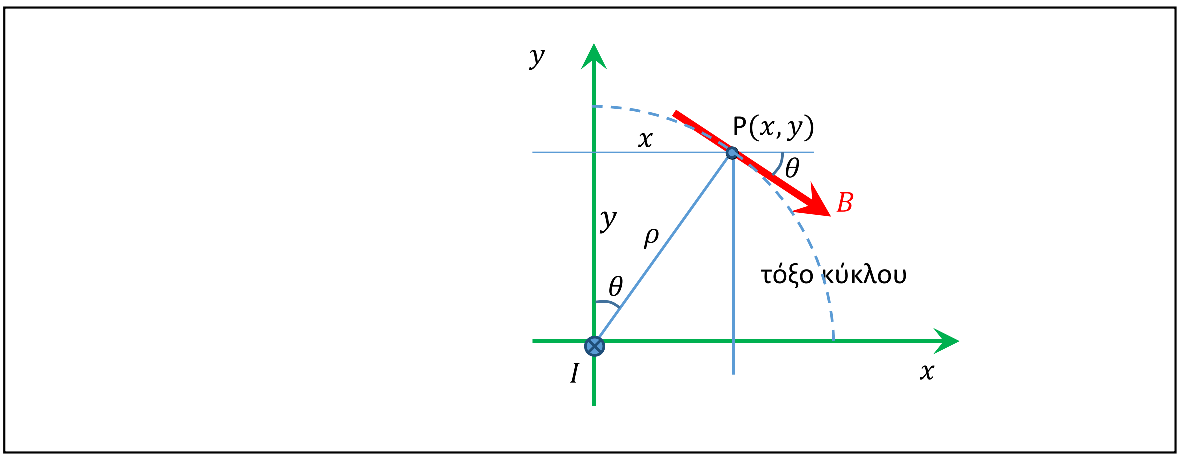
1) Ένα μακρύ ευθύγραμμο τμήμα σύρματος τέμνει την σελίδα κάθετα στο σημείο $(0,0)$ και διαρρέεται από ρεύμα $I = 3.83\ A$ με φορά προς τα μέσα της σελίδας. (α) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το παραγόμενο (από τον ευθύγραμμο αγωγό) πεδίο $\vec{B}$ σε σχέση με τον άξονα x, σε τυχαίο σημείο της σελίδας με συντεταγμένες $x = 3.2\ cm$ και $y = 2.1\ cm$ (β) Βρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου.

Απάντηση: (α) -56.7^0, (β) $2 \times 10^{-5}\ T$

Λύση:

(α) Το παραγόμενο πεδίο ενός ευθύγραμμου αγωγού μεγάλου μήκους βρίσκεται εφαπτόμενο επάνω σε κύκλους με κέντρο επάνω στον αγωγό (κυκλικές δυναμικές γραμμές) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η ακτίνα ρ ενός κύκλου τέμνει κάθετα την εφαπτομένη του και άρα το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}$. Έτσι η γωνία θ που σχηματίζει το πεδίο $\vec{B}$ σε σχέση με τον άξονα x είναι ίση με τη συμπληρωματική γωνία που σχηματίζει το $\vec{\rho}$ με τον άξονα x και έτσι μπορούμε να την υπολογίσουμε εύκολα από απλή τριγωνομετρία ως εξής:

$$tan\theta = \frac{x}{y} => \theta = tan^{-1}\left(\frac{3.2}{2.1}\right) = 56.7^0$$

Βέβαια με την δεδομένη φορά του ρεύματος, το μαγνητικό πεδίο είναι προς τα κάτω και έτσι η γωνία του είναι αρνητική, δηλαδή

$$\theta = -56.7^0$$

(β) Το μέτρο του πεδίου είναι ίσο με

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

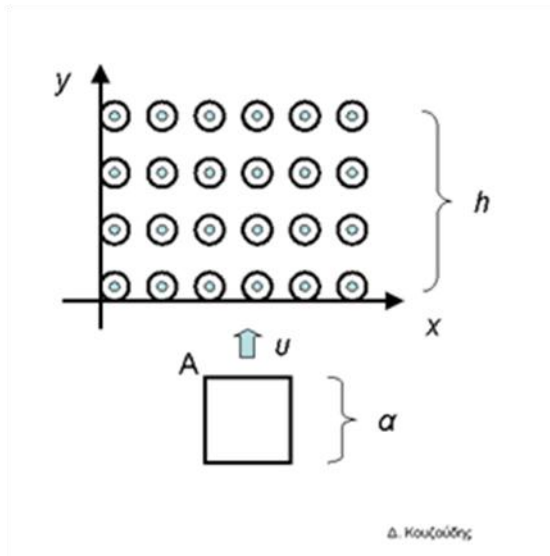
Από απλό Πυθαγόρειο

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3.2^2 + 2.1^2} = 3.83\ cm = 0.0383\ m$$

Έτσι:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3.83}{2\pi \times 0.0383} = 2 \times 10^{-5}\ T$$

2) Στο παρακάτω σχήμα ένα τετράγωνο πλαίσιο διαστάσεων $a \times a$ εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα v μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου B και με φορά έξω από την σελίδα. Το μαγνητικό πεδίο εκτείνεται σε μια περιοχή εύρους h κατά μήκος του άξονα y. Έστω ότι y είναι η συντεταγμένη του σημείου Α του πλαισίου και ότι $y = 0$ όταν $t = 0$. Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης V στο πλαίσιο συναρτήσει του t.



Λύση:

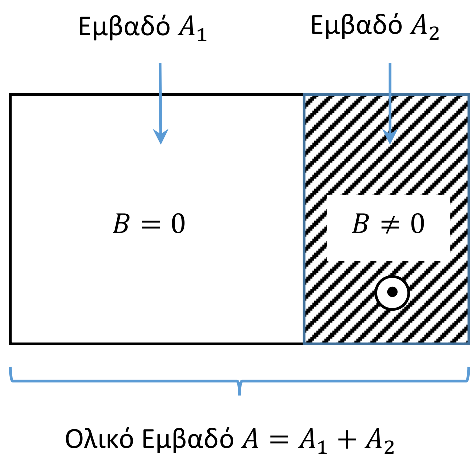
Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Α του πλαισίου αγγίζει τον άξονα x και η κατακόρυφη συντεταγμένη του είναι $y = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του *Faraday* για να λύσουμε το πρόβλημα. Η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου ισούται με

$$\Phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA cos\theta$$

Στην προκειμένη περίπτωση $\theta = 0$ (θυμηθείτε ότι το θ είναι η γωνία μεταξύ του B και του κάθετου στο πλαίσιο) οπότε

$$\Phi_M = \int_S B dA$$

Θεωρήστε το παρακάτω σχήμα όπου ένα ορθογώνιο πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μέσα σε περιοχή όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο B κάθετο στο πλαίσιο (γραμμοσκιασμένη περιοχή). Έστω ότι το εμβαδό του πλαισίου είναι A και ότι μόνο ένα μέρος αυτού A_2 είναι μέσα στο πεδίο ενώ το υπόλοιπο A_1 είναι στην περιοχή εκτός πεδίου, δηλαδή εκεί όπου $B = 0$.



Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\Phi_M = 0 \cdot A_1 + B \cdot A_2$$

όπου το B βγήκε εκτός ολοκληρώματος επειδή είναι σταθερό και φυσικά το ολοκλήρωμα του dA είναι ίσο με το εμβαδό της περιοχής. Βάσει της παραπάνω σχέσης, έχουμε τις εξής πέντε περιπτώσεις για το δεδομένο κινούμενο πλαίσιο οι οποίες εικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:

α) $y < 0$, δηλαδή πριν να εισέλθει το πλαίσιο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Τότε

$$\Phi_M = 0$$

β) $y > 0$ αλλά $y < a$. Το πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μόνο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε η συντεταγμένη του σημείου Α είναι ίση με $y = vt$ και το εμβαδό A_2 του πλαισίου που βρίσκεται υπό πεδίο είναι ίσο με $A_2 = ay = avt$ και επομένως

$$\Phi_M = Bavt$$

γ) $y > a$ αλλά $y < h$. Το πλαίσιο βρίσκεται ολικώς μέσα στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου και άρα $A_2 = A = a^2$ το ολικό εμβαδό του πλαισίου. Η μαγνητική ροή είναι σταθερή και ίση με

$$\Phi_M = Ba^2$$

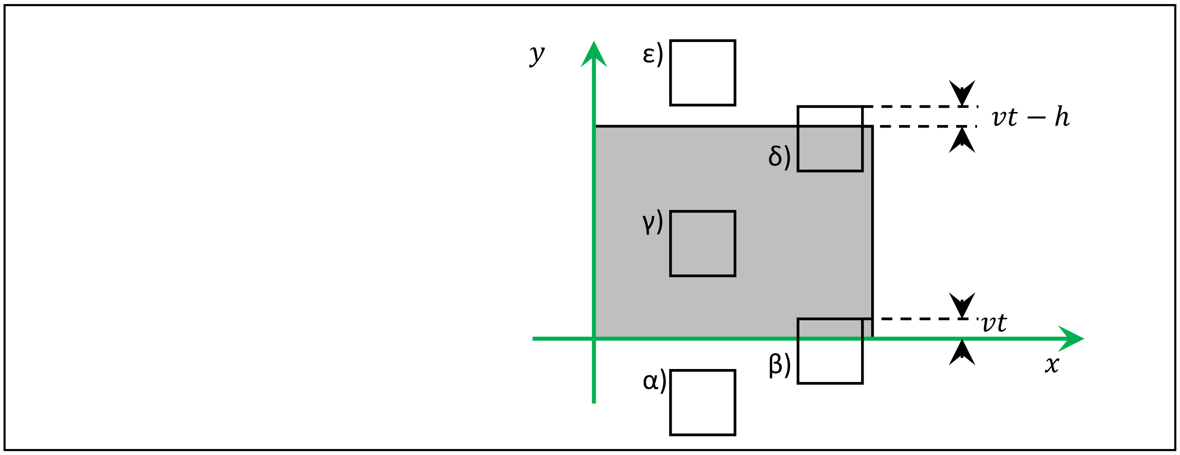
δ) $y > h$ αλλά $y < a + h$. Το πλαίσιο βρίσκεται μερικώς μόνο στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε η συντεταγμένη του σημείου Α είναι ίση με $y = vt$.

Το μήκος $y-h=vt-h$ βρίσκεται εκτός της περιοχής του πεδίου ενώ το υπόλοιπο μήκος $a-(vt-h)$ βρίσκεται εντός. Επομένως $A_2=a(a-vt+h)$. Η μαγνητική ροή είναι ίση με

$$\Phi_M=Ba(a-vt+h)$$

ε) $y>a+h$. Το πλαίσιο έχει πλέον βγει εντελώς εκτός της περιοχής του μαγνητικού πεδίου και έτσι

$$\Phi_M=0$$



Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

$$V=\frac{d\Phi_M}{dt}$$

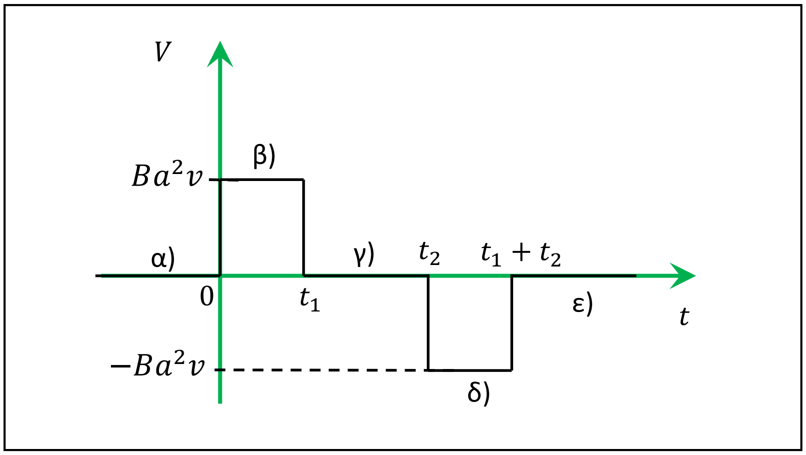
Επομένως έχουμε για τις παραπάνω περιπτώσεις:

$$\Phi_M=\begin{cases}0 & y<0\\ Ba^2v & 0<y<a\\ 0 & a<y<h\\ -Ba^2v & h<y<h+a\\ 0 & y>h+a\end{cases}$$

Αφού η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς το χρόνο $t=y/v$ και να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\Phi_M=\begin{cases}0 & t<0\\ Ba^2v & 0<t<t_1\\ 0 & t_1<y<t_2\\ -Ba^2v & t_2<y<t_1+t_2\\ 0 & y>t_1+t_2\end{cases}$$

όπου $t_1=a/v$ και $t_2=h/v$. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η εξής:

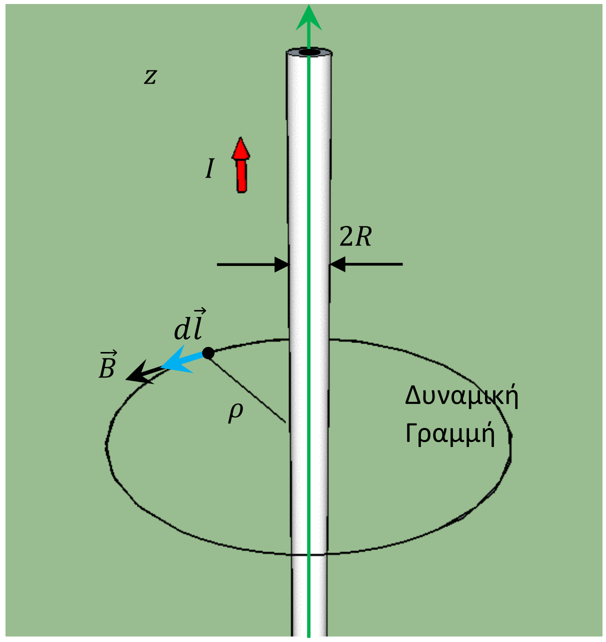


3) Με τη βοήθεια του νόμου του Ampere να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο ενός σωλήνα απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, ο οποίος διαρρέεται από ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος J (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας κάθετη στη ροή του ρεύματος, δείτε Εξ. 7.6) κατά μήκος του άξονά του.

<u>Λύση</u>:

α) Εξωτερικό του αγωγού

Όπως και με τον ευθύγραμμο κυλινδρικό αγωγό απείρου μήκους και πεπερασμένης διαμέτρου που είδαμε στο αντίστοιχο υποκεφάλαιο στο βιβλίο, θα υποθέσουμε ότι λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, η κατανομή των δυναμικών γραμμών είναι ακριβώς η ίδια όπως και αυτή του λεπτού ευθύγραμμου αγωγού που εικονίζεται στο Σχήμα 8.23, δηλαδή οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κοινό κέντρο επάνω στον άξονα του αγωγού. Μια τέτοια δυναμική γραμμή – κύκλος με ακτίνα $r > R$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και όπως γνωρίζουμε το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο αυτό και έχει την φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού του Σχήματος 8.24.



Σχήμα 9.2

Για να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere Εξ. 9.1, πρέπει να επιλέξουμε μια κλειστή καμπύλη και η πιο φυσική επιλογή είναι να πάρουμε ως καμπύλη την ίδια την δυναμική γραμμή. Έτσι το $d\vec{l}$ το οποίο είναι επίσης εφαπτόμενο στον κύκλο και με τέτοια φορά ώστε να διαγράφει τον κύκλο με το εσωτερικού του κύκλου να είναι προς τα αριστερά του, είναι παράλληλο με το $\vec{B}$ όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο της Εξ. 9.1 απλοποιείται σε

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$$

και ο νόμος του Ampere γίνεται

$$\oint Bdl = \mu_0 I$$

όπου το περικλειόμενο ρεύμα είναι φυσικά όλο το ρεύμα I του αγωγού. Από την πυκνότητα ρεύματος J, το ρεύμα I ισούται με το γινόμενο της πυκνότητας επί το εμβαδό της διατομής του αγωγού που διέρχεται το ρεύμα. Αφού το ρεύμα είναι περιορισμένο μεταξύ των κύκλων με ακτίνα R_1 και R_2, τότε έχουμε

$$I = J\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

Εάν κάνουμε την εύλογη υπόθεση ότι αυτό το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα επάνω σε όλη τη διατομή του αγωγού και εάν επιπλέον φανταστούμε ότι κινούμαστε επάνω στη δυναμική γραμμή του παραπάνω σχήματος, τότε θα "βλέπαμε" τα ίδια κινούμενα φορτία στις ίδιες σχετικές αποστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο του B δε μεταβάλλεται κατά μήκος της καμπύλης αυτής και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Άρα

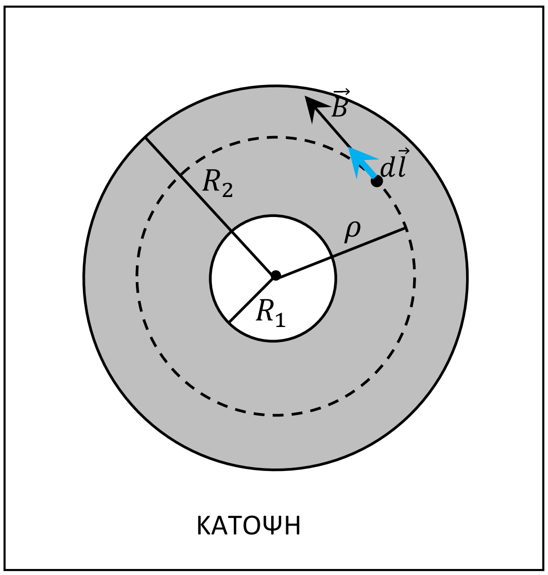
$$B\oint dl = \mu_0 J\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

Αφού το dl είναι το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το ολικό μήκος της το οποίο είναι φυσικά η περιφέρεια του κύκλου $2\pi\rho$. Έτσι

$$B2\pi\rho\ = \mu_0\pi J({R_2}^2 - {R_1}^2) => B = \frac{\mu_0 J({R_2}^2 - {R_1}^2)}{2\rho}$$

β) Εσωτερικό του αγωγού

Εργαζόμαστε ακριβώς όπως και στο εξωτερικό του αγωγού όμως τώρα η καμπύλη Ampere που είναι και πάλι κύκλος ακτίνας ρ, βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με ακτίνα $R_1 < \rho < R_2$. Οι δυναμικές γραμμές είναι και σε αυτή την περίπτωση ομόκεντροι κύκλοι οπότε το $1^{ο}$ μέλος της Εξ. 9.1 καταλήγει και πάλι να είναι ίσο με $B2\pi\rho$. Στο δεύτερο μέλος όμως το περικλειόμενο ρεύμα, το οποίο θα το συμβολίσουμε με I' σε αυτή την περίπτωση, θα είναι λιγότερο από το συνολικό ρεύμα του αγωγού και πρέπει να το υπολογίσουμε.



Σχήμα 9.3

Αφού το ρεύμα είναι περιορισμένο μεταξύ των κύκλων με ακτίνα R_1 και ρ, τότε από την πυκνότητα ρεύματος J έχουμε

$$I' = J\pi(\rho^2 - {R_1}^2)$$

Επομένως ο νόμος του Ampere καταλήγει στο αποτέλεσμα

$$B2\pi\rho = \mu_0 I' = \mu_0 J\pi(\rho^2 - {R_1}^2) => B = \frac{\mu_0 J(\rho^2 - {R_1}^2)}{2\rho}$$

γ) Κοιλότητα του αγωγού

Στην κοιλότητα δεν υπάρχει ρεύμα και άρα ο νόμος του Ampere γράφεται ως

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

που ικανοποιείται ταυτοτικά για $B = 0$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των τριών περιπτώσεων α, β και γ οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$B = \begin{cases} 0 & \rho < R_1 \\ \mu_0 J\left(\rho^2 - {R_1}^2\right)/2\rho & R_1 < \rho < R_2 \\ \mu_0 J\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)/2\rho & \rho > R_2 \end{cases}$$