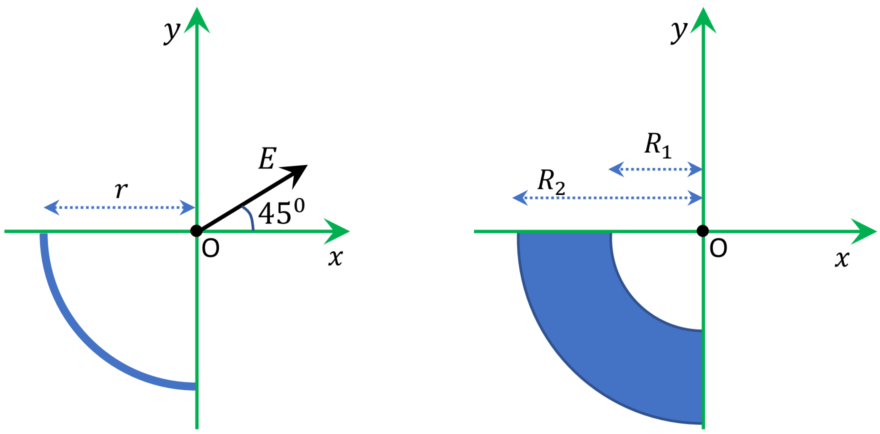
ΘΕΜΑ 1. Το παρακάτω λεπτό τόξο στα αριστερά του σχήματος σε μορφή τεταρτοκυκλίου ακτίνας r, φέρει φορτίο q ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος του, το οποίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο Ο των αξόνων με μέτρο

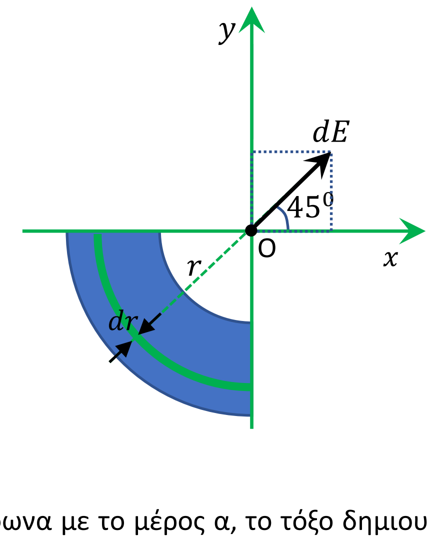
$$E = 2\sqrt{2}\frac{kq}{\pi r^2}$$

και γωνία 45^0 ως προς τον άξονα x. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο του παρακάτω τέταρτου ενός λεπτού κυκλικού δίσκου (στα δεξιά του σχήματος) με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 στο κέντρο Ο των αξόνων εάν αυτός φέρει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του.



Λύση:

"Τεμαχίζουμε" το δεδομένο σχήμα σε λεπτά τόξα. Έστω ένα τέτοιο τόξο στο παρακάτω σχήμα με τυχαία ακτίνα r, στοιχειώδες πάχος dr και στοιχειώδες φορτίο dq.



Σύμφωνα με το μέρος α, το τόξο δημιουργεί πεδίο dE το οποίο σχηματίζει γωνία 45^0 ως προς τον άξονα x ενώ το μέτρο του είναι ίσο με

$$dE = 2\sqrt{2}\frac{kdq}{\pi r^2}$$

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε το ολικό πεδίο από $r = R_1$ έως $r = R_2$:

$$E = \frac{2\sqrt{2}k}{\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dq}{r^2}$$

Εάν το τόξο το θεωρήσουμε ως μια στοιχειώδη επιφάνεια, τότε αυτό έχει μήκος $2\pi r/4 = \pi r/2$ και πλάτος dr οπότε το εμβαδό του dA είναι ίσο με $\pi r dr/2$. Αφού η κατανομή είναι ομοιογενής, μπορούμε να πούμε ότι το φορτίο που υπάρχει σε μια επιφάνεια, είναι ανάλογη με το εμβαδό της δηλαδή

$$dq = cdA = \frac{c\pi R^2}{4}$$

όπου c είναι μια σταθερά. Με την ίδια λογική, εάν A είναι το εμβαδό A του δεδομένου σχήματος, μπορούμε να γράψουμε

$$Q = cA$$

Έτσι, εάν πάρουμε λόγους για το στοιχειώδες τόξο και το όλο σχήμα

$$\frac{dq}{Q} = \frac{\pi r dr}{2A}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το A. Το δεδομένο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η αφαίρεση δυο τετάρτων δυο διαφορετικών δίσκων, ενός με ακτίνα R_1 και ενός με ακτίνα R_2 και επομένως

$$A = \frac{1}{4}\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

και ο παραπάνω λόγος γίνεται

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2rdr}{{R_2}^2 - {R_1}^2}$$

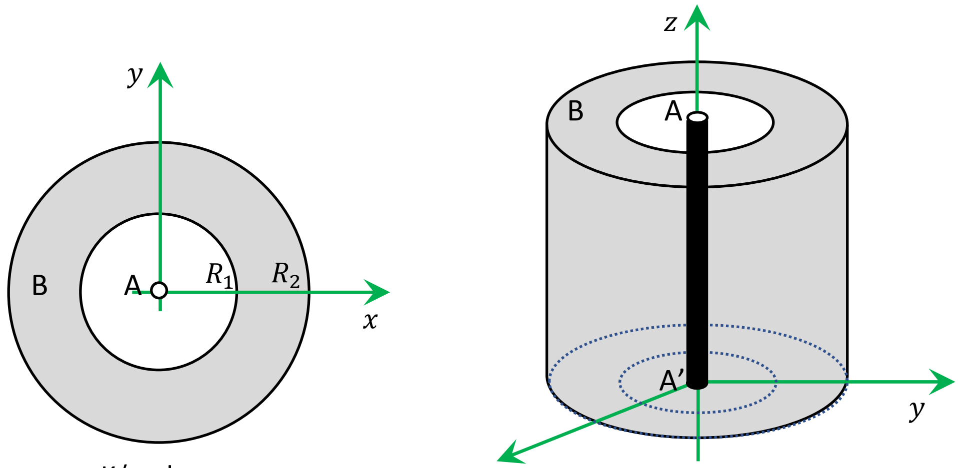
Επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$E = \frac{4\sqrt{2}kQ}{\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

ή

$$E = \frac{4\sqrt{2}kQ}{\pi({R_2}^2 - {R_1}^2)} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

ΘΕΜΑ 2. Στο παρακάτω σχήμα, ένας πολύ λεπτός συμπαγής κύλινδρος ΑΑ' μήκους L ο οποίος φέρει ομοιόμορφο φορτίο $+Q$, έχει τοποθετηθεί επάνω στον άξονα z με το κάτω του άκρο Α' να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Στον ίδιο χώρο με τον ΑΑ' τοποθετείται και ένας <u>αφόρτιστος</u> μεταλλικός σωλήνας Β μήκους L, με εσωτερική ακτίνα R_1, εξωτερική R_2 (συμπαγής μεταξύ των δυο ακτίνων) με τον άξονά του επάνω στον άξονα z και την κάτω του βάση επάνω στο επίπεδο x-y. (α) Σχεδιάστε <u>παντού</u> στο χώρο την κατανομή του ηλεκτρικού <u>φορτίου</u> (β) Στο ίδιο σχήμα σχεδιάστε και τις δυναμικές γραμμές εάν δεχθούμε προσεγγιστικά ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν έχει z-συνιστώσα, δηλαδή το $\vec{E}$ είναι παντού <u>παράλληλο</u> με το επίπεδο x-y (γ) Πάρτε μια κατάλληλη επιφάνεια Gauss τόσο μέσα στο σωλήνα (στο συμπαγές τμήμα του) όσο και στον εξωτερικό του χώρο και υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε αυτούς τους δυο χώρους (όχι στον εσωτερικό κενό χώρο που βρίσκεται ο ΑΑ').

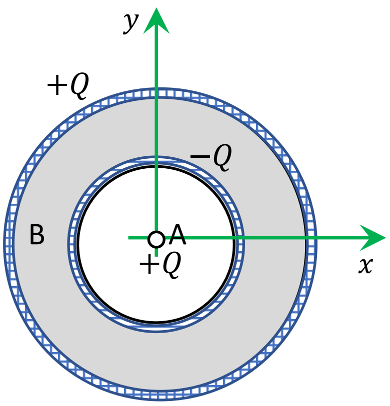


Κάτοψη

3-Διάστατη Αναπαράσταση

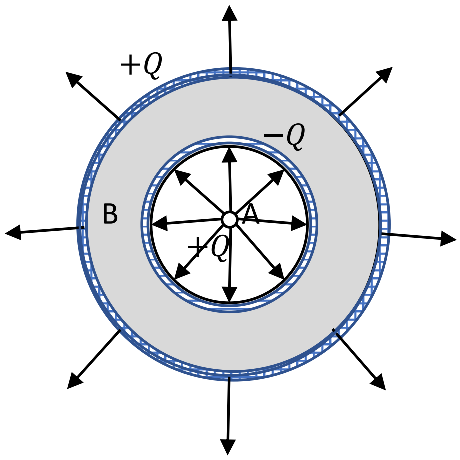
<u>Λύση</u>:

(α) Το φορτίο $+Q$ του ΑΑ' επάγει ίσο και αντίθετο φορτίο $-Q$ στην εσωτερική επιφάνεια του Β και αφού αυτός είναι συνολικά αφόρτιστος, αυτομάτως εμφανίζεται ίσο και αντίθετο φορτίο $+Q$ στην εξωτερική του επιφάνεια. Έτσι η κατανομή του φορτίου είναι όπως στο ακόλουθο σχήμα:

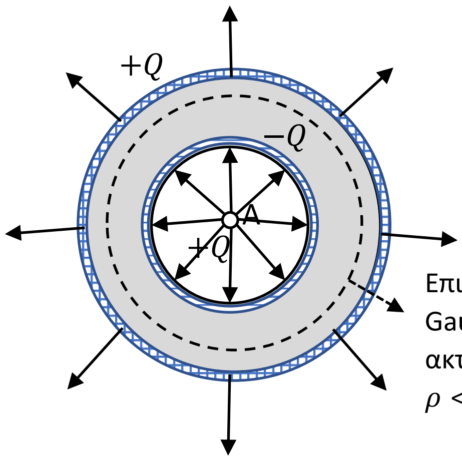


Κάτοψη

(β) Οι δυναμικές γραμμές είναι ακτινικές στο εσωτερικό του σωλήνα με φορά από το ΑΑ' στην εσωτερική επιφάνεια του Β. Δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές στο εσωτερικό του σωλήνα (αφού στο εσωτερικό των αγωγών ισχύει $E = 0$). Στο εξωτερικό του σωλήνα και πάλι οι δυναμικές γραμμές είναι ακτινικές με κατεύθυνση προς το άπειρο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



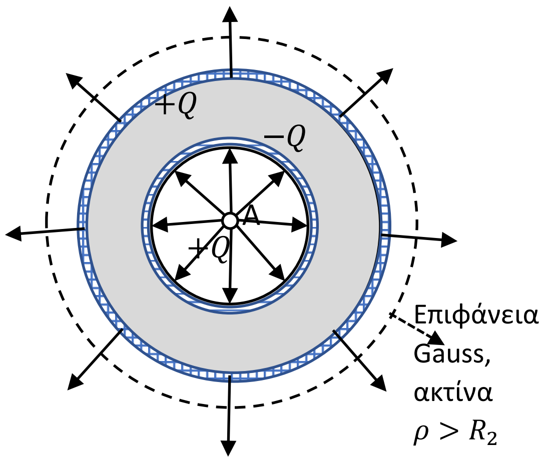
(γ) Στο εσωτερικό του σωλήνα διαλέγουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους L (κάθετα στην σελίδα), με ακτίνα $\rho < R_2$, όπως στο παρακάτω σχήμα, με τον άξονά της επάνω στον άξονα z και την κάτω του βάση να εφάπτεται στο επίπεδο x-y.



Ο νόμος του Gauss είναι ο εξής

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0}$$

όπου Q_π είναι το περικλειόμενο φορτίο το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι μηδέν $Q_\pi = +Q - Q$ και επομένως $E = 0$ στο εσωτερικό του σωλήνα όπως αναμένεται. Αντιθέτως εάν επιλέξουμε μια παρόμοια επιφάνεια Gauss στον εξωτερικό χώρο με ακτίνα $\rho > R_2$, όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε το περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με $Q_\pi = +Q - Q + Q = +Q$



Ο νόμος του Gauss γράφεται ως εξής

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου τα B_1 και B_2 είναι οι δυο βάσεις του κυλίνδρου και Π η παράπλευρη επιφάνειά του. Εφόσον δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές στα τα B_1 και B_2, τότε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται, ενώ στο Π το $d\vec{A}$ το οποίο είναι πάντα κάθετο τοπικά στην επιφάνεια, είναι παράλληλο με το ακτινικό $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$. Επομένως ο νόμος του Gauss γίνεται

$$\int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (*βάση×ύψος*). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

οδηγώντας στο αποτέλεσμα

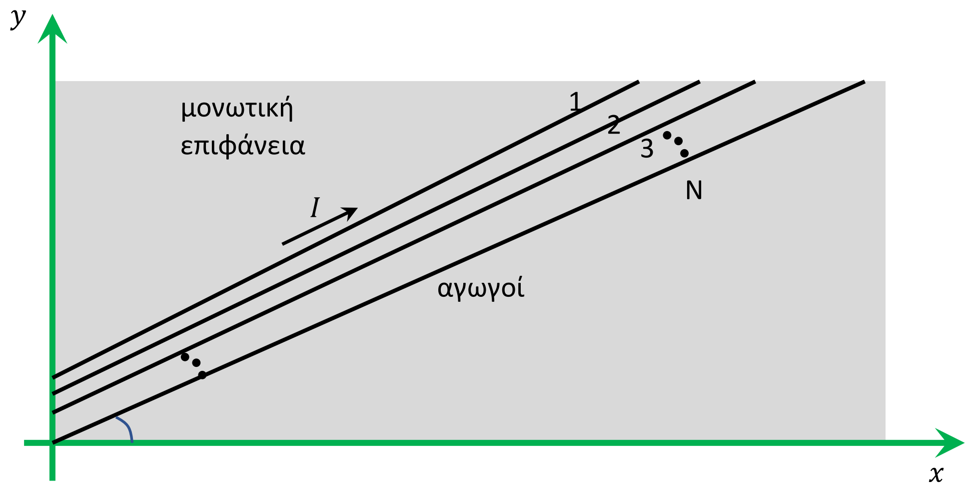
$$E = \frac{1}{2\pi L\varepsilon_0}\frac{Q}{\rho}$$

ΘΕΜΑ 3. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής στερέωσε ένα σύνολο N ευθύγραμμων αγωγών επάνω σε μια επίπεδη μονωτική επιφάνεια η οποία βρίσκεται επάνω στο επίπεδο x-y και εφάρμοσε το ίδιο ρεύμα I σε καθένα από αυτούς. Ο 1^{ος} αγωγός έχει μήκος $L_1 = L$ και σχηματίζει μικρή γωνία $\theta_1 = \theta$ με τον άξονα x (το σχήμα δεν είναι σε κλίμακα) ενώ οι υπόλοιποι αγωγοί σχηματίζουν γωνίες που δίνονται από την αναδρομική σχέση $\theta_n = \gamma\theta_{n-1}$ όπου $\gamma < 1$ μια σταθερά και έχουν μήκη που δίνονται από μια άλλη αναδρομική σχέση $L_n = \varepsilon L_{n-1}$ όπου $\varepsilon > 1$ μια άλλη σταθερά. Θεωρώντας ότι η θ_1 είναι αρκετά <u>μικρή</u> ώστε να ισχύει η προσέγγιση $sin\theta_1 \approx \theta_1$, να βρεθεί η συνολική δύναμη που ασκείται στους αγωγούς από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μέτρου B το οποίο εφαρμόζεται κατά μήκος του άξονα x. Πάρτε για δεδομένα $N = 21$, $\theta = 2/10\ rad$, $L = 2\ m$, $B = 0.25\ T$, $I = 6\ A$, $\gamma \cdot \varepsilon = 11/10$ και $(\gamma \cdot \varepsilon)^{21} \approx 74/10$. <u>Χρήσιμες μαθηματικές σειρές</u>:

$1 + 2 + 3 + \cdots + N = N(N+1)/2,$

$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = (1 - x^{N+1})/(1 - x),$

$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = N(N+1)(2N+1)/6\,.$



<u>Λύση</u>:

Η δύναμη σε κάθε αγωγό είναι ίση με

$$\vec{F}_n = I\vec{L}_n \times \vec{B}$$

με μέτρο

$$F_n = BIL_n sin\theta_n$$

και φορά κατά μήκος του άξονα z. Επειδή όλες οι δυνάμεις προκύπτουν ομόρροπες, η συνισταμένη τους προκύπτει από απλή αριθμητική και όχι διανυσματική άθροιση, δηλαδή

$$F = \sum_{n=1}^{N} F_n = BI \sum_{n=1}^{N} L_n sin\theta_n$$

Από την αναδρομική σχέση παίρνουμε

$$L_n = \varepsilon L_{n-1} = \varepsilon^2 L_{n-2} = \cdots = \varepsilon^{n-1} L_1$$

δηλαδή $L_n = \varepsilon^{n-1} L$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι και για τις γωνίες ισχύει $\theta_n = \gamma^{n-1}\theta$. Αφού για την πρώτη γωνία ισχύει η προσέγγιση $sin\theta_1 \approx \theta_1$, τότε θα ισχύει και για τις άλλες γωνίες αφού είναι διαδοχικά μικρότερες, δηλαδή $sin\theta_n \approx \theta_n$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση, οδηγεί στο

$$sin\theta_n = \gamma^{n-1} sin\theta$$

Έτσι η δύναμη γίνεται

$$F = BILsin\theta \sum_{n=1}^{N} \gamma^{n-1}\varepsilon^{n-1} = BILsin\theta \sum_{n=1}^{N} (\gamma\varepsilon)^{n-1}$$

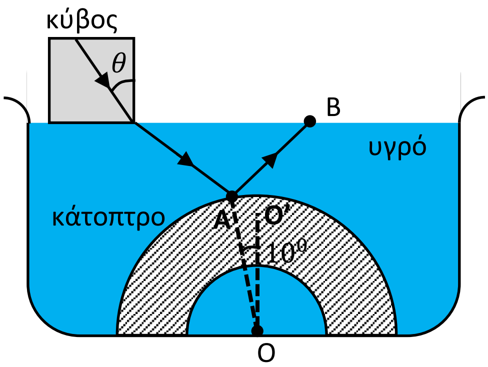
Από τις ιδιότητες της γεωμετρικής σειράς προκύπτει ότι

$$F = BILsin\theta \frac{1-(\gamma\varepsilon)^N}{1-\gamma\varepsilon}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα με $sin\theta \approx \theta = 0.2$ παίρνουμε

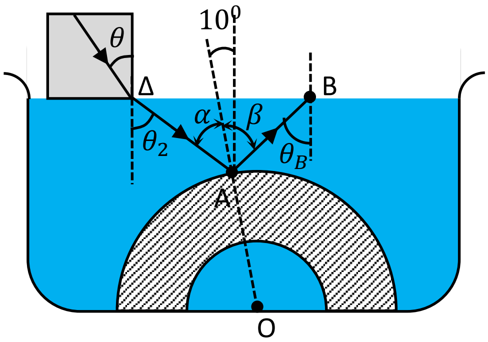
$$F = 0.25\times 6\times 2\times 0.2\frac{1-1.1^{21}}{1-1.1} = 0.6\frac{10-74}{10-11} = 38.4\ N$$

ΘΕΜΑ 4. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μια στενή φωτεινή μονοχρωματική δέσμη ταξιδεύει μέσα σε ένα διάφανο κύβο από υλικό με δείκτη διάθλασης ίσο με $\sqrt{3}$, σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο κύβος αυτός επιπλέει στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού με δείκτη διάθλασης $2/\sqrt{3}$, στον πυθμένα του οποίου έχει τοποθετηθεί ένα σφαιρικό κάτοπτρο. Η δέσμη αφού διέλθει από την διεπιφάνεια του κύβου-υγρού, ανακλάται στο κάτοπτρο και αναδύεται στον αέρα στο σημείο Β. Σε κάποια οριακή τιμή της θ, έστω θ_1, όπου η δέσμη συναντάει το κάτοπτρο στο σημείο Α, παρατηρείται ότι εξαφανίζεται η αναδυόμενη δέσμη στο σημείο Β. Η ευθεία ΟΟ' είναι η κατακόρυφος που περνάει από το κέντρο Ο του κατόπτρου και η γωνία ΑΟΟ' είναι 10^0. Να βρεθεί το ημίτονο της γωνίας θ_1. (Σημείωση: Το συνημίτονο των 10^0 μπορεί να προσεγγιστεί αρκετά ικανοποιητικά από το κλάσμα $5 \cdot 197/1000$)



Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, προεκτείνουμε την ΟΑ και φέρνουμε την κατακόρυφη στο Α αλλά και τις κατακόρυφες στα σημεία Δ και Β στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού όπου προσπίπτει η δέσμη (όλες διακεκομμένες γραμμές).



Η γωνία διάθλασης θ_2 είναι εντός εναλλάξ με την $\alpha + 10^0$ οπότε θα ισχύει

$$\theta_2 = \alpha + 10^0$$

Ομοίως οι γωνίες θ_B και $\beta - 10^0$ είναι εντός εναλλάξ οπότε θα ισχύει

$$\theta_B = \beta - 10^0$$

Εφόσον εξαφανίζεται η αναδυόμενη δέσμη, τότε η θ_B είναι η κρίσιμη γωνία και ισχύει

$$\theta_B = sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^0$$

και από τα παραπάνω $\beta = 70^0$. Σε μια σφαίρα, η τοπική κάθετος σε ένα σημείο είναι η ακτίνα της που περνάει από αυτό το σημείο. Έτσι η ΟΑ είναι η τοπική κάθετος στο σημείο Α και από τον νόμο της ανάκλασης έχουμε ότι $\alpha = \beta = 70^0$. Έτσι από τα παραπάνω

$$\theta_2 = 70^0 + 10^0 = 80^0$$

Ο νόμος της διάθλασης στο σημείο Δ γράφεται ως

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

Όμως $sin80^0 = cos10^0$ το οποίο σύμφωνα με την εκφώνηση προσεγγίζεται από το $5 \cdot 197/1000$. Αντικαθιστώντας

$$\sqrt{3} sin\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{5\times197}{1000}$$

Απ' όπου εύκολα βρίσκουμε

$$sin\theta_1 = \frac{10\times197}{3\times1000} = \frac{197}{300} \approx \frac{2}{3}$$