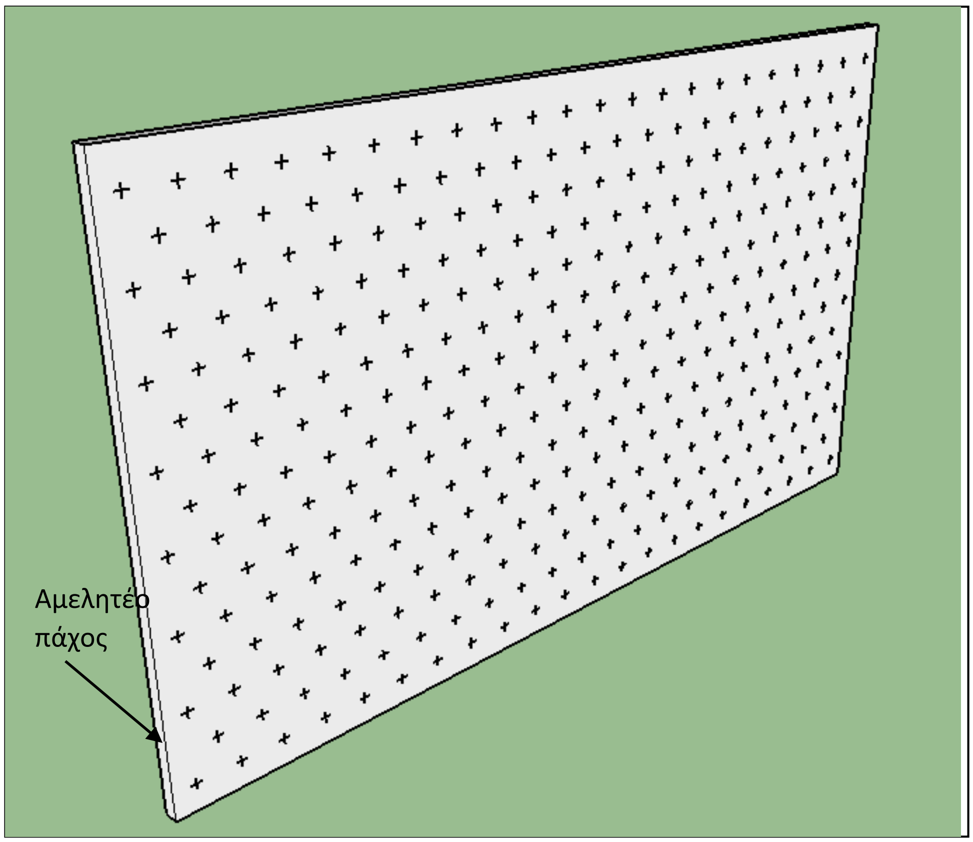
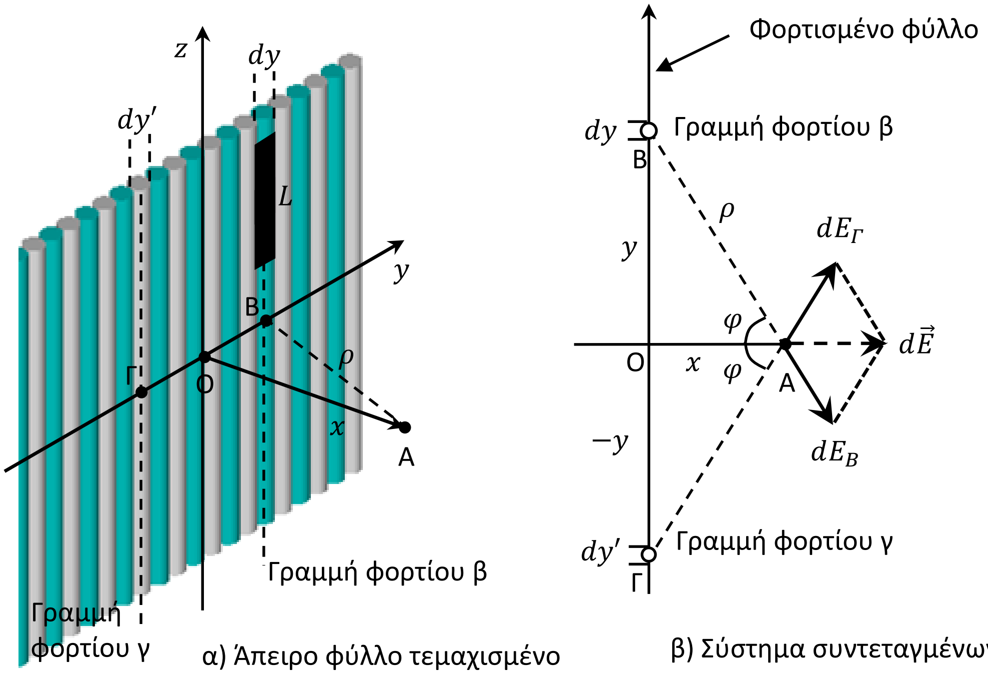
1) Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου φύλλου απείρων διαστάσεων

Σε αυτό το εδάφιο θα υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο ενός φορτισμένου λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων και αμελητέου πάχους όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχήμα 2.7 παρακάτω, το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας).



Σχήμα 2.8

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.9α (στα αριστερά), "τεμαχίζουμε" το φύλλο σε ένα άπειρο πλήθος λεπτών στύλων απειροστού πάχους ο καθένας, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά ως γραμμές φορτίου και έτσι να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της Εξ. 2.6 παραπάνω. Τοποθετούμε τον άξονα z κατά μήκος των γραμμών φορτίων, όπως κάναμε και στο προηγούμενο εδάφιο και τον άξονα y έτσι ώστε να διαπερνάει το φύλλο, κάθετα προς τις γραμμές φορτίου που τεμαχίσαμε. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο Α που απέχει απόσταση x από την αρχή των συντεταγμένων Ο. Έτσι θα ολοκληρώσουμε επάνω σε όλες τις γραμμές φορτίου δηλαδή κατά μήκος του άξονα y.



α) Άπειρο φύλλο τεμαχισμένο σε γραμμές

β) Σύστημα συντεταγμένων σε κάτοψη

Σχήμα 2.9

Για να χρησιμοποιήσουμε όμως την Εξ. 2.6, πρέπει να υπολογίσουμε την γραμμική πυκνότητα της κάθε γραμμής φορτίου, δεδομένου ότι στο παρόν πρόβλημα μας δίνεται μόνο η επιφανειακή πυκνότητα. Για το σκοπό αυτό θωρήστε τη γραμμή φορτίου β στο Σχήμα 2.9α (στα αριστερά) η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Β και θεωρήστε ένα μικρό τμήμα της μήκους L. Το στοιχειώδες εμβαδό (κάθετα προς το φύλλο) αυτού του τμήματος είναι ίσο με $dA = Ldy$ (μήκος × πλάτος) και άρα από τον ορισμό του σ περιέχει φορτίο $dq = \sigma dA = \sigma Ldy$. Επομένως η γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με

$$d\lambda = \frac{dq}{L} = \sigma dy$$

Επειδή η κατανομή φορτίου είναι ομοιογενής, η γραμμική πυκνότητα που υπολογίσαμε για το τμήμα μήκους L της γραμμής φορτίου β, είναι η ίδια για όλη τη γραμμή. Σύμφωνα λοιπόν με την Εξ. 2.6, αυτή η γραμμή φορτίου δημιουργεί στο Α ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο ίσο με

$$dE_B = \frac{2k}{\rho} d\lambda$$

όπου ρ είναι η απόσταση ΒΑ από τη γραμμή φορτίου β έως το σημείο παρατήρησης. Θεωρήστε τώρα την κάτοψη στο Σχήμα 2.9β (στα δεξιά). Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, το $d\vec{E}_B$ είναι κάθετο προς τη γραμμή φορτίου και άρα ανήκει στην σελίδα του σχήματος αφού η γραμμή τέμνει το Σχήμα 2.9β κάθετα, με φορά προς το άπειρο (απομακρυνόμενο από τη γραμμή). Επομένως το $d\vec{E}_B$ βρίσκεται επάνω στην προέκταση της ευθείας ΒΑ. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τα ίδια βήματα της απόδειξης του προηγούμενου εδαφίου, δηλαδή θα θεωρήσουμε την γραμμή φορτίου η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο Γ και η οποία ισαπέχει από τη γραμμή β ως προς την αρχή Ο. Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}_{\Gamma}$ έχει ίσο μέτρο με το $d\vec{E}_B$ και έτσι λόγω συμμετρίας το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE είναι κάθετο στον άξονα y δηλαδή κάθετα στο φύλλο (κατά μήκος του άξονα x). Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.6β και 2.9β βλέπουμε ότι οι γεωμετρίες (για την ολοκλήρωση) είναι οι ίδιες και για τα δυο προβλήματα, με την μόνη διαφορά ότι εδώ έχουμε άλλο τύπο για το dE_B και ότι το r έχει αντικατασταθεί από το ρ και η γωνία θ από την φ. Έτσι όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε να γράψουμε τις εξής απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις

$$\rho cos\varphi = x$$

$$y = xtan\varphi => dy = xd\varphi/cos^2\varphi$$

Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο dE λόγω συμμετρίας είναι ίσο με

$$dE = dE_B cos\varphi + dE_{\Gamma} cos\varphi = 2dE_B cos\varphi$$

Η ολοκλήρωση γίνεται

$$E = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} 2dE_B cos\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{4k}{\rho} cos\varphi d\lambda = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{cos\varphi}{\rho} dy$$

ή

$$E = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{cos\varphi}{x} cos\varphi \frac{x}{cos^2\varphi} d\varphi = 4k\sigma \int_{\varphi=0}^{\pi/2} d\varphi = 2k\pi\sigma$$

<u>Σημείωση</u>: Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιείται μια άλλη σταθερά ε_0 του ηλεκτρισμού αντί της k που είχαμε μέχρι τώρα, η οποία ονομάζεται "διηλεκτρική σταθερά του κενού" και η οποία σχετίζεται με την σταθερά k ως εξής

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12}\ S.I.$	Διηλεκτρική σταθερά του κενού	2.8

Συναρτήσει αυτής της σταθεράς, το παραπάνω αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης γράφεται πιο απλά ως

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

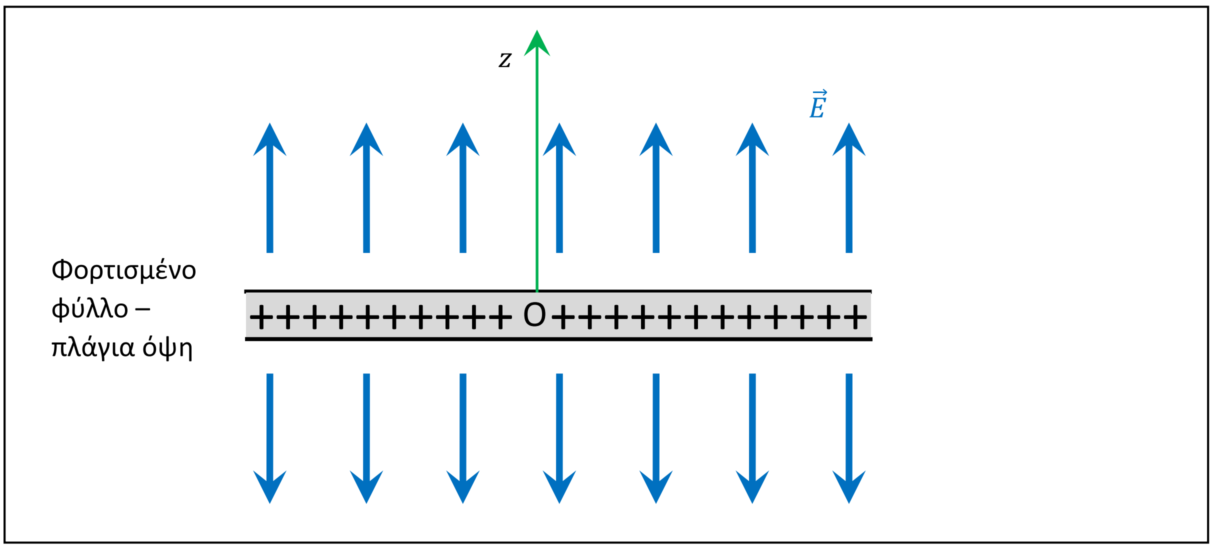
Στην παραπάνω ανάλυση στο Σχήμα 2.9β, θεωρήσαμε το $\vec{E}$ μόνο από την δεξιά μεριά του φύλλου. Εάν εργαζόμασταν και στην αριστερή μεριά του, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο αλλά με την αντίθετη φορά δηλαδή το $\vec{E}$ θα ήταν προς τα αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι το E αλλάζει φορά εκατέρωθεν του φύλλου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.10 όπου το φύλλο είναι οριζόντιο. Επομένως είναι πιο σωστό να γράψουμε ότι

$\lvert E \rvert = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.9

θεωρώντας βέβαια ότι $\sigma > 0$. Μπορούμε να γράψουμε το $\vec{E}$ και διανυσματικώς. Εάν π.χ. ο άξονας z στο Σχήμα 2.10 είναι κάθετος στο φύλλο με την αρχή των συντεταγμένων Ο επάνω στο φύλλο τότε:

$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z, & z > 0 \end{cases}$	Ηλεκτρικό πεδίο λεπτού φύλλου απείρων διαστάσεων	2.10

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει μια ιδιαιτερότητα, δεν εξαρτάται καθόλου από την απόσταση, μόνο από την πυκνότητα του φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι είναι παντού σταθερό. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι το φύλλο είναι απείρων διαστάσεων. Σε πραγματικές περιπτώσεις όπου ένα φορτισμένο φύλλο έχει πεπερασμένες διαστάσεις, το πεδίο είναι όντως πολύ σταθερό κοντά στο φύλλο, αλλά φυσικά φθίνει με την απόσταση μακριά από αυτό. Η κατεύθυνση του E είναι κάθετη στο φύλλο, απομακρυνόμενο από αυτό για θετικό σ ενώ τείνει προς αυτό για αρνητικό σ. Σε κάθε πλευρά το E είναι αρκετά ομοιογενές όταν οι διαστάσεις του φύλλου είναι μεγάλες.



Σχήμα 2.10

<u>Παράδειγμα</u>: Ένα φορτισμένο φύλλο διαστάσεων 6 $cm \times 5$ cm έχει φορτίο $+12\mu C$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση 2 mm από το φύλλο.

<u>Λύση</u>: Η απόσταση των 2 mm είναι σχετικά μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις του φύλλου και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.9 που ισχύει για φύλλο απείρων διαστάσεων αφού όταν είμαστε πολύ κοντά στο φύλλο, αυτό φαίνεται τεράστιο. Η πυκνότητα φορτίου ισούται εξ' ορισμού με το φορτίο Q του φύλλου προς το εμβαδό του A και έτσι η Εξ. 2.9 γίνεται:

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$

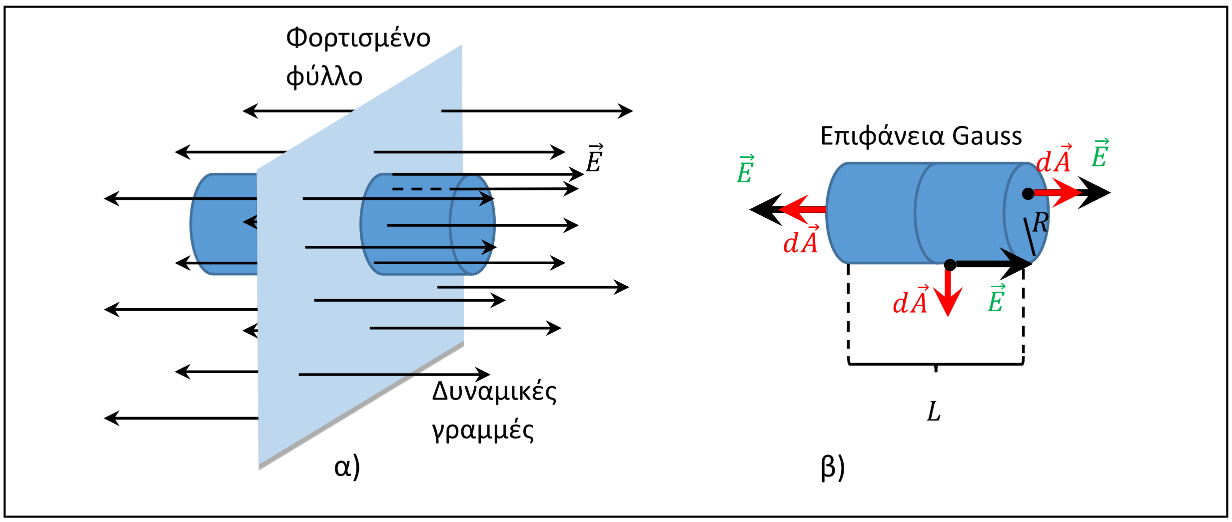
Το εμβαδό ισούται με $A = 0.06 \times 0.05 = 3 \times 10^{-3} m^2$ ενώ το φορτίο ισούται με $Q = 12 \times 10^{-6} C$ και η σταθερά με $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ S.I. Επομένως

$$E = \frac{1}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times \frac{12 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} = 2.25 \times 10^{8}\ N/C$$

2) Να αποδειχθεί η Εξ. 2.9 με τη βοήθεια του νόμου του Gauss

Λύση:

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12α, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο κάθετο στο φύλλο με τυχαία ακτίνα R και τυχαίο μήκος L. Είχαμε δει παραπάνω ότι οι δυναμικές γραμμές του φύλλου είναι κάθετες στο φύλλο, παράλληλες και ισαπέχουσες μεταξύ τους, με αντίθετη φορά εκατέρωθεν του φύλλου.



Σχήμα 3.12

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα σε τρία μέρη, δυο επάνω στις βάσεις (έστω B_1 και B_2) και ένα επάνω στην παράπλευρη επιφάνεια (έστω Π).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Στο Σχήμα 3.12β δείχνουμε τον γωνιακό προσανατολισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε σχέση με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και στα τρία τμήματα κυλίνδρου. Σε αντίθεση με το προηγούμενο πρόβλημα, στις δυο βάσεις τώρα το $\vec{E}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ (θυμηθείτε ότι το κάθετο διάνυσμα έχει φορά πάντοτε προς τα έξω της επιφάνειας) και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$ ενώ στην παράπλευρη επιφάνεια το $\vec{E}$ είναι κάθετο με το διάνυσμα $d\vec{A}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\int_{B_1} EdA + \int_{B_2} EdA + 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Είδαμε ότι για το φύλλο η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι σταθερή, και άρα και το E είναι σταθερό και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος (το $\vec{E}$ αλλάζει κατά φορά εκατέρωθεν του φύλλου αλλά όχι κατά μέτρο και άρα το E είναι το ίδιο και στις δυο μεριές):

$$E\int_{B_1} dA + E\int_{B_2} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό, τότε το κάθε ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της κάθε βάσης που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο πR^2. Επομένως

$$2E\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q. Κοιτώντας στο Σχήμα 3.12 στα αριστερά, αυτό το περικλειόμενο φορτίο είναι "παγιδευμένο" στην τομή του κυλίνδρου με το φύλλο που είναι ένας κύκλος με εμβαδό ίσο με αυτό της βάσης πR^2. Αφού η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του φύλλου είναι σ, τότε $Q = \sigma\pi R^2$ και έτσι

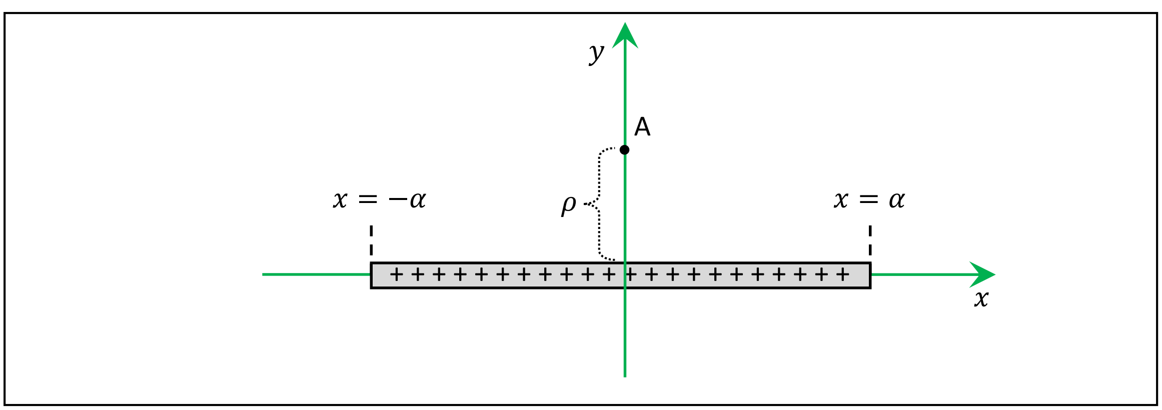
$$2E\pi R^2 = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό της Εξίσωσης 2.7!

3) Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο A του παρακάτω σχήματος με συντεταγμένη $(0, \rho)$ λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που βρίσκεται επάνω στον άξονα x από το $x = -\alpha$ έως το $x = \alpha$ εάν η γραμμική πυκνότητα του φορτίου της είναι ίση με λ.

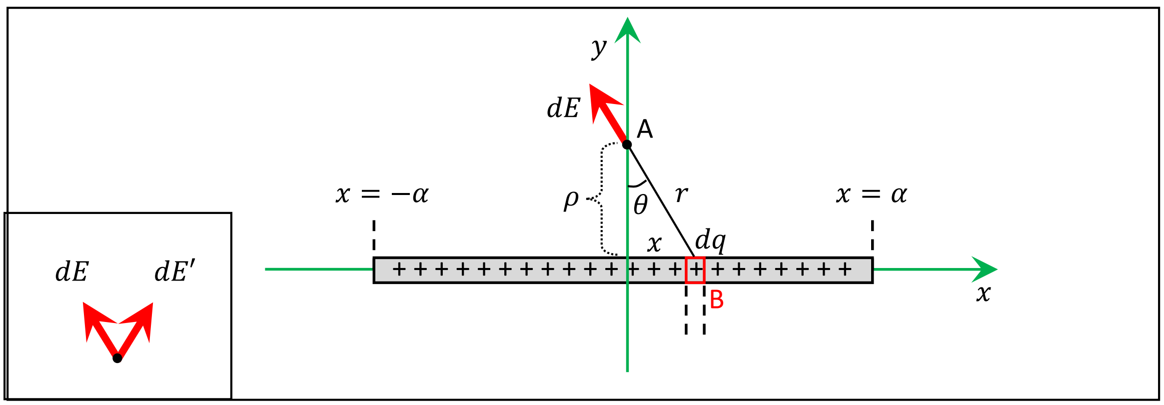


<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, "τεμαχίζουμε" τη ράβδο σε απειροστά κομμάτια. Έστω ένα τέτοιο κομμάτι απειροστού εύρους dx στο σημείο Β της ράβδου με συντεταγμένη x το οποίο απέχει απόσταση r από το σημείο Α. Το απειροστό αυτό κομμάτι θα περιέχει απειροστό φορτίο ίσο με $dq = \lambda dx$ και έτσι θα παράγει στο σημείο Α ένα απειροστό πεδίο ίσο με

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\lambda\frac{dx}{r^2}$$

Η φορά του dE φαίνεται στο Σχήμα. Το dE μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες x και y. Προσέξτε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη συμμετρικά επάνω στον άξονα x και έτσι για κάθε σημείο Β υπάρχει και το συμμετρικό του σημείο, έστω Β', το οποίο θα ισαπέχει από το Β και θα παράγει πεδίο dE' ίσου μέτρου αλλά διαφορετικής φοράς προς τα πάνω και δεξιά, όπως φαίνεται και στο ένθετο του σχήματος. Έτσι, όταν αθροίσουμε την συνεισφορά του κάθε κομματιού της ράβδου, οι οριζόντιες συνιστώσες του ολικού πεδίου αλληλο-αναιρούνται σε ζεύγη και έτσι το πεδίο θα έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Άρα από τη συνεισφορά του σημείου Β θα κρατήσουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα $dE_y = dEcos\theta$



Ολοκληρώνοντας όλες τις συνεισφορές οδηγεί στο

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} dE_y = \int_{x=-a}^{x=a} dEcos\theta = k\lambda\int_{x=-a}^{x=a}\frac{dx}{r^2}cos\theta$$

Μέσα στο ολοκλήρωμα έχουμε τρεις μεταβλητές, τα θ, x και r. Πρέπει να τα εκφράσουμε όλα συναρτήσει μιας μεταβλητής αλλά και συναρτήσει του δεδομένου ρ. Επιλέγουμε ως κοινή μεταβλητή τη γωνία θ. Από απλή τριγωνομετρία στο παραπάνω σχήμα έχουμε

$$tan\theta = \frac{x}{\rho} => x = \rho tan\theta => dx = \frac{\rho}{cos^2\theta}d\theta$$

$$rcos\theta = \rho => \frac{1}{r} = \frac{cos\theta}{\rho}$$

Έστω θ_αη μέγιστη γωνία που αντιστοιχεί στα όρια $x = \pm a$ της ράβδου. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E = k\lambda\int_{\theta=-\theta_\alpha}^{\theta_\alpha}\frac{\rho}{cos^2\theta}d\theta\frac{cos^2\theta}{\rho^2}cos\theta = \frac{k\lambda}{\rho}[cos\theta]_{\theta=-\theta_\alpha}^{\theta_\alpha} = \frac{2k\lambda}{\rho}cos\theta_\alpha$$

Από απλή τριγωνομετρία μπορούμε να δούμε ότι

$$cos\theta_{\alpha} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

Τελικά

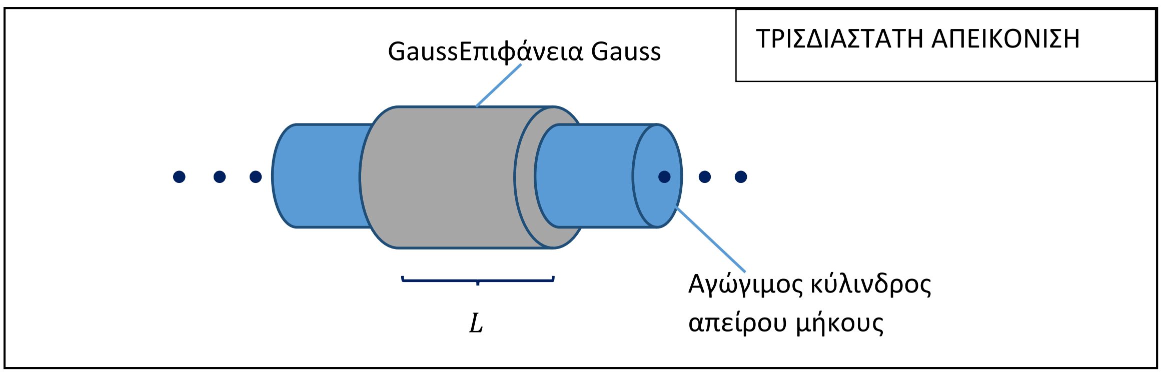
$$E = \frac{2k\lambda}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

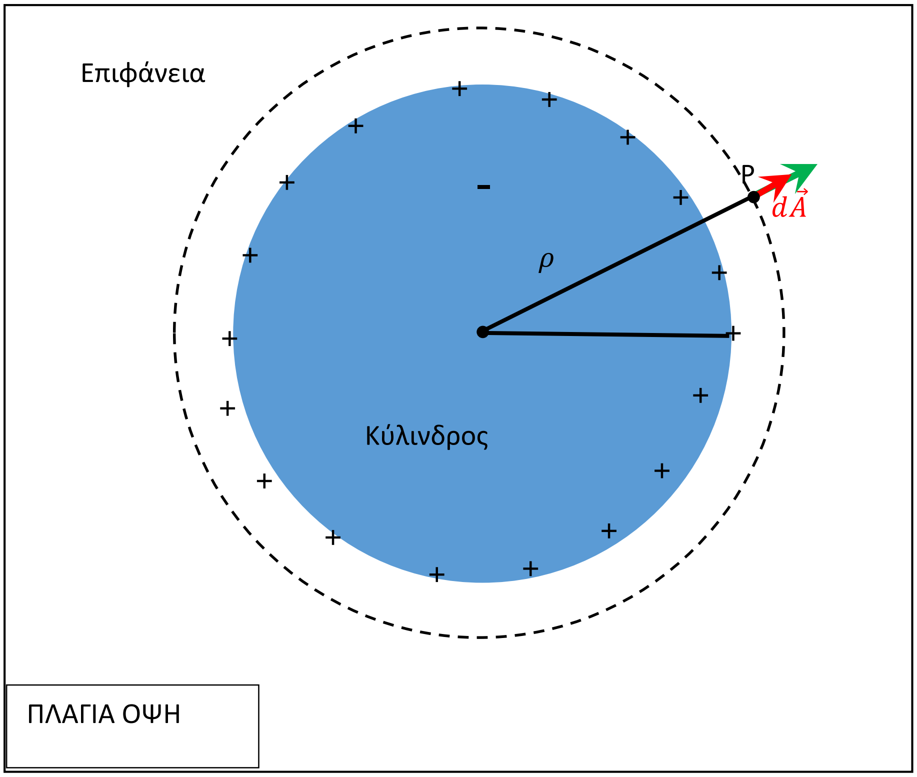
(προσέξτε ότι αφού το λ είναι φορτίο ανά μονάδα μήκους, το παραπάνω E έχει τις σωστές μονάδες).

4) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος)

<u>Λύση</u>:

Θα εργαστούμε πρώτα στο εξωτερικό του κυλίνδρου. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω δυο σχήματα, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho > R$ και μήκους L, ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο.





Οι δυναμικές γραμμές είναι παρόμοιες με αυτές που είδαμε στο υπο-εδάφιο "Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων", δηλαδή δισδιάστατες ακτινικές από την επιφάνεια του κυλίνδρου προς το άπειρο (σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου). Ακριβώς όπως δουλέψαμε με την γραμμή φορτίου, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και + B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi} EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ ($\beta\acute{\alpha}\sigma\eta \times \acute{\upsilon}\psi o\varsigma$). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q. Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του αγώγιμου κυλίνδρου, ο αντίστοιχος περικλειόμενος όγκος του αγωγού ισούται με

$$V = \pi R^2 L$$

Δεδομένου ότι η πυκνότητα φορτίου η είναι εξ' ορισμού φορτίο ανά όγκο, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \eta V = \eta\pi R^2 L$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\eta\pi R^2 L}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0 \rho}$$

Στο εσωτερικό του αγωγού, η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η ίδια ακριβώς, με τη διαφορά τώρα ότι η επιφάνεια Gauss περικλείει λιγότερο φορτίο και στον υπολογισμό του περικλειόμενου όγκου V' πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα ρ της επιφάνειας Gauss και όχι του αγωγού R, αφού η επιφάνεια αυτή είναι εξ' ολοκλήρου μέσα στον αγωγό. Έτσι

$$V' = \pi\rho^2 L$$

Το αντίστοιχο περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q' = \eta V' = \eta\pi\rho^2 L$$

Έτσι από την

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

παίρνουμε

$$2E\pi\rho L = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\eta\pi\rho^2 L}{\varepsilon_0}$$

οπότε

$$E = \frac{\eta\rho}{2\varepsilon_0}$$