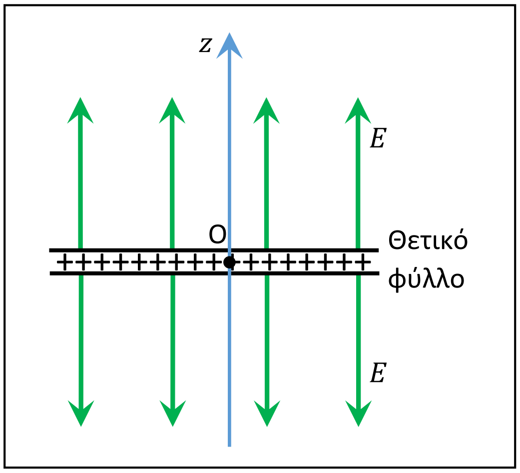
Πρόβλημα 4.9.

Να βρεθεί το δυναμικό $V(z)$ παντού στο χώρο ενός θετικά φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Πάρτε τον άξονα z κάθετα στο φύλλο και θεωρήστε ότι το φύλλο έχει δυναμικό μηδέν.

Λύση:

Έστω ένα φορτισμένο φύλλο όπως στο παρακάτω σχήμα το οποίο βρίσκεται κάθετα στον άξονα z



Όπως είχαμε δει στο Κεφ. 2, το ηλεκτρικό πεδίο ενός φύλλου όπως αυτό που φαίνεται, δίνεται από την Εξ. 2.10 ως εξής:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z > 0 \end{cases}$$

Δηλαδή το πεδίο είναι σταθερό κατά μέτρο αλλά αλλάζει φορά εκατέρωθεν του φύλλου. Για να βρούμε τη συνάρτηση δυναμικού θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 4.9 με το x να αντικαθίσταται από το z, δηλαδή:

$$V(z) = -\int E(z)dz$$

Για το χώρο πάνω από το φύλλο όπου $z > 0$ έχουμε $E = \sigma/2\varepsilon_0$ και έτσι

$$V(z) = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + c_1$$

Για το χώρο πάνω από το φύλλο όπου $z < 0$ έχουμε $E = -\sigma/2\varepsilon_0$ και έτσι

$$V(z) = -\int -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + c_2$$

Μια βολική τιμή του δυναμικού είναι να επιλέξουμε $V = 0$ επάνω στο φύλλο. Τότε αυτομάτως οι δυο σταθερές c_1 και c_2 μηδενίζονται και καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$V(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z < 0 \\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0} z, & z > 0 \end{cases}$$

ή

$$V(z) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} |z|$$

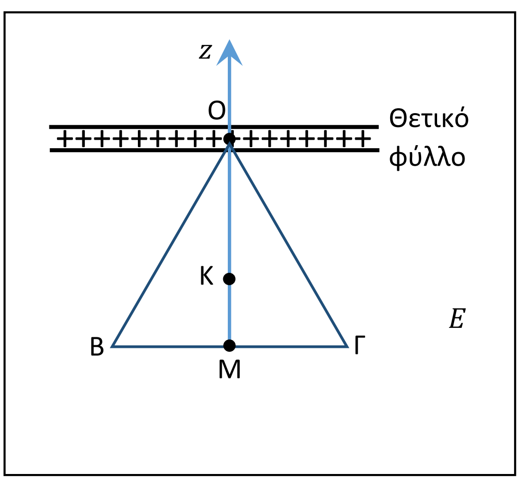
<u>Πρόβλημα 4.10</u>.

Στο προηγούμενο πρόβλημα, ένα ιδεατό ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ πλευράς $a = \sqrt{3}\ m$ "αιωρείται" από το φορτισμένο φύλλο έχοντας το επίπεδό του κάθετο στο επίπεδο του φύλλου, με την μια κορυφή του Ο να βρίσκεται στο επίπεδο του φύλλου στην αρχή των συντεταγμένων και τον άξονα z να τη διχοτομεί, ενώ οι δυο άλλες κορυφές Β και Γ να βρίσκονται κάτω από το φύλλο και συμμετρικά ως προς τον άξονα z. Ένα θετικό φορτίο $3\ \mu C$ αναγκάζεται από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις να κινηθεί από το κέντρο συμμετρίας Κ του τριγώνου έως και το σημείο Β. Να βρεθεί η διαφορά της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μεταξύ των σημείων Κ και Β εάν η επιφανειακή πυκνότητα του φύλλου είναι ίση με $8.85\ nC/m^2$.

<u>Λύση</u>:

Το ισόπλευρο τρίγωνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, το ύψος ΜΟ που είναι και ταυτόχρονα η διαγώνιος της κορυφής Ο, έχει μήκος ίσο με

$$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{3/4}\, a = \sqrt{3/4}\,\sqrt{3} = 3/2\ m$$



Ως γνωστόν, το κέντρο συμμετρίας ενός ισόπλευρου τριγώνου βρίσκεται σε απόσταση $2/3$ της διαγωνίου από την κορυφή που η διαγώνιος αυτή διχοτομεί. Έτσι στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Κ έχει συντεταγμένη $z_K = -2/3\ h$. Αντιθέτως τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένη $z_B = -h$. Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο σημείων, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος είναι ίση με

$$V_B - V_K = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\left(-1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{\sigma h}{6\varepsilon_0}$$

Δηλαδή

$$V_B - V_K = -\frac{8.85 \times 10^{-9}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{3}{2} = -250\ V$$

Τελικά η ζητούμενη διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι σύμφωνα με την Εξ. 4.8 ίση με

$$U_B - U_K = q(V_B - V_K) = -3 \times 10^{-6} \times 250 = -0.75\ mJ$$

Πρόβλημα 5.4.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού παντού στον εσωτερικό χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου (φορτίο/όγκος) ίση με η (να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα του Προβλήματος 3.9).

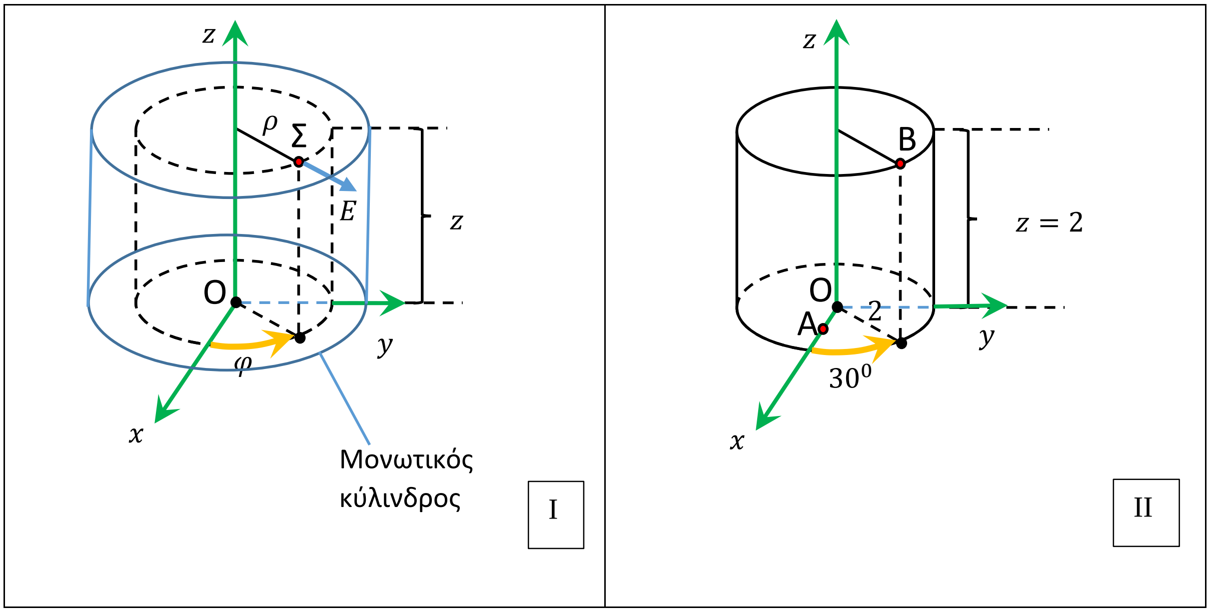
(β) Εάν ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα z και η ακτίνα του κυλίνδρου είναι ίση με $R = 3\ m$, να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β με κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) ίσες με $(1, 0^0, 0)$ και $(2, 30^0, 2)$ αντίστοιχα, όπου οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και οι γωνίες σε μοίρες.

Λύση:

(α) Η λύση του Προβλήματος 3.9 οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$E = \frac{\eta \pi \rho^2 L}{2\pi \varepsilon_0 L \rho} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}\rho$$

που είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον εσωτερικό χώρο ενός κυλίνδρου άπειρου μήκους φορτισμένου ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η, σε απόσταση ρ από τον άξονά του. Η φορά του πεδίου αυτού είναι κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου με κατεύθυνση προς το άπειρο. Εάν τοποθετήσουμε τον άξονα z κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου, όπως στο παρακάτω σχήμα I στα αριστερά, τότε αυτομάτως η απόσταση ρ ενός τυχαίου σημείου Σ από τον άξονα του κυλίνδρου είναι ίση με την πολική ακτίνα, δηλαδή μια από τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι άλλες δυο είναι η γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα και το ύψος z του σημείου Σ από το επίπεδο x-y. Η φορά του E είναι κατά μήκος του ρ προς τα έξω.



Με άλλα λόγια η φορά του E είναι η φορά του μοναδιαίου $\vec{e}_\rho$ που σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μια συνιστώσα, η E_ρ η οποία είναι ίση με την παραπάνω έκφραση. Από την Εξ. 4.7α έχουμε

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0}\rho$$

Ολοκληρώνοντας

$$V(\rho,\varphi,z) = -\frac{\eta}{4\varepsilon_0}\rho^2 + c(\varphi,z)$$

Εν γένει το δυναμικό θα είναι συνάρτηση και των τριών μεταβλητών για αυτό και γράψαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης με αυτό τον τρόπο. Όμως αφού οι άλλες δυο συνιστώσες τογ E είναι μηδενικές, τότε από τις Εξ. 4.7β και 4.7γ έχουμε $\partial V/\partial\varphi = 0$ και $\partial V/\partial z = 0$ και άρα η c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τα σημεία A και B φαίνονται στο παραπάνω σχήμα II (στα δεξιά) και έχουν $\rho_A = 1$ και $\rho_B = 2$ αντίστοιχα επομένως η διαφορά δυναμικού ισούται με

$$V_B - V_A = -\frac{\eta}{4\varepsilon_0}(\rho_B^2 - \rho_A^2) = -\frac{5\times 10^{-6}}{4\times 8.85\times 10^{-12}}(2^2 - 1^2) = 1.41\times 10^5\ V$$

<u>Πρόβλημα 5.13</u>.

Η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού ενός συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την έκφραση

$$V(r,\theta,\varphi) = -E_A R cos\theta \left[\frac{r}{R} + A\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$

όπου τα A, E_A και R είναι σταθερές με το A να είναι καθαρός αριθμός, το E_A να έχει μονάδες ηλεκτρικού πεδίου και το R να έχει μονάδες μήκους. Να βρεθούν

(α) Η τιμή του A εάν επιβάλουμε στο δυναμικό να είναι μηδέν επάνω στην επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $r = R$ (σφαίρα)

(β) Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες

(γ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στον άξονα z και σε απόσταση $2R$ από την αρχή των συντεταγμένων.

(δ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο επίπεδο x-y και σε απόσταση $R/2$ από την αρχή των συντεταγμένων.

<u>Λύση</u>:

(α) Αφού $V = 0$ επάνω στην επιφάνεια $r = R$ (σφαίρα ακτίνας R), τότε έχουμε

$$0 = -E_A R cos\theta \left[\frac{R}{R} + A\left(\frac{R}{R}\right)^2\right]$$

που ικανοποιείται για $A = 1$.

(β) Από τις Εξισώσεις 5.10

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_A R cos\theta \left[\frac{1}{R} - 2A\frac{R^2}{r^3}\right] = E_A R cos\theta \left[\frac{1}{R} + 2\frac{R^2}{r^3}\right]$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_A R sin\theta \left[\frac{1}{R} + A\frac{R^2}{r^3}\right] = -E_A R sin\theta \left[\frac{1}{R} - \frac{R^2}{r^3}\right]$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

(γ) Επάνω στον άξονα z ισχύει $\theta = 0$ οπότε αυτομάτως $E_\theta = 0$ ενώ η r-συνιστώσα γίνεται

$$E_r = E_A R \left[\frac{1}{R} + 2\frac{R^2}{8R^3}\right] = \frac{5}{4}E_A$$

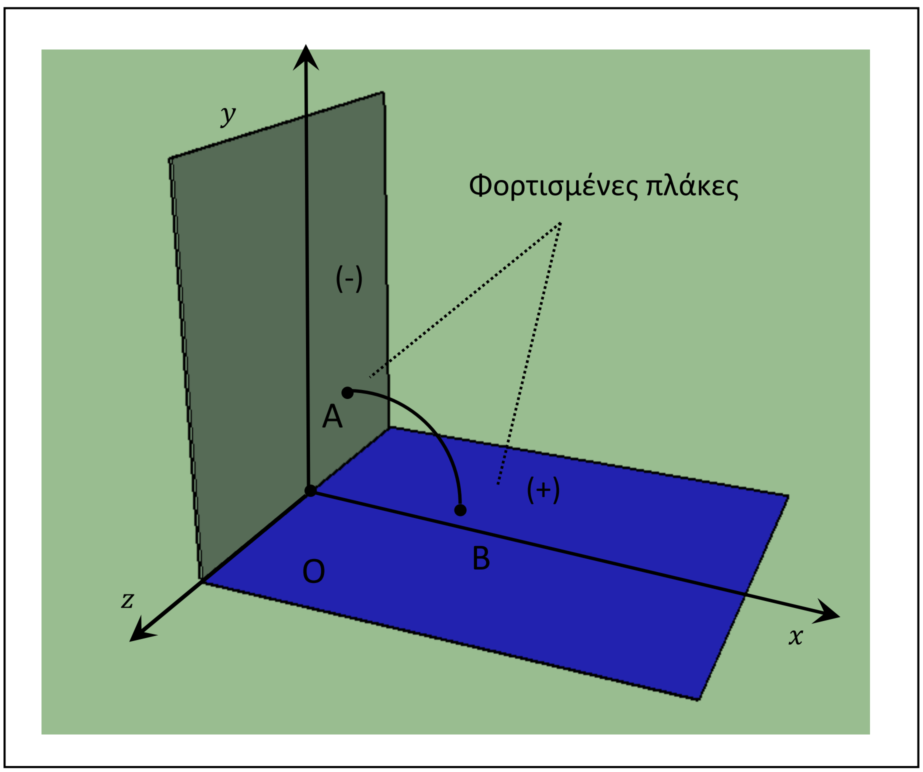
Αφού αυτή είναι η μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα του πεδίου, τότε ταυτίζεται και με το μέτρο του.

(δ) Επάνω στον επίπεδο $x - y$ ισχύει $\theta = \pi/2$ οπότε αυτομάτως $E_r = 0$ ενώ η θ-συνιστώσα γίνεται

$$E_\theta = -E_A R \left[\frac{1}{R} - \frac{8R^2}{R^3}\right] = 7E_A$$

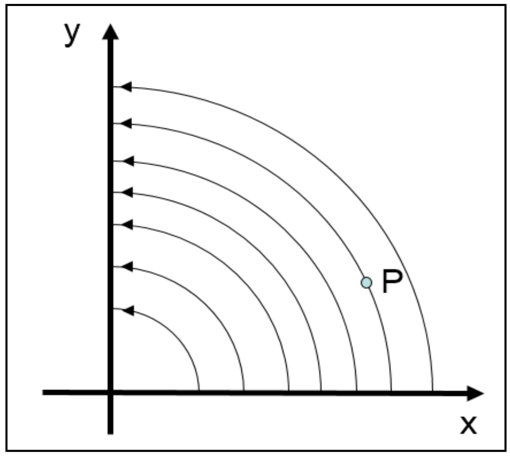
Αφού αυτή είναι η μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα του πεδίου, τότε ταυτίζεται και με το μέτρο του.

<u>Πρόβλημα 5.14</u>. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δυο ομοιόμορφα φορτισμένες <u>αγώγιμες</u> πλάκες απείρων διαστάσεων και αμελητέου πάχους που βρίσκονται κάθετα μεταξύ τους, η θετική στο επίπεδο $x-z$ και η αρνητική στο επίπεδο $y-z$ (εξυπακούεται ότι οι δυο πλάκες δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους στον άξονα z, δηλαδή υπάρχει μικρό διάκενο εκεί). Ζητούνται τα εξής: (α) Να σχεδιασθούν οι δυναμικές γραμμές του συστήματος εάν γνωρίζετε ότι το πεδίο είναι παντού κατά μήκος ενός από τα μοναδιαία διανύσματα στις κυλινδρικές συντεταγμένες. (β) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες. Χάριν απλότητας, εργαστείτε σε δισδιάστατη απεικόνιση στο επίπεδο $x-y$ (οπότε οι ισοδυναμικές επιφάνειες αναπαρίστανται ως τομές). (γ) Θεωρώντας ότι το δυναμικό είναι συνάρτηση των κυλινδρικών συντεταγμένων, βρείτε τη συνάρτηση αυτή $V(\rho,\varphi,z)$ εάν γνωρίζετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω σε οποιοδήποτε τόξο κύκλου 90^0, όπως το ΑΒ στο σχήμα, με αρχή και πέρας στις δυο πλάκες και κέντρο επάνω στον άξονα z και ότι η θετική πλάκα είναι γειωμένη και η αρνητική κρατιέται σε δυναμικό $-10\ V$.



<u>Λύση</u>:

α) Το πεδίο πρέπει να είναι κάθετο στην επιφάνεια των αγωγών και επομένως οι δυναμικές γραμμές οι οποίες έχουν αφετηρία τη θετική και κατάληξη την αρνητική πλάκα θα είναι κάπως έτσι:

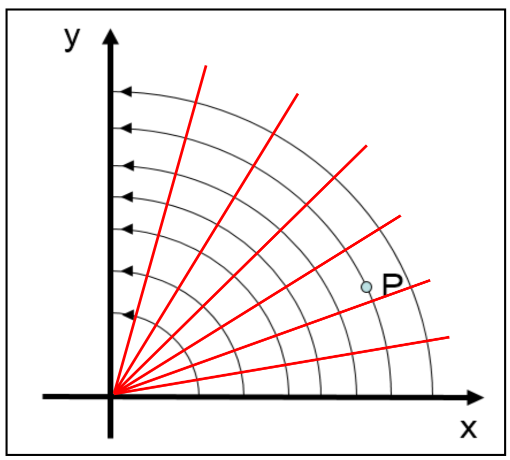


Αφού το E είναι κατά μήκος ενός μοναδιαίου, τότε αναγκαστικά θα είναι κατά μήκος του $\vec{e}_\varphi$ και έτσι

$$\vec{E} = E(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi$$

Έτσι το E έχει μόνο E_φ συνιστώσα.

β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες στις Δ.Γ. και επομένως θα είναι κάπως έτσι:



Δηλαδή είναι επίπεδα που περνούν από τον άξονα z.

γ) Από τις σχέσεις $E - V$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -E_\rho = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται από το ρ. Ομοίως

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = 0$$

Άρα το V δεν εξαρτάται ούτε από το z. Αντιθέτως

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_{\varphi}(\rho,\varphi,z) => \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\rho E_{\varphi}(\rho,\varphi,z)$$

Αφού το V δεν εξαρτάται από το ρ τότε πρέπει το E_{φ} να είναι ανάλογο του $1/\rho$ (για να αναιρεθεί η εξάρτηση του ρ). Επίσης το V δεν εξαρτάται από το z και άρα και το E_{φ} δεν πρέπει να εξαρτάται από το z. Επομένως

$$E_{\varphi} = \frac{1}{\rho} f(\varphi)$$

Αφού το πεδίο δεν μεταβάλλεται επάνω στο τόξο AB, τότε δεν εξαρτάται από την γωνία φ και άρα

$$E_{\varphi} = \frac{c}{\rho}$$

όπου c =σταθερά. Επομένως

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{c}{\rho} => \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c => V = -c\varphi + d$$

όπου d =σταθερά. Από τις συνοριακές συνθήκες $V(0) = 0 => d = 0$ και $V(\pi/2) = -10$ δηλαδή

$$-10 = -\frac{c\pi}{2} => c = \frac{20}{\pi}$$

Τελικά

$$V = -\frac{20}{\pi}\varphi$$