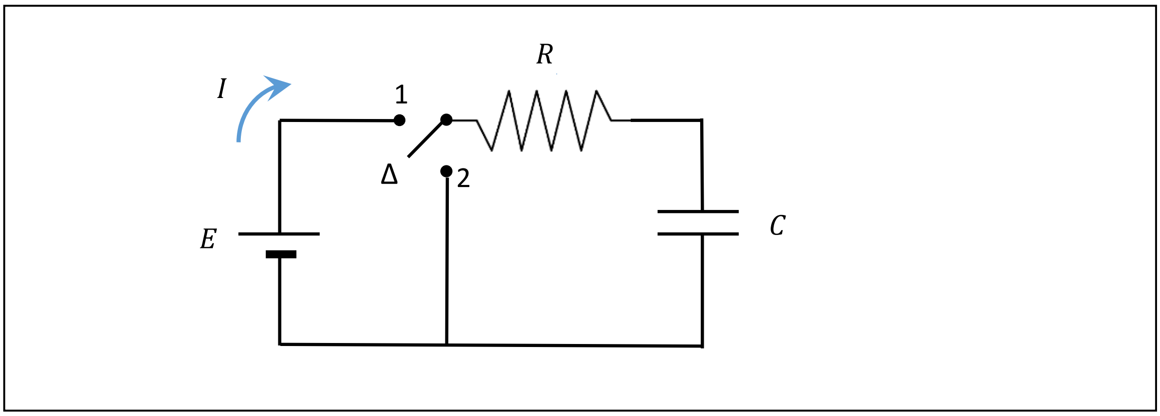
Φροντηστηριο 5

1)

Ο διακόπτης Δ στο παρακάτω σχήμα μπορεί να συνδεθεί σε μια από τις δυο θέσεις 1 και 2 αλλά αρχικά είναι ανοικτός και έτσι δεν υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα. Στο $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει στη θέση 1. Μετά από 6 δευτερόλεπτα ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση 2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη μεταβληθεί στιγμιαία το φορτίο του πυκνωτή. Να βρείτε την τάση στα άκρα της R σε χρόνο 0.2 δευτερολέπτων αφού γίνει η μεταγωγή $1 \rightarrow 2$. Δίνονται $R = 2.5\ k\Omega$, $C = 4.2\ mF$ και $E = 12$ V.



Απάντηση: $2.05\ \mu A$

Λύση:

Στη θέση 1 έχουμε κύκλωμα φόρτισης RC. Το φορτίο δίνεται από την

$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = EC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Η σταθερά χρόνου ισούται με

$$\tau = RC = 2.5 \times 10^3 \times 4.2 \times 10^{-3} = 10.5\ s$$

Στο $t = 6\ s$

$$q(t) = 12 \times 4.2 \times 10^{-3}\left(1 - e^{-\frac{6}{10.5}}\right) = 21.9\ mC$$

Μετά τη μεταγωγή το κύκλωμα γίνεται κύκλωμα εκφόρτισης. Το ρεύμα δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

όπου τώρα ο χρόνος μετράει από την μεταγωγή και $Q = 21.9\ mC$, δηλαδή ο πυκνωτής έχει το φορτίο της προηγούμενης φάσης. Η σταθερά του χρόνου είναι η ίδια αφού εξαρτάται μόνο από το R και C. Αντικαθιστώντας

$$I(0.2)=\frac{21.9\times10^{-3}}{10.5}e^{-\frac{0.2}{10.5}}=2.05\,mA$$

Η τάση στα άκρα της αντίστασης ισούται με

$$V_R=IR=2.05\,mA\times2.5\,M\Omega=\ 5.125\,mV$$

Το πρόσημο της V_R είναι τέτοια ώστε να είναι θετική η άκρη της αντίστασης που συνορεύει με τον πυκνωτή γιατί τώρα ο πυκνωτής παίζει το ρόλο της πηγής.

2) Κύκλωμα RLC σειράς έχει $R=3\Omega$, $Z_L=9\Omega$, $Z_C=5\Omega$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι $2A$. Ο πυκνωτής του κυκλώματος έχει παράλληλους οπλισμούς οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=0.8\,\mu m$ και έχουν εμβαδό $A=0.1\,m^2$ ο καθένας. Ζητούνται: α) το πλάτος της τάσης της πηγής V_0, β) Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων V_R, V_L και V_C τη χρονική στιγμή $t=20\,\mu s$ (θεωρώντας ότι στο $t=0$ η στιγμιαία τιμή της πηγής τάσης είναι μηδέν).

<u>Λύση</u>:

α) Η εμπέδηση Z του κυκλώματος δίνεται από την

$$Z^2=R^2+(Z_L-Z_C)^2=9+16=25=>Z=5\,\Omega$$

Η τιμή του αμπερόμετρου είναι η ενεργός τιμή

$$I_{rms}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}=>\frac{I_0}{\sqrt{2}}=2=>I_0=2\sqrt{2}=2.83$$

Το πλάτος της τάσης της πηγής V_0 ισούται με

$$V_0=I_0Z=2.83\times5=14.15\,V$$

β) Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς δίνεται από την

$$C=\frac{\varepsilon_0A}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.1}{0.8\times10^{-6}}=1.11\,\mu F$$

Από την χωρητική εμπέδηση, μπορούμε να βρούμε το ω

$$Z_C=\frac{1}{\omega C}=>\omega=\frac{1}{CZ_C}=\frac{1}{1.11\times10^{-6}\times5}=180\times10^3\,rad/s$$

Η γωνία θ δίνεται από την

$$tan\theta=\frac{Z_L-Z_C}{R}=\frac{9-5}{3}=\frac{4}{3}=>\theta=0.927\,rad=53.11^0$$

Η στιγμιαία τιμή του ρεύματος ισούται με

$$I=I_0sin(\omega t-\theta)$$

οπότε

$$V_L=L\frac{dI}{dt}=L\omega I_0cos(\omega t-\theta)=I_0Z_Lcos(\omega t-\theta)$$

$$V_R=IR=I_0Rsin(\omega t-\theta)$$

ενώ η τάση της πηγής είναι

$$V_s = V_0 sin\omega t$$

Στο $t = 2 \times 10^{-5}\ s$ έχουμε

$$V_L = I_0 Z_L cos(\omega t - \theta) = 2.83 \times 9 \times cos(1.80 \times 2 - 0.927\,) = -22.8\ V$$

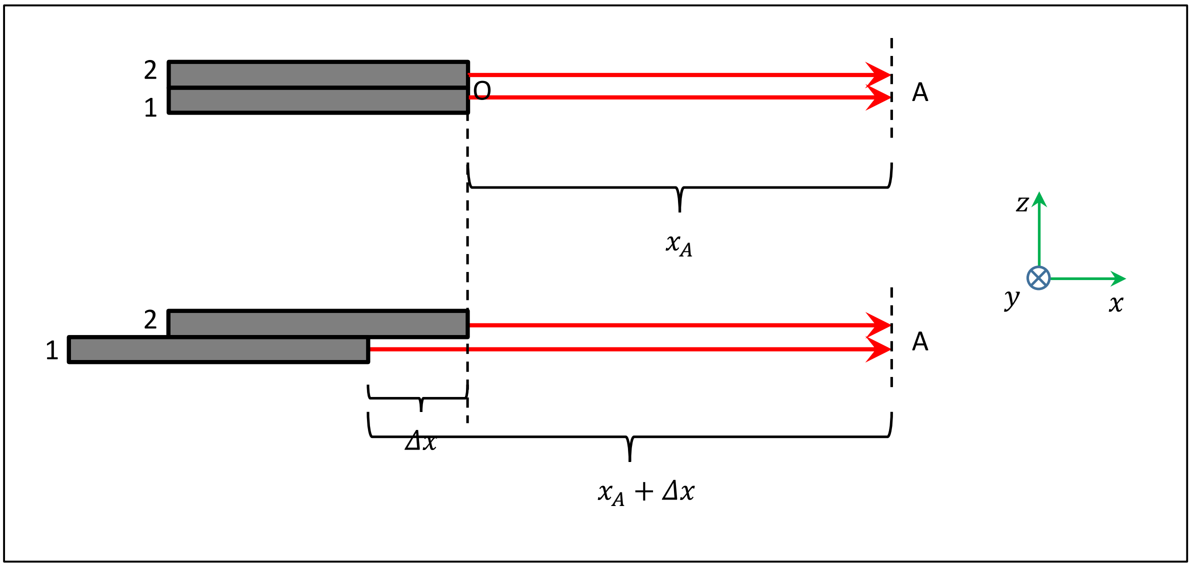
$$V_R = IR = I_0 R sin(\omega t - \theta) = 2.83 \times 3 \times sin(1.80 \times 2 - 0.927\,) = 3.80\ V$$

$$V_s = V_0 sin\omega t = 14.15\ \times sin(1.80 \times 2) = -6.26\ V$$

3) Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, με ίσο πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0 πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους στο σημείο Ο που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν το σημείο Α στο $x = x_A$. Στο σημείο Ο όπου εκπέμπουν οι δυο ίνες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή των συντεταγμένων, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν την χρονική στιγμή $t = 0$.

α) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (πάνω σχήμα)

β) Να κάνετε το ίδιο αλλά τώρα θεωρώντας ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα).



<u>Λύση</u>:

α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

(δεν υπάρχει αρχική φάση αφού στο $x = 0, t = 0$ μας δίνεται ότι $B = 0$ οπότε και $E = 0$ αφού τα δυο πεδία είναι συμφασικά). Οι κυκλικές συχνότητες είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάριθμοι $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Επομένως στο σημείο Α με $x = x_A$ έχουμε:

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$B_0 = E_0/c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{B}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c}\, \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx, τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο Α είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin \left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right]$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin \left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)\right]$$

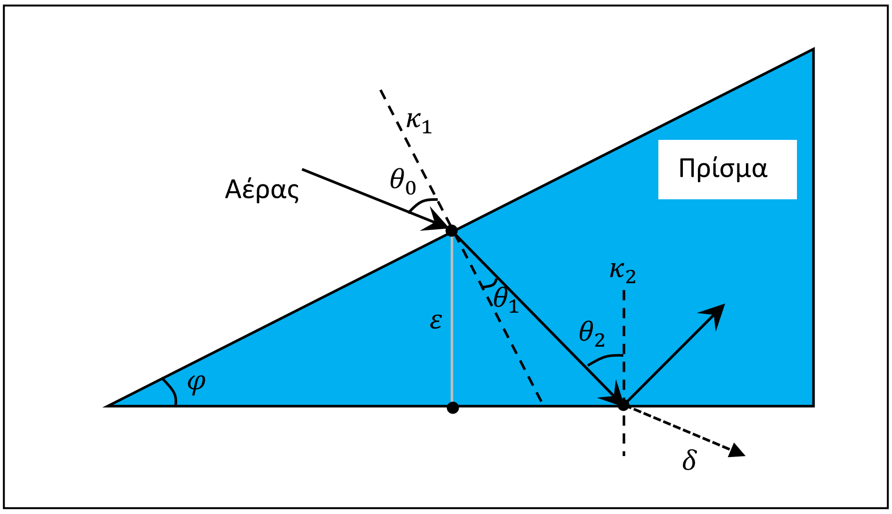
με αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c}\, \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)$$

4)

Στο παρακάτω σχήμα το πρίσμα γωνίας $\varphi = 20^0$ είναι κατασκευασμένο από διαφανές υλικό με δείκτη διάθλασης n και περιβάλλεται από αέρα. Ένας φοιτητής εκπέμπει μια φωτεινή ακτίνα η οποία προσπίπτει στο κεκλιμένο επίπεδο με γωνία πρόσπτωσης θ_0 (ως προς την κάθετό του κ_1) και παρατηρεί ότι οριακά στην τιμή 28^0, η διαθλώμενη ακτίνα δ κάτω από το πρίσμα "εξαφανίζεται". Να βρεθεί ο δείκτης διάθλασης n.



<u>Λύση</u>:

Η πορεία της ακτίνας φαίνεται στο σχήμα. Οι διακεκομμένες γραμμές κ_1 και κ_2 είναι οι κάθετες στις πάνω και κάτω επιφάνειες του πρίσματος αντίστοιχα ενώ φέρνουμε και τη γραμμή ε από το σημείο εισόδου της ακτίνας και προς τα κάτω παράλληλα με την κ_2. Στην πάνω επιφάνεια έχουμε από τον νόμο του Snell ότι

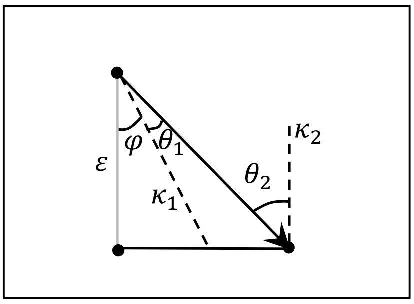
$$n_0 sin\theta_0 = nsin\theta_1$$

όπου για τον αέρα $n_0 = 1$ και για την οριακή περίπτωση $\theta_0 = 28^0$ έχουμε

$$nsin\theta_1 = sin28^0$$

Λόγω καθετότητας των ε και κ_1 αντίστοιχα με τις δυο έδρες του πρίσματος που σχηματίζουν τη γωνία φ, οι δυο αυτές ευθείες βρίσκονται μεταξύ τους επίσης υπό γωνία φ. Επομένως η γωνία μεταξύ της ε και της φωτεινής ακτίνας είναι ίση με $\theta_1 + \varphi$ (δείτε παρακάτω σχήμα). Αυτή η γωνία είναι εντός εναλλάξ με την θ_2 και οπότε:

$$\theta_2 = \theta_1 + 20^0$$



Από την εκφώνηση συνάγεται ότι στην κάτω επιφάνεια λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης με τη θ_2 να είναι η κρίσιμη γωνία και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 13.8:

$$sin\theta_2 = \frac{1}{n}$$

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες εξισώσεις, οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα:

$$nsin(\theta_2 - 20^0) = sin28^0$$

$$n(sin\theta_2 cos20^0 - cos\theta_2 sin20^0) = sin28^0$$

Το συνημίτονο της γωνίας θ_2 μπορούμε να το βρούμε από το ημίτονό της:

$$cos\theta_2 = \sqrt{1 - sin^2\theta_2} = \sqrt{1 - 1/n^2}$$

Επομένως

$$n\left(\frac{1}{n}cos20^0 - \sqrt{1 - 1/n^2}\,sin20^0\right) = sin28^0$$

$$\sqrt{n^2 - 1}\,sin20^0 = cos20^0 - sin28^0$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και υπολογίζοντας τις παραπάνω τιμές ημιτόνου και συνημιτόνου, μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$n = 1.7$$

5) Σε ένα πείραμα περίθλασης από απλή σχισμή με εύρος $b = 50\ \mu m$ χρησιμοποιείται φως laser με μήκος κύματος $\lambda = 700\ nm$. Εάν η απόσταση σχισμής-πετάσματος παρατήρησης είναι ίση με $D = 1.5\ m$, να βρεθούν

α) Η απόσταση y_1, y_2 και y_3 των πρώτων τριών σκοτεινών κροσσών από το κεντρικό μέγιστο

β) Το λόγο της έντασης I_2/I_1 του 2^{ου} προς του 1^{ου} μεγίστου (μετρώντας μετά το κεντρικό μέγιστο)

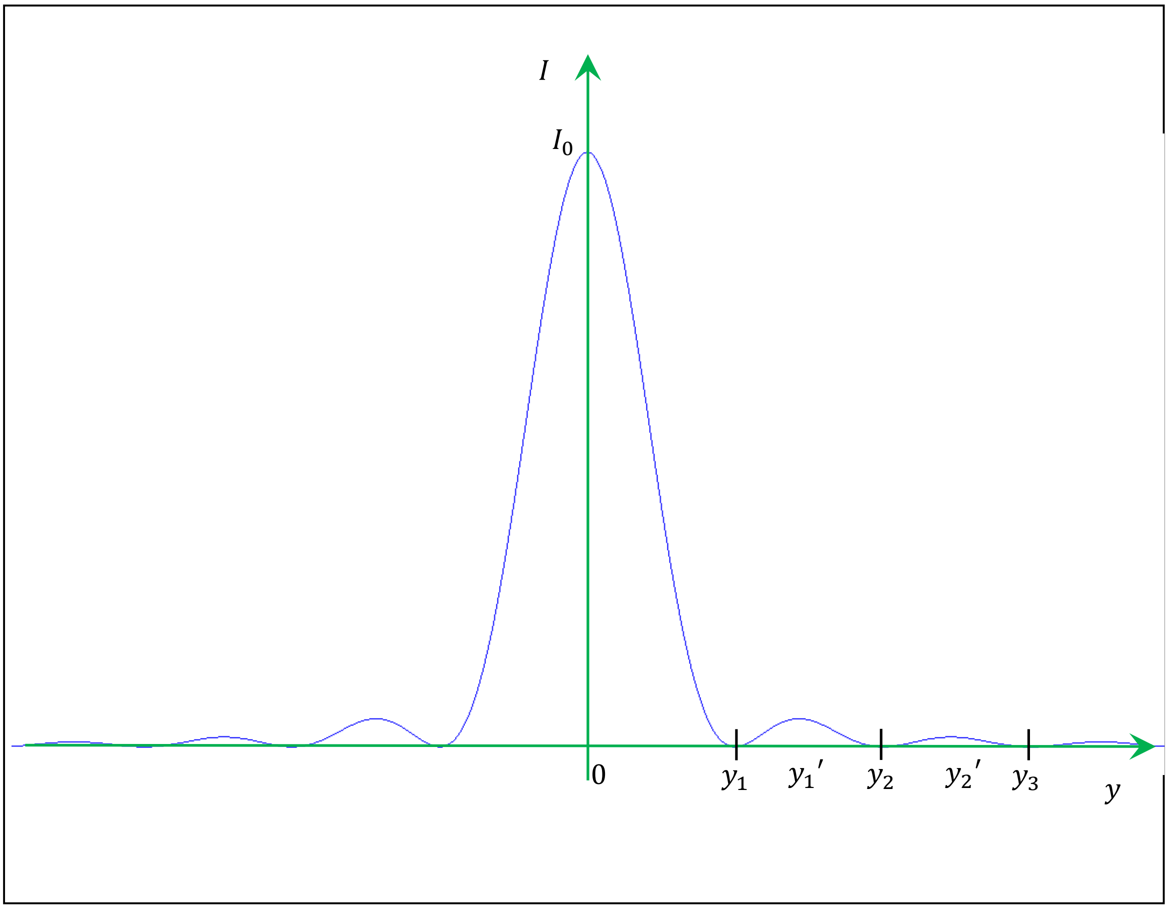
Λύση:

α) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα ελάχιστα στην κατανομή της έντασης I είναι τα μηδενικά της ενώ περίπου στο μέσο μεταξύ δυο ελαχίστων βρίσκονται κάποια τοπικά μέγιστα.

Από την Εξ. 14.22 έχουμε για τα ελάχιστα $y_m = m\lambda D/b$ οπότε

$$y_1 = \frac{\lambda D}{b} = \frac{0.70\ \mu m}{50\ \mu m} 1.5\ m = 0.021\ m = 2.1\ cm$$

Ομοίως $y_2 = 2y_1 = 4.2\ cm$ και $y_3 = 3y_1 = 6.3\ cm$.



β) Τα δυο μέγιστα βρίσκονται περίπου στο μέσο μεταξύ δυο ελαχίστων και έτσι το πρώτο είναι στο

$$y_1' = \frac{2.1 + 4.2}{2} = 3.15\ cm$$

ενώ το δεύτερο στο

$$y_2' = \frac{4.2 + 6.3}{2} = 5.25\ cm$$

Από την Εξ. 14.17 η ένταση είναι ίση με

$$I = I_0 \left(\frac{sin\xi}{\xi}\right)^2$$

όπου προσεγγιστικά από την Εξ. 14.21

$$\xi \approx \frac{\pi b}{\lambda D} y$$

Επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{sin\xi_2}{\xi_2} \times \frac{\xi_1}{sin\xi_1}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{y_2}\frac{sin(\frac{\pi b}{\lambda D}y_2)}{sin(\frac{\pi b}{\lambda D}y_1)}\right)^2$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$\frac{I_2}{I_1} = 0.36$$