



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική II

Ενότητα 5: Ηλεκτρικό δυναμικό στις 3 διαστάσεις

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Ορισμός και ερμηνεία του ηλεκτρικού δυναμικού στις 3 διαστάσεις μέσω:
 - καρτεσιανών,
 - πολικών,
 - κυλινδρικών και
 - σφαιρικών συντεταγμένων
- Συσχέτιση ηλεκτρικού δυναμικού με το ηλεκτρικό πεδίο στα παραπάνω συστήματα συντεταγμένων
- Υπολογισμός δυναμικού για γνωστή κατανομή φορτίου
- Ορισμός και εφαρμογές ισοδυναμικών γραμμών



Περιεχόμενα ενότητας

- Ηλεκτρικό δυναμικό
- Δυναμικό σε καρτεσιανές συντεταγμένες
 - Παράδειγμα
- Δυναμικό σε πολικές συντεταγμένες
- Δυναμικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες
 - Παράδειγμα
- Δυναμικό σε σφαιρικές συντεταγμένες
 - Παράδειγμα
- Υπολογισμός δυναμικού για γνωστή κατανομή πεδίου
 - Παράδειγμα
- Ισοδυναμικές επιφάνειες
 - Παράδειγμα

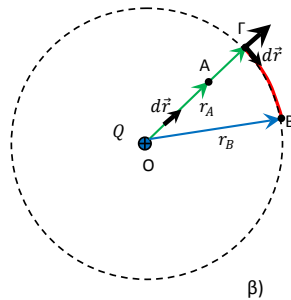
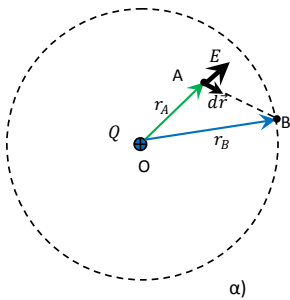


Ηλεκτρικό δυναμικό στις 3 διαστάσεις

Σημειακό φορτίο

Ηλεκτρικό δυναμικό

- Σημειακό φορτίο – τρισδιάστατο ηλεκτρικό δυναμικό
- Χωρική συνάρτηση: $V(x, y, z)$
- r_A, r_B ανήκουν στο ίδιο επίπεδο
- Ηλεκτρική ενέργεια: συντηρητική δύναμη
 - Διαφορά δυναμικού: ανεξάρτητη διαδρομής



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = k \frac{Q}{r^2} dr (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r) = k \frac{Q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = - \int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_\Gamma^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A^\Gamma k \frac{Q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = k \frac{Q}{r_B} - k \frac{Q}{r_A}$$

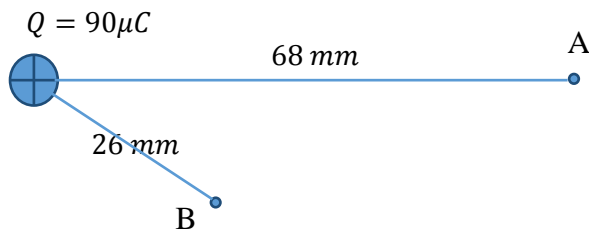
- Με σημείο αναφοράς το άπειρο: $r_A \rightarrow \infty, V_A \rightarrow 0$

$$V = k \frac{Q}{r}$$



Παράδειγμα 1

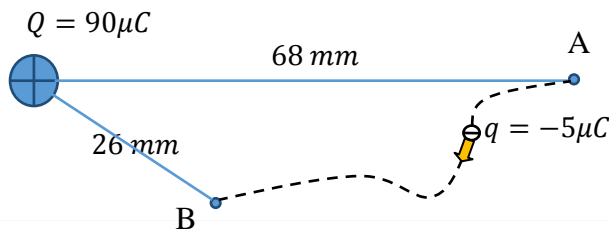
Τα σημεία A και B βρίσκονται αντίστοιχα 68 mm και 26 mm μακριά από ένα σημειακό φορτίο +90 μC. α) Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B. β) Πόσο έργο παράγεται από το πεδίο όταν ένα δεύτερο φορτίο -5 μC μετακινιέται από το σημείο A στο B (θεωρούμε ότι το πρώτο φορτίο +90 μC παραμένει σταθερό στην αρχική του θέση κατά την διάρκεια της μετακίνησης του δεύτερου φορτίου).



$$V_A = k \frac{Q}{r_A} = 9 \times 10^9 \frac{90 \times 10^{-6}}{68 \times 10^{-3}} = 11.9 \times 10^6 \text{ Volts}$$

$$V_B = k \frac{Q}{r_B} = 9 \times 10^9 \frac{90 \times 10^{-6}}{26 \times 10^{-3}} = 31.1 \times 10^6 \text{ Volts}$$

$$\Delta V = V_A - V_B = (11.9 - 31.1) \times 10^6 = -19.2 \times 10^6 \text{ Volts}$$



$$W_{A \rightarrow B} = q(V_A - V_B) = -5 \times 10^{-6}(-19.2 \times 10^6) = 96 \text{ Joules}$$



Δυναμικό σε καρτεσιανές συντεταγμένες

- Συνάρτηση τριών μεταβλητών (συντεταγμένες)

$$- V(x, y, z)$$

- Μέτρο διανύσματος θέσης: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- Εξ' ορισμού: $V = k \frac{Q}{r} = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

- Ηλεκτρικό πεδίο:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

- Όπου: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



Παράδειγμα 2

Υπολογίστε τις συνιστώσες του διανύσματος \vec{E} που αντιστοιχούν στο δυναμικό που παράγει ένα σημειακό φορτίο Q .

$$V = k \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = kQ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = kQ \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = kQ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = (kQ)^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{(kQ)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$E = k \frac{Q}{x^2 + y^2 + z^2} = k \frac{Q}{r^2}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{kQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$



Δυναμικό σε πολικές συντεταγμένες

- Φορτισμένος σωλήνας, κύλινδρος ή γραμμή πεδίου
- Μήκος διανύσματος θέσης: ρ
- Γωνία διανύσματος θέσης: φ
- Μοναδιαία διανύσματα: e_ρ, e_φ
- Σχέση πολικών – καρτεσιανών

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

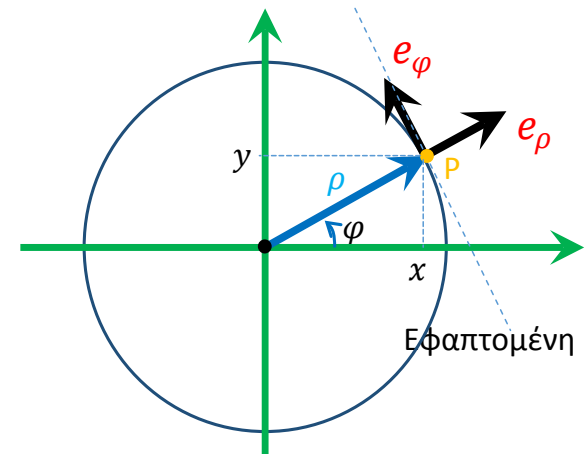
- Σχέση καρτεσιανών – πολικών

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y/x)$$

- Ηλεκτρικό πεδίο:

$$\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho + E_\varphi \vec{e}_\varphi$$



Πεδίο – δυναμικό

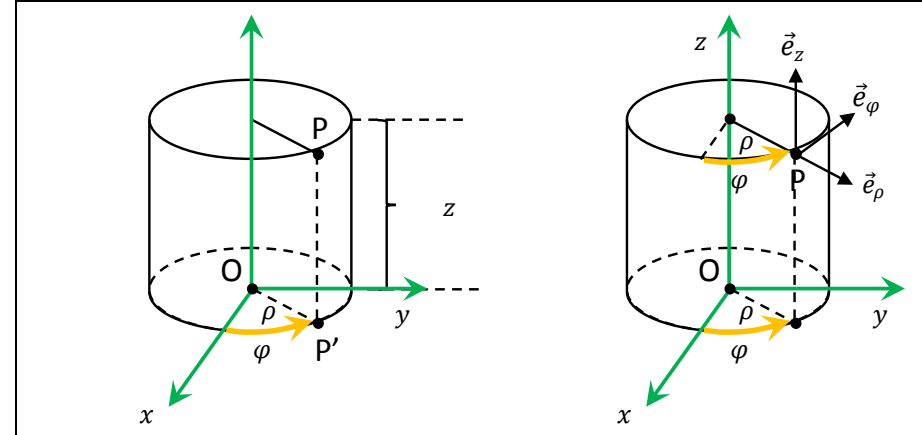
$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$



Δυναμικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Όπως πολικές συν ύψος, z
 - Απόσταση από επίπεδο $x - y$
- Μοναδιαίο διάνυσμα: e_z
- Σχέση κυλινδρικών – καρτεσιανών:



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Πεδίο – δυναμικό

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- Ηλεκτρικό πεδίο:

$$\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho + E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z$$



Παραδείγματα

3. Το δυναμικό σε ένα σημείο του χώρου δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την έκφραση $V(\rho, \phi, z) = a \cos \phi / \rho$ όπου a είναι μια σταθερά σε μονάδες Volt·m . Να βρεθεί το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο.

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{a \cos \phi}{\rho^2}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{a \sin \phi}{\rho^2}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

4. Να υπολογισθεί το δυναμικό στο χώρο που παράγει μια γραμμή απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ .

$$E = \frac{2k\lambda}{\rho} \rightarrow E_\rho = \frac{2k\lambda}{\rho}, E_\phi = 0, E_z = 0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{2k\lambda}{\rho} \rightarrow V = -2k\lambda \ln(\rho) + c$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial c(\phi, z)}{\partial \phi} = 0$$

$$-\frac{dV}{dz} = 0 \rightarrow \frac{\partial c(\phi, z)}{\partial z} = 0$$

$$V = 0 \text{ για } \rho = \rho_0 \rightarrow c = 2k\lambda \ln(\rho_0)$$

$$V(\rho) = -2k\lambda \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$



Δυναμικό σε σφαιρικές συντεταγμένες

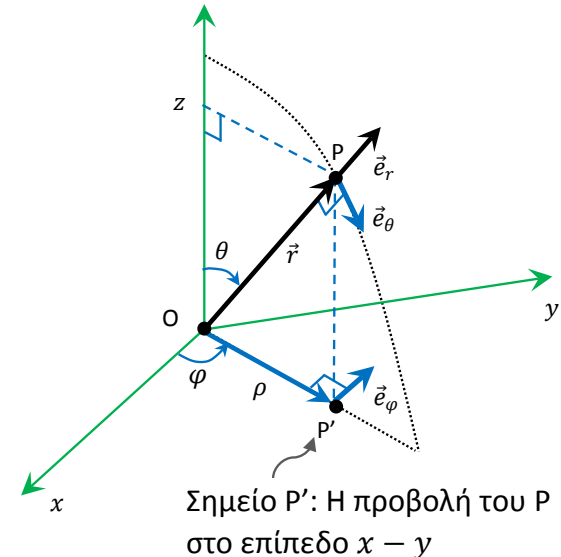
- Σημειακό φορτίο, συμπαγής σφαίρα, σφαιρικό κέλυφος
- Σφαιρικές συντεταγμένες: r , θ , ϕ
- Ορισμός – σχέση με καρτεσιανές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$$
$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$
$$z = r \cos \theta$$

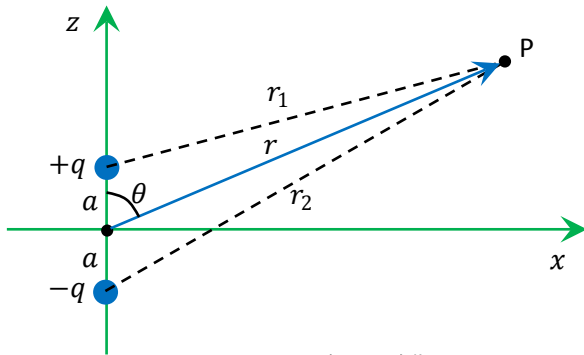
- Ηλεκτρικό πεδίο – δυναμικό

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$



Παράδειγμα 5

α) Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο χώρο που παράγει ένα ηλεκτρικό δίπολο, δηλαδή ένα ζεύγος ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων $\pm q$ σε απόσταση $2a$ μεταξύ τους. Πάρτε τα φορτία συμμετρικά επάνω στον άξονα z και χρησιμοποιήστε τις σφαιρικές συντεταγμένες r και θ . β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλες αποστάσεις $r \gg a$.



$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$\sqrt{r^2+a^2 \mp 2racos(\theta)} = r \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \mp \frac{2acos(\theta)}{r} \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{r} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \mp \frac{2acos(\theta)}{r} \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} \mp \frac{2acos(\theta)}{r} \right) \right]$$

$$V \approx \frac{kq}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2acos(\theta)}{r} \right) \right] - \frac{kq}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{2acos(\theta)}{r} \right) \right]$$

$$V = \frac{kq}{r_1} - \frac{kq}{r_2}$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2racos(\theta)$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2racos(\theta)$$

$$V(r, \theta) = \frac{kq}{\sqrt{r^2+a^2-2racos(\theta)}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2+a^2+2racos(\theta)}}$$

$$V \approx \frac{kq}{r} \frac{2acos(\theta)}{r} = \frac{kq2acos(\theta)}{r^2}$$

$$V(r, \theta) \approx k \frac{qd}{r^2} \cos(\theta)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2k \frac{qd}{r^3} \cos(\theta)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = k \frac{qd}{r^3} \sin(\theta)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$



Υπολογισμός δυναμικού για γνωστή κατανομή πεδίου

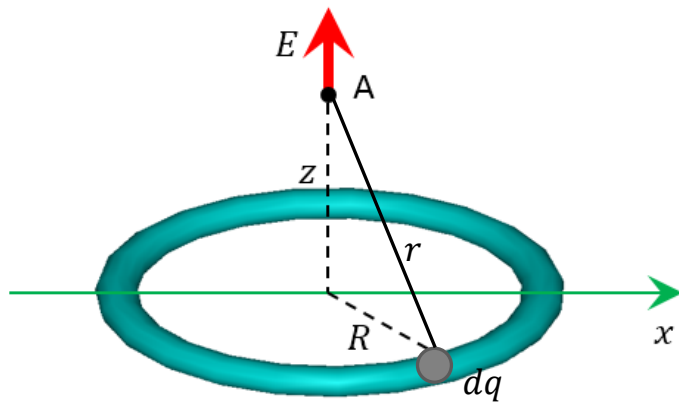
- Τεμαχισμός σε μικρά φορτία: dq
 - Θεώρηση σημειακού φορτίου
- Υπολογισμός dV σε δεδομένο σημείο
- Χρήση της σχέσης : $V = k \frac{Q}{r}$
- Ολοκλήρωση του dV για όλη την κατανομή φορτίου, Q

$$\int dq = Q$$



Παράδειγμα 6

Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό δυναμικό λεπτού δακτυλίου ακτίνας R και αμελητέου πάχους, που φέρει φορτίο Q , σε σημείο A στη μεσοκάθετο σε ύψος z από το κέντρο του δακτυλίου.



$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$dV = k \frac{dq}{r} \rightarrow V = k \int_{\Delta} \frac{dq}{r}$$

$$V = \frac{k}{r} \int_{\Delta} dq = \frac{k}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_{\Delta} dq$$

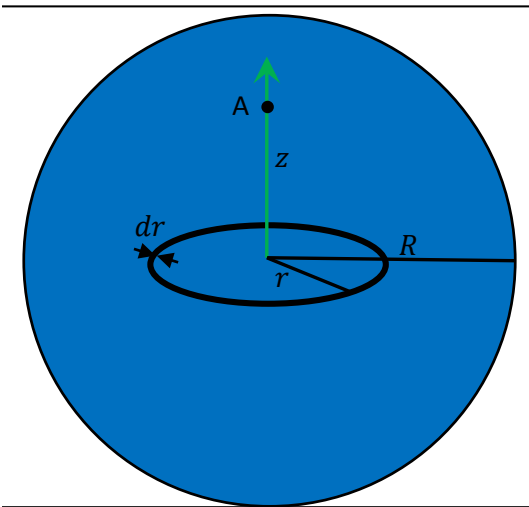
$$V = \frac{k}{r} \int_{\Delta} dq = \frac{kQ}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{kQ}{(z^2 + R^2)^{3/2}} z$$



Παράδειγμα 7

Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό δυναμικό λεπτού δίσκου ακτίνας R και αμελητέου πάχους, που φέρει φορτίο Q , σε σημείο A στη μεσοκάθετο σε ύψος z από το κέντρο του δίσκου.



$$dV = k \frac{dq}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$V = \int_{\Delta} dV = k \int_{\Delta} \frac{dq}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{kQ}{R^2} \int_{r=0}^R \frac{2r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V = \frac{kQ}{R^2} \int_{r=0}^R (z^2 + \omega)^{-1/2} d\omega = \frac{2kQ}{R^2} [(z^2 + \omega)^{1/2}]_{r=0}^R = \frac{2kQ}{R^2} [(z^2 + r^2)^{1/2}]_{r=0}^R$$

$$V = \frac{2kQ}{R^2} (\sqrt{z^2 + R^2} - z)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2kQ}{R^2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right)$$



Ισοδυναμικές επιφάνειες

- Ιδεατές επιφάνειες με σταθερό V

- $V(x, y, z) = \text{σταθ.}$

- Από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Όπου: $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E dr \cos\theta$

- Κάθετα στις Δυναμικές γραμμές, $\cos\theta=0$

$$\rightarrow V_B - V_A = 0$$

- Οι Ισοδυναμικές επιφάνειες τέμνουν κάθετα τις Δυναμικές γραμμές



Παράδειγμα 8

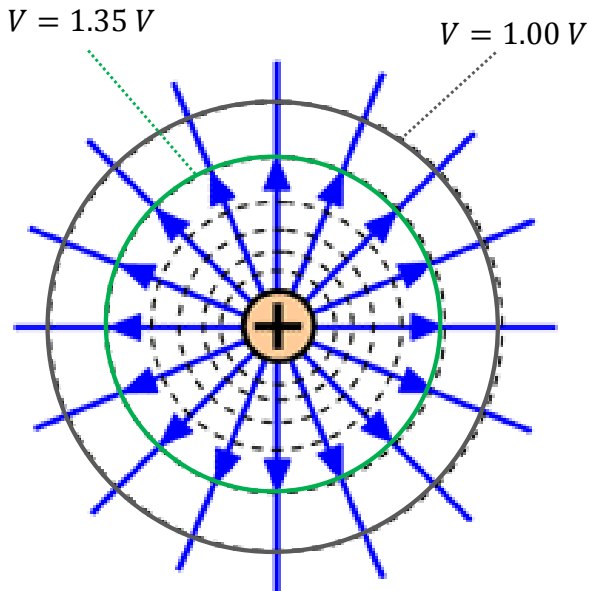
Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες του δυναμικού που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο Q που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

$$V = k \frac{Q}{r}$$

$$V = \text{σταθ.} \rightarrow r = \text{σταθ.}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{σταθ.}, \text{ εξίσωση σφαίρας}$$

οποιαδήποτε σφαίρα με κέντρο το σημειακό φορτίο, τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές (που ξεκινούν από το φορτίο) και άρα είναι ισοδυναμική επιφάνεια.



Βιβλιογραφία

- Serway R. A., Jewett J. W., 2013, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : ηλεκτρισμός και μαγνητισμός, φώς και οπτική, σύγχρονη φυσική*, Κλειδάριθμος , Αθήνα
- Halliday D., Resnick R, 2009, *Φυσική: μέρος Β*, 4^η εκδ., Γ. & Α. Πνευματικός, Αθήνα
- Young H.D., Freedman R.A., 2010, *Πανεπιστημιακή φυσική με σύγχρονη φυσική, τ. 2: Ηλεκτρομαγνητισμός-Οπτική* , 2^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα
- Pollack G.L., Stump D. R., 2002, *Electromagnetism*, Addison Wesley, San Francisco
- Hecht E.P., 1975, *Schaum's outline of theory and problems of optics*, McGraw-Hill Book Company, New York



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική II»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2165/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.