. Στην περίπτωση του Σχήματος 4.1β (στα δεξιά), εικονίζονται δυο μάζες στο ίδιο ύψος h αλλά με την μάζα M να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την άλλη μάζα m. Εάν αφήσουμε τις μάζες ελεύθερες, η M σίγουρα θα προκαλέσει μεγαλύτερη ζημιά και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από τη μάζα. Τέλος εάν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πτώσης στη γη και στη σελήνη, περιμένουμε στη γη να έχουμε μεγαλύτερη ζημιά από ότι στη σελήνη και άρα η βαρυτική δυναμική ενέργεια πρέπει να εξαρτάται και από το g (η σταθερά της βαρύτητας) αφού στην γη είναι μεγαλύτερο.

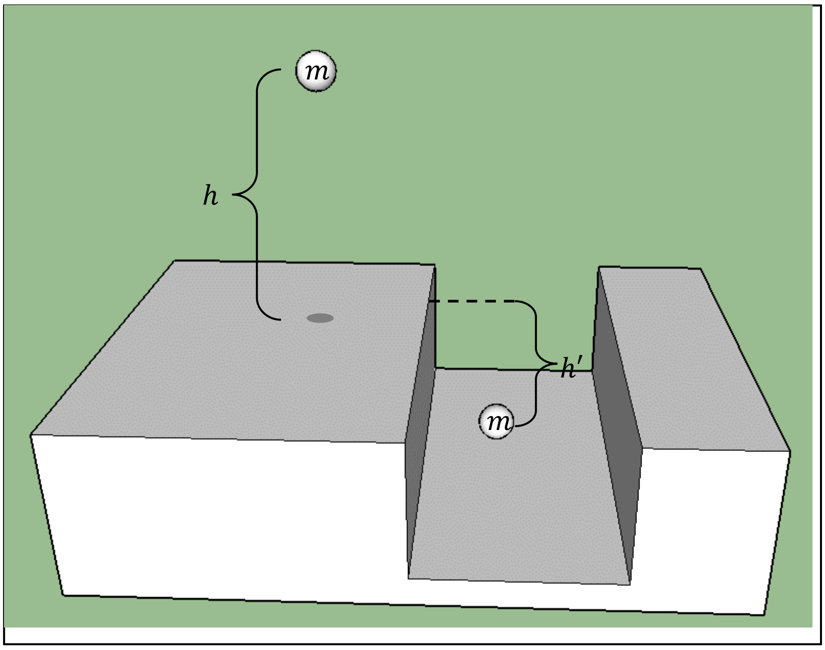


Σχήμα 4.1

Όντως τα αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος είναι σε συνέπεια με αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική αφού σύμφωνα με αυτή, η βαρυτική δυναμική ενέργεια U κοντά στην επιφάνεια της γης δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$U = mgh$	Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια	4.1

Οι μονάδες της δυναμικής ενέργειας είναι τα $Joules$ που συμβολίζονται με το γράμμα J. Προσέξτε ότι η δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι τόσο θετική, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, που σημαίνει ότι οι πέτρες μπορούν να προκαλέσουν έργο κατά την πτώση τους (υδροηλεκτρικά εργοστάσια με πτώση νερού) αλλά και αρνητική επειδή το ύψος μπορεί να είναι αρνητικό όπως για μια μάζα m μέσα στο αυλάκι του παρακάτω Σχήματος 4.2 με ύψος $h' < 0$. Στη δεύτερη περίπτωση η πέτρα όχι μόνο δεν μπορεί να παράξει έργο αλλά αντιθέτως απαιτείται έργο για να την επαναφορά της στην επιφάνεια της γης.



Σχήμα 4.2

Βέβαια ο αναγνώστης πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι το ύψος h είναι μια σχετική ποσότητα και το μηδέν του λαμβάνεται αυθόρμητα. Συνήθως παίρνουμε $h = 0$ στην επιφάνεια της γης αλλά και η γη δεν είναι τελείως επίπεδη. Έτσι π.χ. για ανθρώπους που ζουν σε κάποιο υψόμετρο όπως ένα χωριό στα 235 μέτρα από την επιφάνεια της γης, φαίνεται λογικό να θεωρούν ότι οι πέτρες στο έδαφός του χωριού έχουν ύψος $h = 0$ και άρα και δυναμική ενέργεια $U = 0$. Για κάποιον άλλον όμως παρατηρητή που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας, αυτές οι πέτρες φαίνονται να έχουν ύψος $h = 235\ m$ και άρα και δυναμική ενέργεια $U \neq 0$. Ποιος από τους δυο έχει δίκιο; Κανένας από τους δυο, δεν υπάρχει απόλυτη τιμή του h και κατ' αναλογία και απόλυτη τιμή του U. Ο κάθε παρατηρητής ορίζει το μηδέν του ύψους του με κάποιο πρακτικό τρόπο ώστε να είναι ευκολότερη η μέτρησή του. Για παράδειγμα για τον άνθρωπο του χωριού είναι λογικό να πάρει κατά σύμβαση ότι $h = 0$ στο έδαφος του χωριού του γιατί έτσι διευκολύνει την ζωή του. Ομοίως για τον άνθρωπο στην ακτή, είναι λογικό να επιλέξει το $h = 0$ στο επίπεδο της θάλασσας. Παρόλο που οι δυο παρατηρητές διαφωνούνε στις απόλυτες μετρήσεις τους, εντούτοις συμφωνούν απόλυτα στις διαφορές ύψους. Έτσι εάν ένας άνθρωπος στο χωριό ανυψώσει μια κοτρώνα από το έδαφος στα $1.5\ m$, τότε ο παρατηρητής στην ακτή θα καταγράψει μια μεταβολή από $h = 235$ έως τα $h = 236.5\ m$ δηλαδή διαφορά $\Delta h = 236.5 - 235 = 1.5\ m$, ακριβώς όση παρατηρεί και ο άνθρωπος του χωριού. Επομένως καταλήγουμε στο εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Οι διαφορές ύψους αλλά και οι διαφορές δυναμικής ενέργειας, είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων του κάθε παρατηρητή. Επομένως διαφορετικοί παρατηρητές καταγράφουν τις ίδιες διαφορές παρότι που μπορεί να διαφωνούν στις επιμέρους τιμές που καταγράφουν για ένα συγκεκριμένο σημείο.

Μηχανικό Έργο

Όπως προαναφέρθηκε, μια μάζα η οποία αφήνεται ελεύθερη από κάποιο θετικό ύψος, παράγει έργο κατά την πτώση αυτή. Το ύψος, άρα και η δυναμική ενέργεια, ελαττώνεται κατά την πτώση αυτή ενώ το παραγόμενο έργο είναι θετικό. Αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται το μείον στην σχέση έργου – δυναμικής ενέργειας που είδαμε στην μηχανική:

$W = -\Delta U$	Έργο παραγόμενο από το πεδίο	4.2

Η ποσότητα $\Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi}$ είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας για την συγκεκριμένη μετατόπιση (θυμηθείτε ότι πάντοτε οι μεταβολές στην Φυσική λαμβάνονται ως η τελική μείον την αρχική ιδιότητα). Δηλαδή το έργο στην παραπάνω σχέση, είναι το έργο που παράγει η <u>δύναμη του πεδίου</u>. Επίσης πρέπει να καταλάβουμε ότι ένα φυσικό σύστημα όπως μια μάζα στα προηγούμενα παραδείγματα, τείνει αυθόρμητα από καταστάσεις υψηλής προς καταστάσεις χαμηλής δυναμικής ενέργειας. Αντιστρόφως, εάν προσπαθήσουμε να βγάλουμε την μάζα από τον πυθμένα του πηγαδιού στο Σχήμα 4.2, τότε πρέπει να προσφέρουμε έργο και επομένως το έργο είναι αρνητικό, δηλαδή το έργο που παράγει η <u>δύναμη του πεδίου</u> ως *δύναμη* × *μετατόπιση* είναι αρνητικό αφού η βαρύτητα είναι αντίθετη στη μετατόπιση. Από την παραπάνω Εξίσωση 4.2, βλέπουμε ότι η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας σε αυτή τη μετακίνηση είναι θετική, δηλαδή η δυναμική ενέργεια της μάζας αυξάνεται.

Επομένως έχουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

Όταν ένα σύστημα αφεθεί ελεύθερο, τότε αυτό θα κινηθεί αυθόρμητα από περιοχές υψηλότερης προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας και κατά την μετακίνησή του αυτή, η δύναμη του πεδίου παράγει έργο. Αντιστρόφως, για να μετακινηθεί ένα σώμα από περιοχές χαμηλότερης προς περιοχές υψηλότερης δυναμικής ενέργειας, απαιτείται εξωτερικό έργο αφού το έργο του πεδίου είναι αρνητικό.

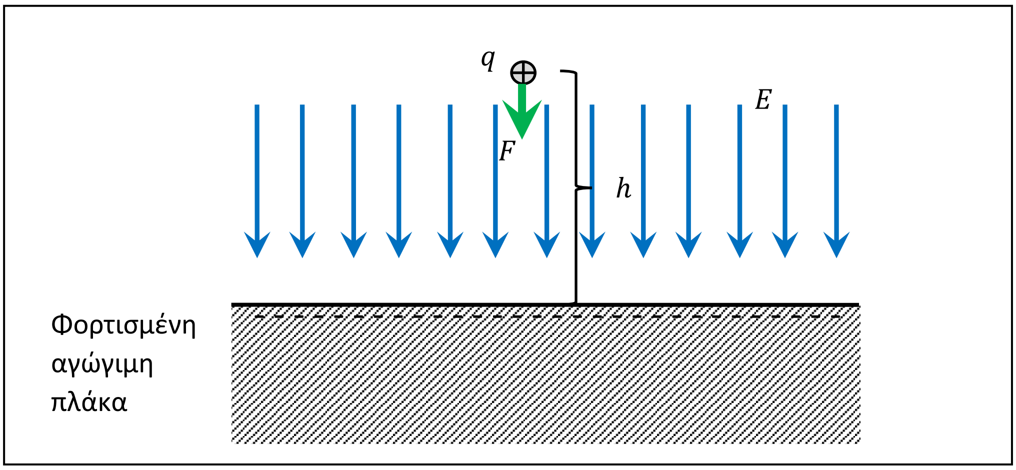
Παρατηρήστε ότι η έννοια της χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας δεν σημαίνει αναγκαστικά μηδενική ή και αρνητική τιμή, απλά μικρότερη αλγεβρική τιμή. Για παράδειγμα μια πέτρα με δυναμική ενέργεια $1000\,J$ κυλάει αργά επάνω σε μια πλαγιά στην προσπάθειά της να πέσει στο έδαφος. Στην πορεία όμως συναντά ένα θάμνο και παγιδεύεται σε τέτοιο ύψος ώστε η νέα της δυναμική ενέργεια να είναι $400\,J$. Η κίνησή της έγινε αυθόρμητα αφού μετέβη σε χαμηλότερη δυναμική ενέργεια. Ομοίως ένα αντικείμενο που είναι πεσμένο στο δρόμο έχει δυναμική ενέργεια μηδέν (κατά σύμβαση όπως το συζητήσαμε παραπάνω). Εάν κατά λάθος πέσει από ένα παραθύρι ενός υπογείου, θα βρεθεί κάτω από το έδαφος με αρνητική τελική δυναμική ενέργεια έστω $-200\,J$. Και πάλι η κίνηση έγινε αυθόρμητα επειδή αλγεβρικώς η τελική δυναμική του ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική. Και βέβαια το συγκεκριμένο αντικείμενο μπορεί να πέσει ακόμα χαμηλότερα, π.χ. από το τραπέζι ενός υπογείου στο πάτωμα του υπογείου και να μειώσει αλγεβρικώς την δυναμική του ενέργεια ακόμα περισσότερο, δηλαδή να την κάνει περισσότερο αρνητική. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, αυτό που μετράει είναι η διαφορά της δυναμικής ενέργειας ΔU που είναι αρνητική και έτσι η κίνηση γίνεται αυθόρμητα και επιπλέον η βαρύτητα παράγει έργο σύμφωνα με την Εξ. 4.2. Αντιθέτως, εάν κάποιος θέλει να ανυψώσει ένα αντικείμενο από το πάτωμα του υπόγειου γκαράζ του με δυναμική ενέργεια έστω $-400\ J$και να το φέρει κατά ένα μέτρο υψηλότερα, έστω στα $-150\ J$, αλγεβρικώς η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι θετική $\Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = -150 - (-400) = 250$ παρόλο που και οι δυο ενδιάμεσες τιμές της U είναι αρνητικές. Σε αυτή τη περίπτωση το έργο της βαρύτητας είναι αρνητικό αφού αυτή αντιτίθεται στη μετακίνηση.

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Ομοιογενές Ε

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να προσομοιώσουμε το βαρυτικό πεδίο με τη βοήθεια των ηλεκτρικών δυνάμεων. Το αντίστοιχο πεδίο βέβαια είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Εφόσον το g είναι αρκετά σταθερό κοντά στην επιφάνεια της γης, αρκεί να δημιουργήσουμε ένα ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε μια ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου όπως αυτή στην φορτισμένη πλάκα του Σχήματος 4.3, η οποία είναι αρνητική και έτσι το πεδίο E είναι προς τα κάτω, όπως και η βαρύτητα. Εάν φέρουμε στο χώρο επάνω από την πλάκα ένα θετικό σημειακό φορτίο q, τότε θα ασκηθεί επάνω του μια δύναμη F και θα κινηθεί προς τα κάτω τείνοντας προς την αρνητική πλάκα η οποία είναι το ανάλογο της επιφάνειας της γης στη βαρύτητα. Άρα αυτό το φορτίο μπορεί να παράξει έργο και άρα διαθέτει δυναμική ενέργεια η οποία σε αναλογία με την Εξ. 4.1 ισούται με:

$U = q\|E\|h$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια, Φορτίο σε ομοιογενές E	4.3

Προσέξτε ότι η μάζα m έχει αντικατασταθεί από το φορτίο q και το g από το $|E|$.



Σχήμα 4.3

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια – Μη Ομοιογενές Ε

Η Εξίσωση 4.3 μπορεί να αποδειχθεί και από αυτά που γνωρίζουμε από την Μηχανική. Η δυναμική ενέργεια στην μια διάσταση ορίζεται ως η συνάρτηση $U(x)$ που ικανοποιεί την σχέση

$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.4

ή αντιστρόφως

$U(x) = -\int F(x)dx$	Δυναμική Ενέργεια - Δύναμη	4.5

όπου η $F(x)$ είναι η δύναμη του πεδίου που ασκείται στο σώμα. Στον ηλεκτρισμό $F = qE$ και οπότε με ολοκλήρωση για σταθερό E παίρνουμε $U = -qEx$. Η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν εάν δεχθούμε κατά σύμβαση ότι στο $x = 0$ έχουμε και $U = 0$. Το πεδίο είναι προς τα κάτω οπότε είναι αρνητικό και έτσι $E = -|E|$ που οδηγεί στο $U = q|E|x$. Αυτή η εξίσωση είναι η ίδια με την Εξ. 4.3 με το ύψος h να γράφεται ως x.

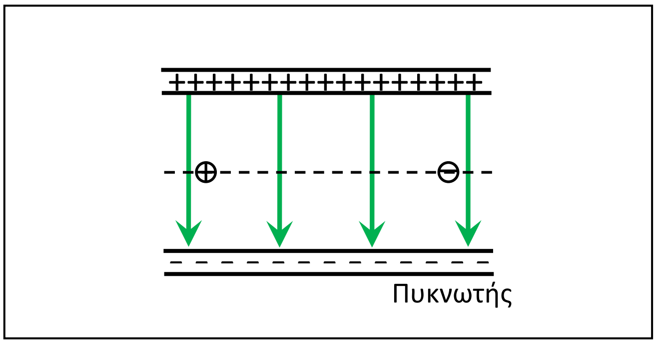
Στη γενική περίπτωση όπου το $E(x)$ δεν είναι σταθερό, τότε και ηλεκτρική δύναμη $F(x) = qE(x)$ που ασκείται σε ένα σημειακό δοκιμαστικό φορτίο q που βρίσκεται μέσα σε αυτό το πεδίο, δεν είναι σταθερή και πρέπει να καταφύγουμε στην Εξ. 4.5 για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του φορτίου αυτού η οποία θα δίνεται γενικά από την εξίσωση

$U(x) = -q\int E(x)dx$	Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια - Φορτίο μέσα σε Πεδίο	4.6

Βέβαια και στον ηλεκτρισμό όπως και στη βαρύτητα ισχύει η Εξ. 4.2 που συνδέει το έργο με τη διαφορά δυναμικής ενέργειας $W = -\Delta U$. Σε αντίθεση όμως με τη βαρύτητα, στον ηλεκτρισμό υπάρχουν δυο ειδών φορτία, τα θετικά και τα αρνητικά τα οποία έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς την κίνηση αλλά και πολλές ομοιότητες, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας πυκνωτής που φέρει φορτίο $Q = \pm 100\,nC$ στους οπλισμούς του οι οποίοι βρίσκονται μεταξύ τους σε απόσταση $2\,mm$ και με εμβαδό ίσο με $18.83\,cm^2$ ο καθένας. Δυο δοκιμαστικά σημειακά φορτία $q = \pm 2\,nC$ τοποθετούνται στο εσωτερικό του σε ίση απόσταση από τους δυο οπλισμούς και μακριά μεταξύ τους (ώστε η μεταξύ αλληλεπίδρασή τους να θεωρείται αμελητέα) και αφήνονται ελεύθερα. Αφού αφεθούν ελεύθερα και μετακινηθούν κατά $0.5\,mm$ από την αρχική τους θέση το καθένα, να βρεθεί (α) η μεταβολή της δυναμικής τους ενέργειας, (β) το έργο που αποδίδει το πεδίο χρησιμοποιώντας τον αυστηρό ορισμό του έργου, και (γ) να σχολιαστεί η φορά της μετακίνησης των φορτίων ως προς το πεδίο και ως προς την μεταβολή της δυναμικής τους ενέργειας. Πάρτε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή.



Λύση:

(α) Είδαμε ότι στο εσωτερικό του πυκνωτή υπάρχει ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από την απλή έκφραση Εξ. 3.7

$$E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι επειδή το συγκεκριμένο E είναι προς τα κάτω σύμφωνα με την φορά των δυναμικών γραμμών. Το σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του οπλισμού και ισούται με φορτίο ανά επιφάνεια $\sigma = Q/A$ επομένως

$$E = -\frac{Q}{A\varepsilon_0} = \frac{-100 \times 10^{-9}}{18.83 \times 10^{-4} \times 8.85 \times 10^{-12}} = -6.00 \times 10^6\ N/C$$

Η αρχική θέση των δυο φορτίων είναι στην μέση του πυκνωτή. Αφού το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βρίσκεται στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή, αναγκαστικά και το ύψος h της Εξ. 4.3 θα μετράει από εκεί. Έτσι στην αρχική τους θέση τα δυο φορτία έχουν $h = 1\ mm$ και επομένως η δυναμική τους ενέργεια είναι αντίστοιχα ίση με

$$U_+ = q|E|h = 2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-6}\ J$$

$$U_- = -q|E|h = -2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 10^{-3} = -12 \times 10^{-6}\ J$$

Το θετικό φορτίο κινείται αυθόρμητα προς τα κάτω (προς τον αρνητικό οπλισμό) οπότε η τελική του θέση είναι σε ύψος $h = 0.5\ mm$ και η τελική του δυναμική ενέργεια

$$U_+{}' = q|E|h = 2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 0.5 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-6}\ J$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U_+ = 6 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6} = -6 \times 10^{-6} J$$

Το αρνητικό φορτίο κινείται αυθόρμητα προς τα πάνω (προς τον θετικό οπλισμό) οπότε η τελική του θέση είναι σε ύψος $h = 1.5\ mm$ και η τελική του δυναμική ενέργεια

$$U_-' = -q|E|h = -2 \times 10^{-9} \times 6 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-3} = -18 \times 10^{-6}\ J$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U_- = -18 \times 10^{-6} - (-12) \times 10^{-6} = -6 \times 10^{-6} J$$

Βλέπουμε ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι η ίδια για τα δυο φορτία. Αυτό γίνεται επειδή κατά μέτρο τα δυο φορτία είναι ίσα και επειδή κατ' απόλυτη τιμή μετακινήθηκαν κατά την ίδια απόσταση. Το σημαντικό δεν είναι η επιμέρους τιμές των δυο ΔU αλλά το ότι οι μεταβολές αυτές έχουν το ίδιο πρόσημο.

(β) Ο αυστηρός ορισμός του έργου για κατακόρυφη μετακίνηση είναι ο

$$W = F\Delta y$$

Στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, η δύναμη είναι ίση με $F = qE$ και επομένως

$$W = qE\Delta y$$

Το θετικό φορτίο κινείται προς τα κάτω και έτσι $\Delta y_+ = -0.5\ mm$ ενώ αντιθέτως για το αρνητικό φορτίο $\Delta y_- = +0.5\ mm$. Επομένως τα αντίστοιχα έργα είναι ίσα με

$$W_+ = qE\Delta y_+ = 2 \times 10^{-9} \times (-6 \times 10^6) \times (-0.5 \times 10^{-3}) = 6 \times 10^{-6}\, J$$

$$W_- = -qE\Delta y_- = -2 \times 10^{-9} \times (-6 \times 10^6) \times 0.5 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-6}\, J$$

Δηλαδή και στις δυο περιπτώσεις το πεδίο παρήγαγε έργο.

(γ) Όπως είδαμε παραπάνω, το θετικό φορτίο ακολουθεί τη φορά του πεδίου ενώ το αρνητικό κινείται αντίθετα με αυτό. Παρόλα αυτά, βλέπουμε από το υποερώτημα α ότι και τα δυο φορτία μείωσαν την δυναμική τους ενέργεια.

Το ασφαλές συμπέρασμα που εξάγεται από το παραπάνω παράδειγμα είναι το εξής:

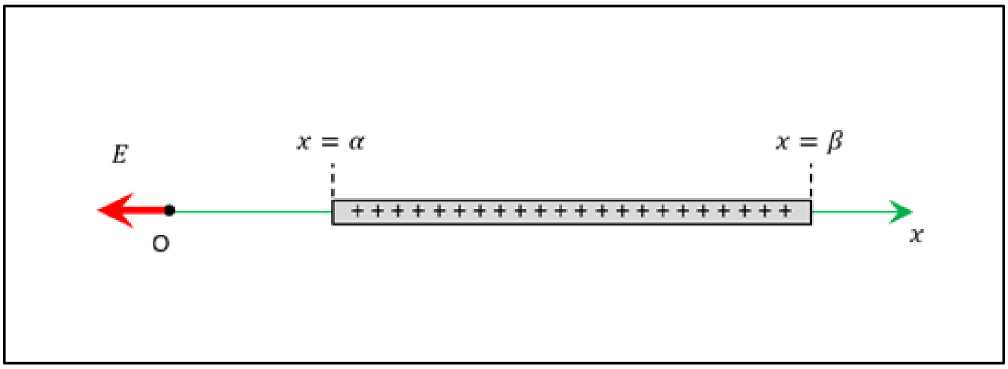
Ανεξάρτητα από το είδος του φορτίου, η αυθόρμητη κίνηση τους είναι από περιοχές υψηλότερης προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας, παρόλο που τα θετικά φορτία κινούνται αντίθετα από τα αρνητικά φορτία υπό την επίδραση του ίδιου πεδίου.

<u>Παράδειγμα 4.2</u>.

Στο Κεφ. 2 στο Πρόβλημα 2.1, μια φορτισμένη γραμμή πεπερασμένου μήκους με ομοιόμορφο φορτίο Q εκτείνεται στον άξονα x από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ και ζητείται το ηλεκτρικό πεδίο στην αρχή των αξόνων. Στον Πίνακα 2.2. δίνεται η λύση αυτού του προβλήματος ως:

$$E_O = \frac{kQ}{\alpha\beta}$$

Να βρεθούν (α) το πεδίο $E(x)$ σε σημείο Ρ με τυχαία συντεταγμένη $x < \alpha$ και (β) η δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού δοκιμαστικού φορτίου q όταν αυτό τοποθετηθεί στο παραπάνω σημείο Ρ. Πάρτε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων



Λύση:

α) Εάν παίρναμε το σημείο P ως νέα αρχή των αξόνων το οποίο απέχει από την προηγούμενη αρχή O απόσταση x , τότε τα όρια της ράβδου θα άλλαζαν από α και β σε $\alpha - x$ και $\beta - x$ αντίστοιχα και άρα από το δεδομένο αποτέλεσμα το πεδίο στο P θα ήταν ίσο με

$$E_P = \frac{kQ}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

Αφού το σημείο P έχει συντεταγμένη x σύμφωνα με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, τότε το παραπάνω πεδίο E_P στο P είναι στην ουσία ίσο με το $E(x)$. Επομένως

$$E(x) = \frac{kQ}{(\alpha - x)(\beta - x)}$$

β) Σύμφωνα με την Εξ. 4.6, η δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου όταν βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $E(x)$ δίνεται από την

$$U(x) = -q\int E(x)dx$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκαμε στο υποερώτημα α παραπάνω, μπορεί να γραφεί σε ελαφρά διαφορετική μορφή

$$E(x) = \frac{kQ}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x}\right)$$

η οποία είναι πιο εύκολο να ολοκληρωθεί. Έτσι

$$U(x) = -q\frac{kQ}{\beta - \alpha}\int\left(\frac{1}{\alpha - x} - \frac{1}{\beta - x}\right)dx$$

ή

$$U(x) = k\frac{Qq}{\beta - \alpha}[ln(\alpha - x) - ln(\beta - x)] + c$$

Η σταθερά c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτή η σταθερά εκφράζει το γεγονός ότι η δυναμική ενέργεια είναι σχετική και όχι απόλυτη ποσότητα και μόνο οι διαφορές της έχουν νόημα. Επομένως η προσθαφαίρεση μιας σταθεράς δεν αλλάζει την Φυσική του προβλήματος. Συνήθως η σταθερά επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας σε κάποιο βολικό σημείο αναφοράς. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μας ζητείται να επιλέξουμε την αρχή O όπου $x = 0$. Έτσι

$$U(0) = 0 => k\frac{Qq}{\beta - \alpha}[ln(\alpha) - ln(\beta)] + c = 0$$

δηλαδή

$$c = -\,k\frac{Qq}{\beta - \alpha}[ln(\alpha) - ln(\beta)]$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στην $U(x)$ παραπάνω έχουμε

$$U(x) = k\frac{Qq}{\beta - \alpha}\left[ln\left(\frac{\alpha - x}{\alpha}\right) - ln\left(\frac{\beta - x}{\beta}\right)\right]$$

Παράδειγμα 4.3.

Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια ενός υποθετικού θετικού δοκιμαστικού φορτίου q όταν αυτό τοποθετηθεί στο πεδίο ενός άλλου θετικού σημειακού φορτίου $Q \gg q$. Υποθέστε ότι και τα δυο φορτία βρίσκονται επάνω στον άξονα x και εργαστείτε στη μια διάσταση.

Λύση:

Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το θετικό σημειακό φορτίο Q σε απόσταση r από αυτό σύμφωνα με την Εξ. 2.2 ισούται με:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Η απόσταση r από το φορτίο παίζει τον ρόλο του x στην Εξ. 4.6 επομένως

$$U(r) = -q\int E(r)dr = -q\int k\frac{Q}{r^2}dr = k\frac{Qq}{r} + c$$

όπου c είναι όπως και προηγουμένως η σταθερά ολοκλήρωσης. Επειδή το $1/r$ τείνει στο μηδέν όταν $r \to \infty$, ένα βολικό σημείο αναφοράς είναι το άπειρο. Έτσι το επιλέγουμε ως το μηδέν της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $U(\infty) \to 0$. Αυτό οδηγεί στο $c = 0$ που απλουστεύει πάρα πολύ την παραπάνω έκφραση $U(r)$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, αποδείχθηκε το εξής πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

$U = k\frac{Qq}{r}$	Δυναμική Ενέργεια δυο Σημειακών Φορτίων	4.7

Παρόλο που στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν μόνο θετικά φορτία, η παραπάνω σχέση έχει γενική ισχύ εάν χρησιμοποιήσουμε και αρνητικά φορτία. Για παράδειγμα, έστω ότι ένα από τα δυο φορτία είναι αρνητικό. Τότε η παραπάνω εξίσωση προβλέπει αρνητική δυναμική ενέργεια. Εάν αφήσουμε ελεύθερα αυτά τα δυο φορτία, τότε αυτά θα πλησιάσουν αυθόρμητα μεταξύ τους λόγω αμοιβαίας έλξης και έτσι το r θα μειωθεί, το $1/r$ θα αυξηθεί αλλά το U ως αρνητικό θα μειωθεί (θα γίνει περισσότερο αρνητικό). Επομένως η Εξ. 4.7 οδηγεί στην ορθή πρόβλεψη ότι το σύστημα των δυο φορτίων θα κινηθούν αυθόρμητα προς περιοχές χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας. Αντιθέτως όταν τα δυο φορτία είναι ομόσημα (π.χ. και τα δυο αρνητικά), τότε η Εξ. 4.7 προβλέπει θετική δυναμική ενέργεια η οποία μειώνεται όταν τα δυο φορτία απομακρύνονται μεταξύ τους, η οποία είναι και πάλι σε συμφωνία με την αυθόρμητη κίνηση των φορτίων λόγω αμοιβαίας άπωσης. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι (α) αρνητική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει έλξη ενώ (β) θετική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο φορτίων σημαίνει άπωση.

Παράδειγμα 4.4.

Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος τριών σημειακών φορτίων $q_1 = 4\,\mu C$, $q_2 = -2\,\mu C$ και $q_3 = -1\mu C$ που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά $2\,cm$. Να ερμηνευτεί το πρόσημο της απάντησής σας.

Λύση:

Πρέπει να εφαρμόσουμε την Εξ. 4.7 για κάθε ζεύγος φορτίων. Λόγω επαλληλίας, η συνολική δυναμική ενέργεια ισούται με:

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} = 9 \times 10^9 \left(\frac{4 \times (-2)}{2} + \frac{4 \times (-1)}{2} + \frac{(-2) \times (-1)}{2}\right) \times \frac{10^{-12}}{10^{-2}}$$

ή

$$U = -4.5\,Joules$$

Όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, το αρνητικό πρόσημο σημαίνει γενικά έλξη οπότε το σύστημα εάν αφεθεί ελεύθερο, θα μειώσει την δυναμική του ενέργεια συμπυκνώνοντας τα τρία φορτία μαζί. Αυτό γίνεται επειδή έχουμε ένα μεγάλο θετικό φορτίο (το q_1) το οποίο έλκει τα δυο μικρότερα αρνητικά και παρόλο που τα δυο τελευταία απωθούνται μεταξύ τους, η έλξη προς το θετικό φορτίο τελικά υπερνικά. Αντιθέτως εάν και τα τρία φορτία ήταν θετικά (ή αρνητικά) τότε θα παίρναμε $U > 0$ και τα τρία φορτία θα απομακρύνονταν αυθόρμητα μεταξύ τους έως το άπειρο.