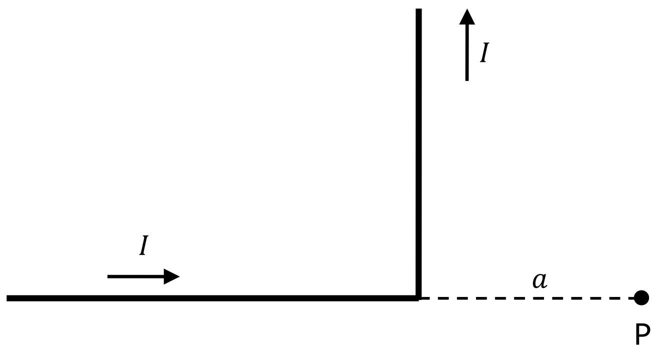
8. ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Πρόβλημα 8.6.

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I. Υπολογίστε με τη βοήθεια του νόμου του Biot-Savart με ολοκλήρωση το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο P. (Σημείωση: Οι τελικοί υπολογισμοί απλουστεύονται εάν εκφραστούν όλες οι μεταβλητές μήκους συναρτήσει μιας γωνίας).



Λύση:

Ο νόμος των Biot-Savart στην Εξ. 8.13 μας δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που παράγει το στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$ ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I σε απόσταση $\vec{r}$ από το στοιχειώδες μήκος:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Θα χωρίσουμε τον δεδομένο αγωγό στα δυο κάθετα κομμάτια και θα ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτά για να βρούμε το ολικό πεδίο $\vec{B}$. Για τον αγωγό στα αριστερά ισχύει

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

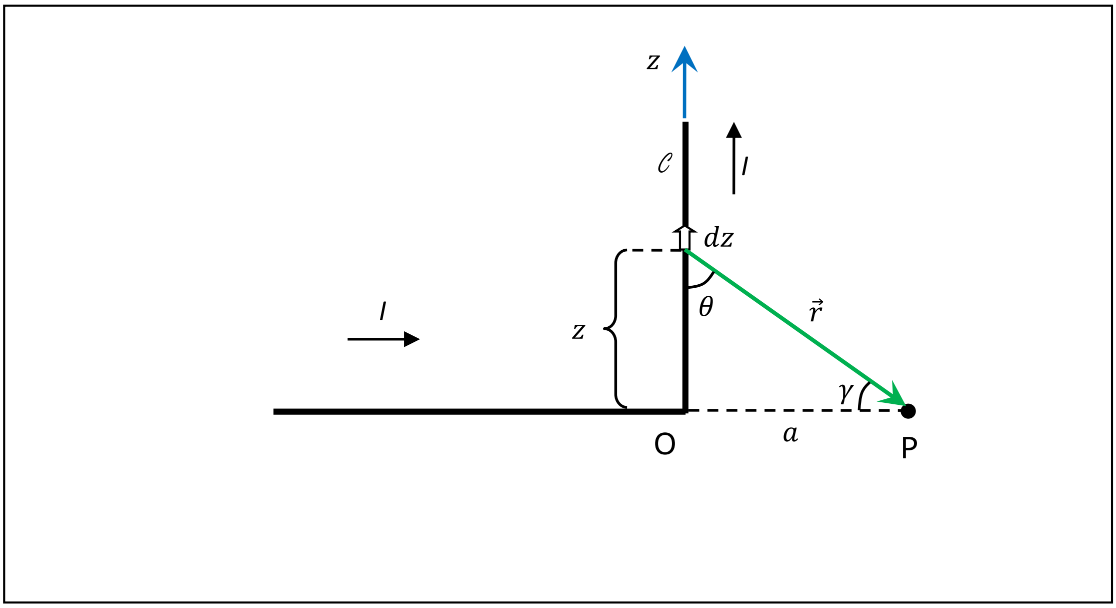
αφού τόσο το $d\vec{l}$ είναι οριζόντιο όσο και το διάνυσμα $\vec{r}$ που το συνδέει με το σημείο παρατήρησης P. Επομένως το οριζόντιο τμήμα του αγωγού δεν συνεισφέρει κάτι στον υπολογισμό και έτσι θα ολοκληρώσουμε μόνο στο κατακόρυφο τμήμα. Η ολοκλήρωση ακολουθεί την ολοκλήρωση που έχουμε στις σημειώσεις για ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους με τη διαφορά ότι ο αγωγός είναι ημι-άπειρος.

Έτσι παίρνουμε σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα τον άξονα z κατά μήκος του αγωγός ℓ και αναζητούμε το μαγνητικό πεδίο στη δεδομένη απόσταση a από τον αγωγό. Για το λόγο αυτό "τεμαχίζουμε" τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dz το καθένα και επιλέγουμε ως την αρχή των συντεταγμένων O στο κάτω άκρο του αγωγού. Το διάνυσμα $d\vec{l}$ που εμφανίζεται στην Εξ. 8.13 είναι το $d\vec{l} = dz\vec{e}_z$ ενώ το $\vec{r}$ είναι αυτό που ενώνει το $d\vec{l}$ με το σημείο παρατήρησης P. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $d\vec{l} \times \vec{r}$ στην Εξ. 8.13 ισούται με

$$\left| d\vec{l} \times \vec{r} \right| = rdzsin\theta$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η φορά του είναι προς τα μέσα της σελίδας (δηλαδή κατά μήκος του άξονα-y ο οποίος είναι κάθετος στην σελίδα με φορά προς τα μέσα). Ολοκληρώνοντας την Εξ. 8.13 σε όλο τον αγωγό οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_C \frac{rdzsin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_C \frac{sin\theta}{r^2} dz$$



Στο παραπάνω ολοκλήρωμα εμφανίζονται τρεις μεταβλητές, οι θ, r και z. Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε να τις εκφράσουμε όλες συναρτήσει της γωνίας γ που είναι η συμπληρωματική της θ. Έτσι από το παραπάνω σχήμα έχουμε

$$sin\theta = cos\gamma$$

$$cos\gamma = \frac{a}{r} => \frac{1}{r} = \frac{cos\gamma}{a}$$

$$tan\gamma = \frac{z}{a} => dz = \frac{a}{cos^2\gamma} d\gamma$$

Τα όρια του αγωγού είναι τα $z = 0$ έως ∞ που αντιστοιχούν σε $\gamma = 0$ έως $\pi/2$. Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\frac{\pi}{2}} cos\gamma \frac{cos^2\gamma}{\rho^2} \frac{\rho}{cos^2\gamma} d\gamma = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\frac{\pi}{2}} cos\gamma d\gamma$$

Τελικά

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi\rho}\vec{e}_y$$

9. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE

Πρόβλημα 9.6.

Το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο χώρο δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την έκφραση

$$B = \frac{c}{\rho}\vec{e}_\varphi$$

όπου c είναι μια σταθερά, ρ η πολική ακτίνα και $\vec{e}_\varphi$ το μοναδιαίο της γωνίας φ. Να βρεθεί το ρεύμα I που δημιουργεί αυτό το πεδίο εάν γνωρίζετε ότι τέμνει κάθετα ένα νοητό κύκλο ακτίνας R ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο x-y με κέντρο την αρχή των αξόνων και ότι η φορά του I είναι προς τα θετικά z.

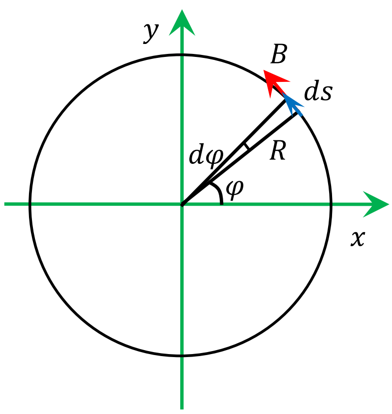
Λύση: Από τον νόμο του Ampere έχουμε

$$I = \frac{1}{\mu_0}\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

όπου επιλέγουμε ως καμπύλη Ampere τον δεδομένο κύκλο ο οποίος εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το εφαπτόμενο διάνυσμα $d\vec{s}$ του στοιχειώδους μήκους της καμπύλης το οποίο έχει μέτρο $ds = Rd\theta$, καθώς και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε τυχαίο σημείο με πολικές συντεταγμένες $\rho = R$ (πολική ακτίνα, επάνω στον κύκλο) και φ (πολική γωνία). Και τα δυο διανύσματα είναι κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{e}_\varphi$ και έτσι το εσωτερικό γινόμενο μέσα στο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = Bds = \frac{c}{R}Rd\theta = cd\theta$$

όπου αντικαταστήσαμε $\rho = R$ στην δεδομένη έκφραση του μαγνητικού πεδίου.



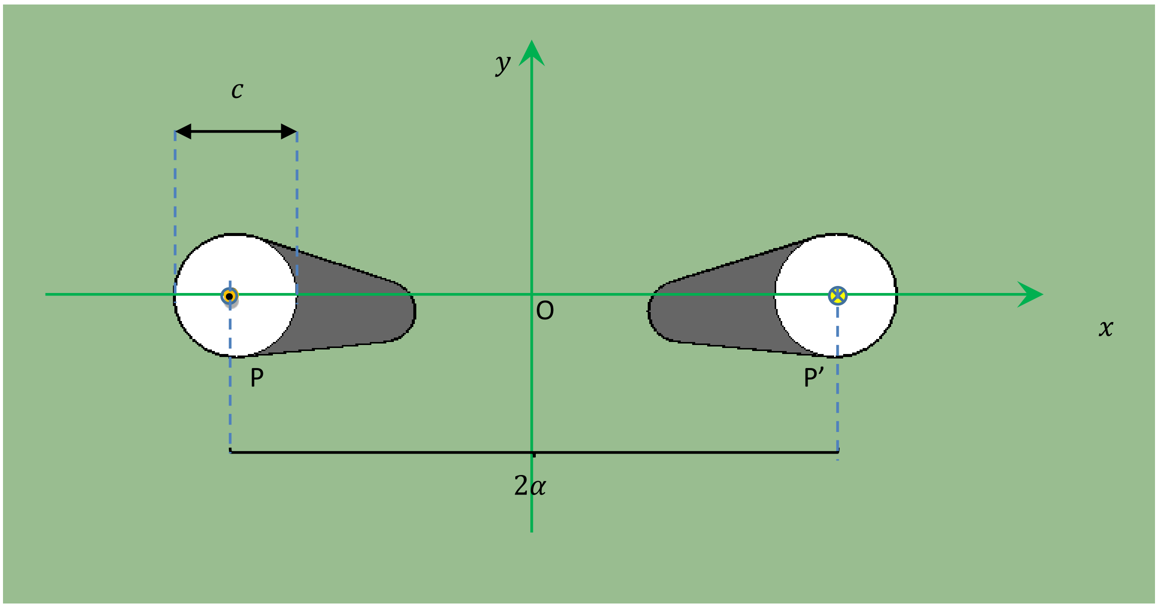
Αφού το c είναι σταθερό, η ολοκλήρωση είναι εύκολη και οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$I = \frac{c}{\mu_0}\oint d\theta = \frac{2\pi c}{\mu_0}$$

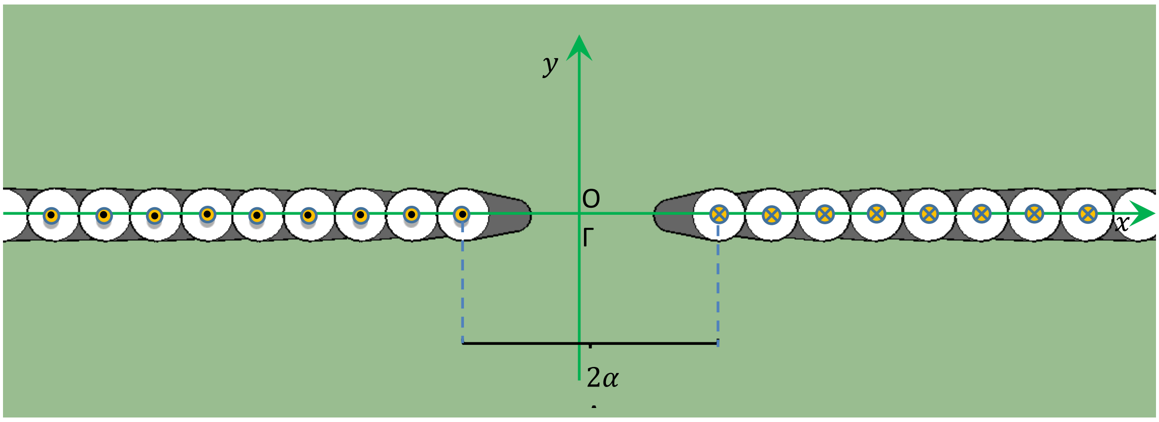
Πρόβλημα 9.7.

Στο παρακάτω σχήμα οι δυο λεπτοί κυλινδρικοί αγωγοί P και P’ διαμέτρου c ο καθένας, τέμνουν τη σελίδα κάθετα, είναι απείρου μήκους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I και με τη φορά που σημειώνεται.

α) Να βρεθεί το μέτρο και η φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στο σημείο O της σελίδας το οποίο ισαπέχει από αυτούς και που το λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων



β) Θεωρήστε τις παρακάτω δυο πεπερασμένες συστοιχίες αγωγών όπως αυτών στο μέρος α, οι οποίες βρίσκονται επάνω στον άξονα x συμμετρικά ως προς το O, η μια μεταξύ των ορίων $x = \alpha$ και $x = \beta$, ενώ η άλλη μεταξύ των $x = -\alpha$ και $x = -\beta$. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I με τη φορά που σημειώνεται. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του μέρους α, υπολογίστε με ολοκλήρωση το μέτρο και τη φορά του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο συστοιχίες στο σημείο O. Σημείωση: Θεωρήστε ότι η διάμετρος c του κάθε αγωγού είναι πολύ μικρή $c \to 0$ και έτσι σε ένα μικρό απειροστό μήκος dx βρίσκεται ένας μεγάλος αριθμός από τέτοιους αγωγούς.



Λύση:

α) Είδαμε ότι στο εξωτερικό του χώρο, ένας κυλινδρικός αγωγός συμπεριφέρεται σαν ευθύγραμμος λεπτός αγωγός και έτσι το μαγνητικό του πεδίο δίνεται από την Εξ. 8.16

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

Στο σημείο Ο τα δυο παραγόμενα πεδία έχουν φορά προς τα κάτω και έτσι το συνιστάμενο πεδίο είναι κατά τη διεύθυνση $-y$. Και οι δυο αγωγοί απέχουν απόσταση $\rho = \alpha$ από το σημείο Ο και έτσι το μέτρο του συνιστάμενο πεδίου ισούται με

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} = \frac{\mu_0 I}{\pi\alpha}$$

β) Μπορούμε να θεωρήσουμε τους αγωγούς σε ζεύγη και να πούμε ότι σε τυχαία απόσταση $\pm x$ από το Ο βρίσκεται ένα τέτοιο ζεύγος το οποίο σύμφωνα με το αποτέλεσμα του μέρους α παράγει στο Ο πεδίο

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi x}$$

προς τα κάτω. Εάν τεμαχίσω τον άξονα-x σε απειροστά τμήματα μήκους dx το καθένα, τότε θα υπάρχει ένας συνολικός αριθμός $dN = dx/c$ τέτοιων αγωγών μέσα σε αυτό και άρα θα παράγουν μαγνητικό πεδίο στο Ο ίσο με:

$$dB = dN\frac{\mu_0 I}{\pi x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c x}dx$$

Επειδή όλα τα dB είναι συγγραμμικά, μπορούμε απλά να αθροίσουμε τα μέτρα τους. Με ολοκλήρωση από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ παίρνουμε:

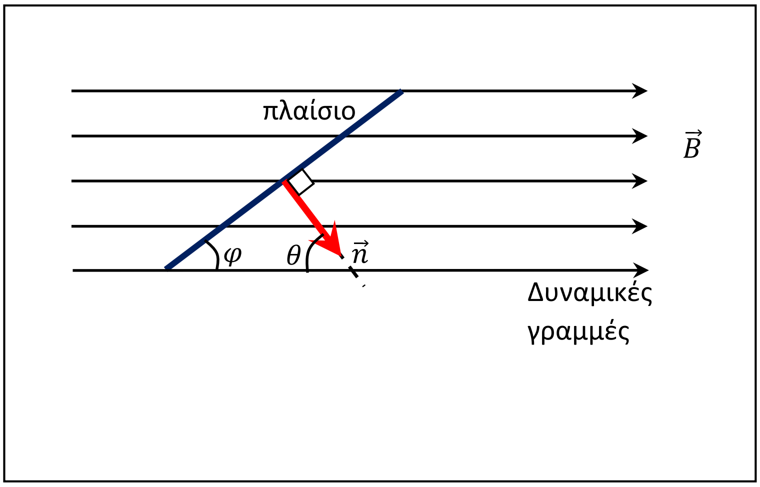
$$B = \int_{x=a}^{\beta} dB = \frac{\mu_0 I}{\pi c}\int_{x=a}^{\beta}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{\pi c}(ln\beta - lna) = \frac{\mu_0 I}{\pi c}ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

10. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Πρόβλημα 10.8.

Ένα τετραγωνικό αγώγιμο πλαίσιο με $N = 10$ σπείρες κολλητά η μια με την άλλη, με εμβαδό $A = 0.25\ mm^2$ η καθεμία, περιστρέφεται ελεύθερα ώστε το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $B = 0.2\ T$ να μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1. Σε χρόνο $t = 2\ s$ το πλαίσιο έχει καλύψει γωνία $\Delta\varphi = \pi/4\ rad$ (σε σχέση με την αρχική του θέση). Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ κατ' απόλυτη τιμή σε $Volts$ σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση);

Λύση:



Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του *Faraday.* Η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου ισούται με

$$\Phi_M = NBAcos\theta$$

Όμως χρειάζεται προσοχή, η γωνία θ σε αυτό το νόμο είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο $\vec{n}$ του πλαισίου με το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ενώ η δεδομένη γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει το πλαίσιο με το μαγνητικό πεδίο. Οι δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\theta + \varphi = \pi/2$ και έτσι $cos\theta = sin\varphi$. Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBAsin\varphi$$

Μας δίνεται πληροφορία για το συνημίτονο και έτσι γράφουμε αυτή τη σχέση με τη βοήθεια της βασικής τριγωνομετρικής σχέσης $cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$ ως

$$\Phi_M = \pm NBA\sqrt{1 - cos^2\varphi}$$

Αφού μας δίνεται ότι αρχικά $co\varphi = 0$ τότε η αρχική της τιμή της γωνίας είναι $\varphi = 0$ ενώ το πλαίσιο έρχεται σε τελική θέση με $\Delta\varphi = \pi/4\ rad$ και έτσι εκεί $\varphi = \pi/4\ rad$. Αυτό σημαίνει ότι η φ παραμένει στο 1^{o} τεταρτημόριο όπου $cos\varphi > 0$ και έτσι δεν χρειάζεται η αρνητική τιμή της ρίζας παραπάνω. Από τα δεδομένα το συνημίτονο της γωνίας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1 και επομένως θα είναι της μορφής

$$cos\varphi = 1 - \lambda t$$

όπου λ η κλίση της παραπάνω γραμμικής σχέσης. Αφού στο χρόνο $t = 2\ s$ έχουμε $\varphi = \pi/4$ τότε

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\lambda => \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.146$$

Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBA\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}$$

Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

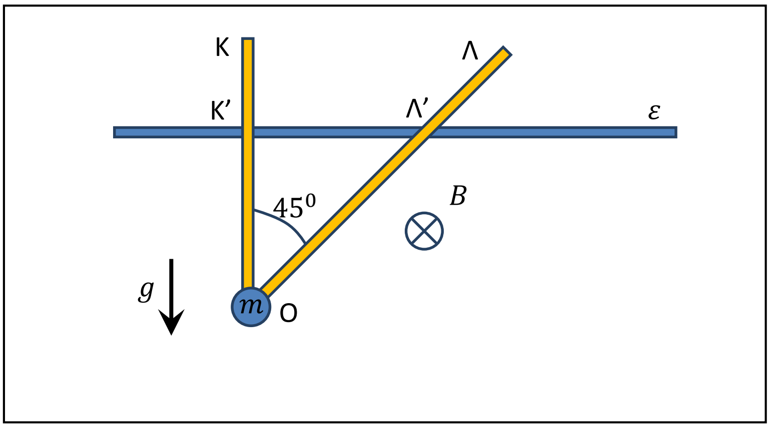
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(NBA\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}\right) = NBA\frac{\lambda(1 - \lambda t)}{\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}}$$

Μας ζητείται η ΗΕΔ τη στιγμή $t = 2\ s$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$V = 10 \times 0.2 \times 0.25\frac{0.146(1 - 0.146 \times 2)}{\sqrt{1 - (1 - 0.146 \times 2)^2}} = 73.2\ mV$$

Πρόβλημα 10.9.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται ένας σταθερός αγωγός ε και ένας δεύτερος κινούμενος αβαρής αγωγός ΚΟΛ σε σχήμα γωνίας (σταθερού σχήματος) όπου $K\hat{O}\Lambda = 45^0$. Στη κορυφή Ο της γωνίας είναι προσδεμένη σημειακή μάζα m η οποία εκτελεί κατακόρυφη ελεύθερη πτώση ξεκινώντας στο $t = 0$ από το ύψος του ε, παρασύροντας τον ΚΟΛ επίσης σε καθαρή κατακόρυφη πτώση χωρίς περιστροφή. Οι δυο αγωγοί είναι σε συνεχή επαφή μεταξύ τους στα σημεία Κ' και Λ', χωρίς τριβή έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα αγώγιμο τριγωνικό ισοσκελές πλαίσιο Κ'ΟΛ' σε κάθε στιγμή. Εάν κάθετα στο επίπεδο της σελίδας υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.2\ T$, να βρεθεί η ΗΕΔ σε αυτό το πλαίσιο κατά τη χρονική στιγμή $t = 2\ s$ (πάρτε $g \approx 10\ m/s^2$ για ευκολία).



Λύση:

Έστω y η απόσταση της μάζας m στο χρόνο t από τον οριζόντιο αγωγό ε η οποία σύμφωνα με τα δεδομένα έχει αρχική τιμή $y(0) = 0$. Από ότι γνωρίζουμε από τη Φυσική Ι, στην ελεύθερη πτώση ισχύει

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Αυτή η απόσταση y είναι ίση με την πλευρά Κ'Ο του τριγώνου αλλά αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε είναι ίση και με την πλευρά Λ'Ο. Το εμβαδό του τριγώνου Κ'ΟΛ' ισούται με

$$A = \frac{1}{2}(\mathrm{K'O}) \times (\Lambda'\mathrm{O}) = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{8} g^2 t^4$$

και η μαγνητική ροή μέσω του τριγώνου ισούται με

$$\Phi_B = BAcos0^0 = \frac{1}{8} B g^2 t^4$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

$$V = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2} B g^2 t^3 = \frac{1}{2} 0.2 \times 10^2 \times 2^3 = 80\ V$$