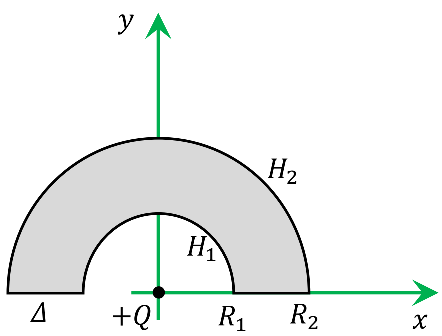
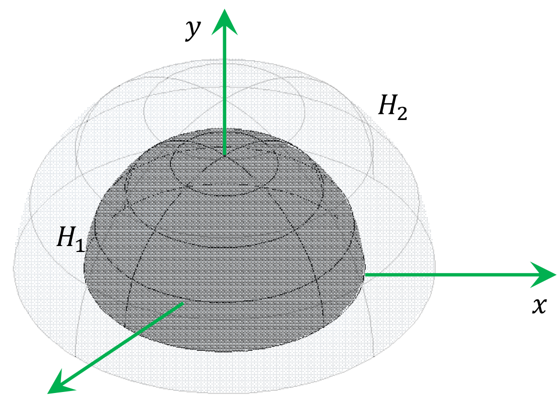
1α) Στο παρακάτω σχήμα, ένα θετικό σημειακό φορτίο $+Q$ έχει τοποθετηθεί επάνω στην αρχή των αξόνων. Ένας φοιτητής θέλει να "παίξει" με τον νόμο του Gauss και παίρνει ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια που ορίζεται στον χώρο $y \geq 0$ από δυο <u>ημισφαιρικές</u> επιφάνειες H_1 και H_2 με ακτίνες R_1 και $R_2 = 3R_1$ αντίστοιχα, καθώς και από έναν επίπεδο δακτύλιο Δ επάνω στο επίπεδο $y = 0$ με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 ώστε να "σφραγίζει" τον χώρο ανάμεσα από τις δυο ημισφαιρικές επιφάνειες. Εάν η επιφάνεια του H_2 είναι ίση με $1.8\ cm^2$ και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το $+Q$ στο σημείο $(x, y, z) = (0, R_2, 0)$ είναι ίσο με $400\ N/C$, να υπολογίσετε (α) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_1, (β) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_2, (γ) την ηλεκτρική ροή επάνω στην Δ και (δ) σχολιάστε εάν τα παραπάνω αποτελέσματά σας συμφωνούν με τον νόμο του Gauss (θυμηθείτε ότι η φορά του κάθετου διανύσματος σε μια επιφάνεια Gauss, δείχνει πάντα προς τα έξω).

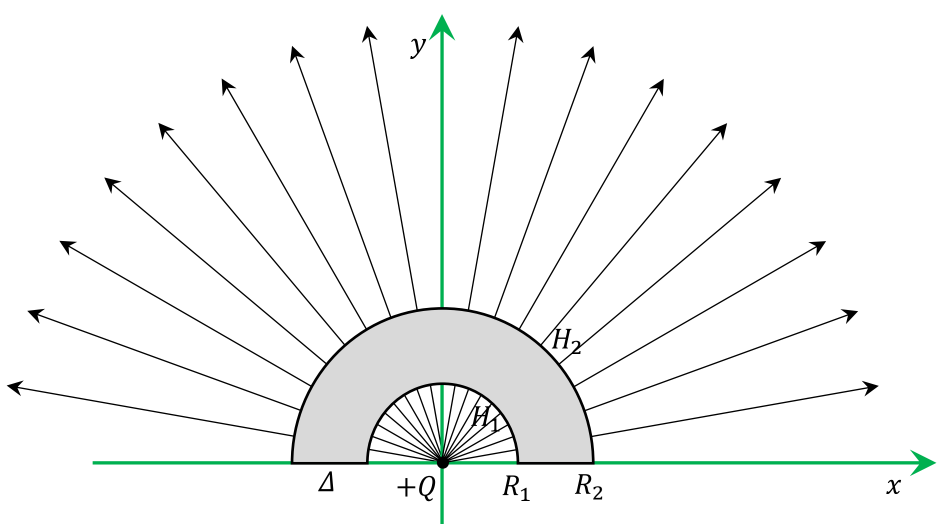


Πλάγια Όψη



3-Διάστατη Αναπαράσταση

<u>Λύση</u>: Οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και τέμνουν τις H_1 και H_2 κάθετα ενώ περνούν παράλληλα προς τον δακτύλιο Δ.



Το ηλεκτρικό πεδίο ισούται κατά μέτρο με $E = kQ/r^2$ και εξαρτάται μόνο από το φορτίο Q και την απόσταση r και άρα είναι σταθερό επάνω στην H_2 με μέτρο $E_2 = kQ/{R_2}^2$ που από τα δεδομένα είναι ίσο με $400\ N/C$. Ομοίως επάνω στην H_1 είναι σταθερό με μέτρο $E_1 = kQ/{R_1}^2$. Παίρνοντας λόγους

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{{R_2}^2}{{R_1}^2} = 9 => E_1 = 3600\ N/C$$

(α) Αφού το E_2 είναι σταθερό επάνω στην H_2, τότε βγαίνει εκτός ολοκληρώματος στον υπολογισμό της ροής. Επίσης το κάθετο της H_2 είναι παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές και έτσι η ροή Φ_2 επάνω στην H_2 είναι ίση με:

$$\Phi_2 = \int_{H_2} E_2 dA cos 0^0 = E_2 \int_{H_2} dA = E_2 A_2$$

όπου $A_2 = 2\pi {R_2}^2$ είναι το εμβαδό της H_2 το οποίο σύμφωνα με τα δεδομένα είναι ίσο με $1.8\ cm^2$. Έτσι η ροή Φ_2 είναι ίση με

$$\Phi_2 = 400 \times 1.8 \times 10^{-4} = 0.072\ Nm^2/C$$

(β) Όπως και στο α, το E_1 είναι σταθερό επάνω στην H_1 και άρα βγαίνει εκτός ολοκληρώματος στον υπολογισμό της ροής. Όμως το κάθετο της H_1 είναι προς την αρχή των αξόνων (δείχνει πάντα προς το εξωτερικό της επιφάνειας Gauss) και έτσι είναι αντι-παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές. Επομένως η ροή Φ_1 επάνω στην H_1 είναι ίση με:

$$\Phi_1 = \int_{H_1} E_1 dA cos 180^0 = -E_1 \int_{H_1} dA = -\ E_1 A_1$$

όπου $A_1 = 2\pi {R_1}^2$ είναι το εμβαδό της H_1. Παίρνοντας λόγους

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} = \frac{1}{9} => A_1 = 0.2\ cm^2$$

και έτσι η ροή είναι ίση με

$$\Phi_1 = -3600 \times 0.2 \times 10^{-4} = -0.072\ Nm^2/C$$

(γ) Επειδή οι δυναμικές γραμμές περνούν παράλληλα προς τον δακτύλιο Δ, τότε στον υπολογισμό της ροής υπεισέρχεται ο όρος $cos 90^0 = 0$ και έτσι η ροή μηδενίζεται $\Phi_\Delta = 0$.

(δ) Αθροίζοντας όλες τις ροές, η συνολική ροή δια μέσου της κλειστής επιφάνειας Gauss είναι ίση με

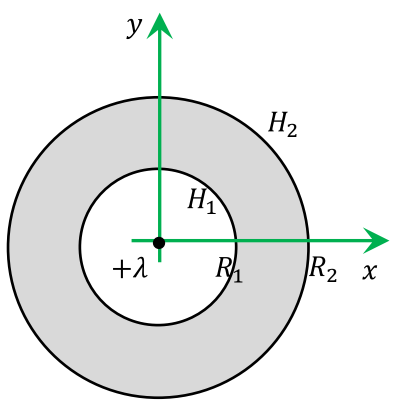
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_1 + \Phi_\Delta + \Phi_2 = 0$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σε πλήρη συμφωνία με τον νόμο του Gauss

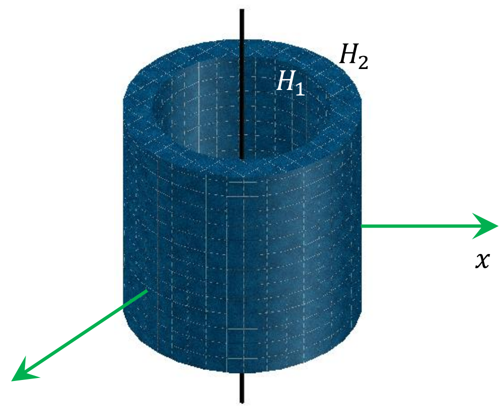
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0}$$

αφού το περικλειόμενο φορτίο Q_π είναι μηδέν (το μοναδικό φορτίο στο χώρο, το Q, είναι εκτός της επιφάνειας Gauss που επέλεξε ο φοιτητής).

1β) Στο παρακάτω σχήμα, μια ομοιόμορφα φορτισμένη γραμμή άπειρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου $+\lambda$ έχει τοποθετηθεί επάνω στον άξονα z (κάθετα στη σελίδα). Ένας φοιτητής θέλει να "παίξει" με τον νόμο του Gauss και παίρνει ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια που ορίζεται από δυο κυλινδρικές επιφάνειες H_1 και H_2 με ακτίνες R_1 και $R_2 = 4R_1$ αντίστοιχα και κοινό ύψος $2h$, με τον άξονά τους επάνω στον άξονα z, καθώς και από δυο επίπεδους δακτυλίους Δ_1 και Δ_2 κάθετους στον άξονα z και στις θέσεις $z = \pm h$ με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 ο καθένας ώστε να "σφραγίζουν" τον χώρο ανάμεσα στις δυο κυλινδρικές επιφάνειες. Εάν η επιφάνεια του H_2 είναι ίση με $1.6\ cm^2$ και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η φορτισμένη γραμμή στο σημείο $(x, y, z) = (R_2, 0, 0)$ είναι ίσο με $500\ N/C$, να υπολογίσετε (α) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_1, (β) την ηλεκτρική ροή επάνω στην H_2, (γ) την ηλεκτρική ροή επάνω στους δακτύλιους Δ_1 & Δ_2 και (δ) σχολιάστε εάν τα παραπάνω αποτελέσματά σας συμφωνούν με τον νόμο του Gauss (θυμηθείτε ότι η φορά του κάθετου διανύσματος σε μια επιφάνεια Gauss, δείχνει πάντα προς τα έξω).

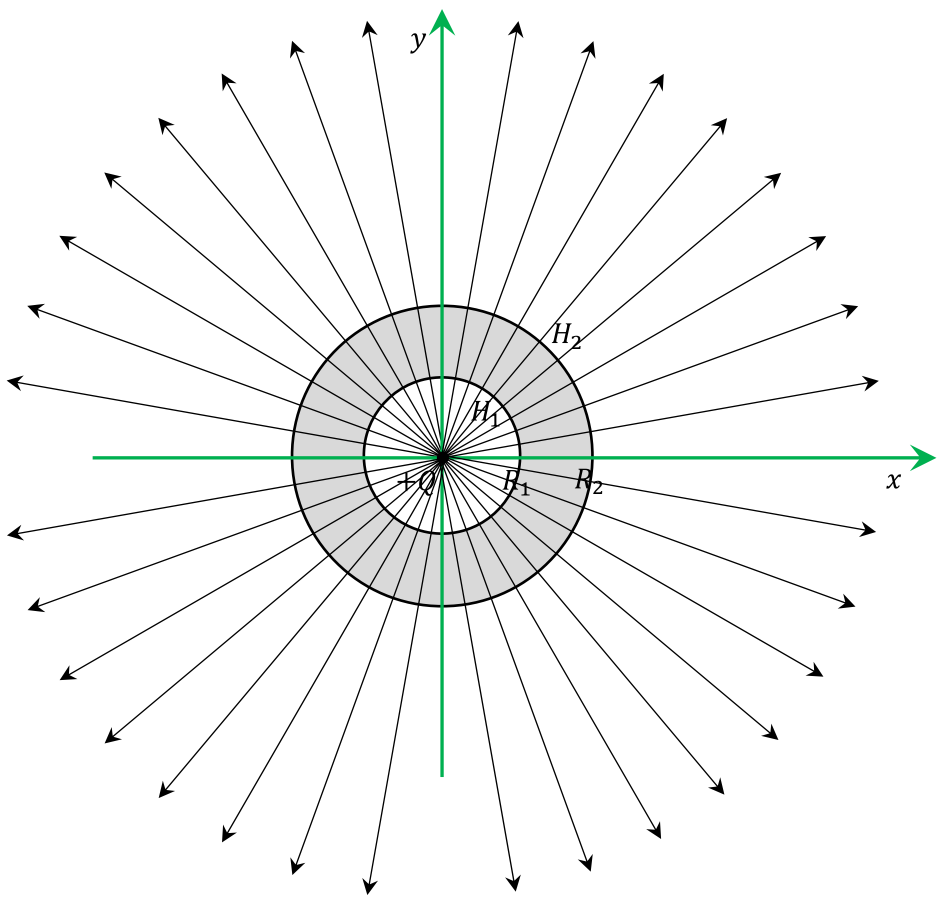


Κάτοψη



3-Διάστατη Αναπαράσταση

<u>Λύση</u>: Οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και τέμνουν τις H_1 και H_2 κάθετα ενώ περνούν παράλληλα προς τους δακτύλιους Δ_1 & Δ_2.



Το ηλεκτρικό πεδίο ισούται κατά μέτρο με $E = 2k\lambda/\rho$ και εξαρτάται μόνο από το φορτίο Q και την πολική ακτίνα ρ και άρα είναι σταθερό επάνω στην H_2 με μέτρο $E_2 = 2k\lambda/R_2$ που από τα δεδομένα είναι ίσο με $500\ N/C$. Ομοίως επάνω στην H_1 είναι σταθερό με μέτρο $E_1 = 2k\lambda/R_1$. Παίρνοντας λόγους

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} = 4 => E_1 = 2000\ N/C$$

(α) Αφού το E_2 είναι σταθερό επάνω στην H_2, τότε βγαίνει εκτός ολοκληρώματος στον υπολογισμό της ροής. Επίσης το κάθετο της H_2 είναι παράλληλο με τις δυναμικές γραμμές και έτσι η ροή Φ_2 επάνω στην H_2 είναι ίση με:

$$\Phi_2 = \int_{H_2} E_2 dA cos 0^0 = E_2 \int_{H_2} dA = E_2 A_2$$

όπου $A_2 = 2\pi R_2 \times 2h$ είναι το εμβαδό της H_2 το οποίο σύμφωνα με τα δεδομένα είναι ίσο με $1.6\ cm^2$. Έτσι η ροή Φ_2 είναι ίση με

$$\Phi_2 = 500 \times 1.6 \times 10^{-4} = 0.08\ Nm^2/C$$

(β) Όπως και στο α, το E_1 είναι σταθερό επάνω στην H_1 και άρα βγαίνει εκτός ολοκληρώματος στον υπολογισμό της ροής. Όμως το κάθετο της H_1 είναι προς την αρχή των αξόνων (δείχνει πάντα προς το εξωτερικό της επιφάνειας Gauss) και έτσι είναι αντι-παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές. Επομένως η ροή Φ_1 επάνω στην H_1 είναι ίση με:

$$\Phi_1 = \int_{H_1} E_1 dAcos180^0 = -E_1 \int_{H_1} dA = -\,E_1 A_1$$

όπου $A_1 = 2\pi R_1 \times 2h$ είναι το εμβαδό της H_1. Παίρνοντας λόγους

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4} => A_1 = 0.4\ cm^2$$

και έτσι η ροή είναι ίση με

$$\Phi_1 = -2000 \times 0.4 \times 10^{-4} = -0.08\ Nm^2/C$$

(γ) Επειδή οι δυναμικές γραμμές περνούν παράλληλα προς τους δακτύλιους Δ_1 & Δ_2, τότε στον υπολογισμό της ροής υπεισέρχεται ο όρος $cos90^0 = 0$ και έτσι η ροή μηδενίζεται $\Phi_{\Delta 1} = \Phi_{\Delta 2} = 0$.

(δ) Αθροίζοντας όλες τις ροές, η συνολική ροή δια μέσου της κλειστής επιφάνειας Gauss είναι ίση με

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\Delta 1} + \Phi_{\Delta 2} = 0$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σε πλήρη συμφωνία με τον νόμο του Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0}$$

αφού το περικλειόμενο φορτίο Q_π είναι μηδέν (το μοναδικό φορτίο στο χώρο, αυτό της γραμμής, είναι εκτός της επιφάνειας Gauss που επέλεξε ο φοιτητής).

2α) Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο χώρο δίνονται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_r = \frac{2A}{r^3}\varphi sin\theta$$

$$E_\theta = -\frac{A}{r^3}\varphi cos\theta$$

$$E_\varphi = -\frac{A}{r^3}$$

όπου A κατάλληλη σταθερά ώστε οι συνιστώσες αυτές να είναι σε μονάδες S.I. και $-\pi < \varphi \leq \pi$. Έστω τρεις νοητές σφαίρες με κοινό κέντρο επάνω στην αρχή των αξόνων και με διαμέτρους $2\ m$, $1\ m$ και D όπου $D < 1\ m$. Επάνω σε αυτές τις σφαίρες, υπάρχουν αντίστοιχα τρία σημεία, τα Κ, Λ και Μ (από την μεγαλύτερη έως την μικρότερη σφαίρα) τα οποία έχουν ίσο ηλεκτρικό δυναμικό μεταξύ τους και το Κ έχει γωνιακές συντεταγμένες $\theta_K = \pi/4$ και $\varphi_K = \pi$, ενώ τα Λ και Μ έχουν γωνίες θ ίσες με $3\pi/4$ και $5\pi/4$ αντίστοιχα. Επίσης η γωνία φ του Μ είναι κατά μέτρο ίση με το μισό της γωνίας φ του Λ αλλά με αντίθετο πρόσημο. Να βρεθούν οι <u>σφαιρικές</u> συντεταγμένες των τριών σημείων Κ, Λ και Μ.

<u>Λύση</u>: Με ολοκλήρωση, προκύπτει ότι το δυναμικό δίνεται από την έκφραση

$$V = \frac{A}{r^2}\varphi sin\theta + c$$

όπου η c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Επάνω στη σφαίρα με διάμετρο $2\ m$, ισχύει για την επιβατική ακτίνα $r = 1\ m$ και επομένως οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου Κ είναι οι

$$(r, \theta, \varphi) = (1, \pi/4, \pi)$$

(οι αποστάσεις σε m και η γωνίες σε rad) ενώ το δυναμικό του είναι ίσο με

$$V_K = \frac{A}{1}\pi\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{2}A\pi}{2} + c$$

Ομοίως, επάνω στη σφαίρα με διάμετρο $1\ m$, ισχύει για την επιβατική ακτίνα $r = 1/2\ m$. Αφού το σημείο Λ έχει γωνία $\theta_\Lambda = 3\pi/4$, τότε οι σφαιρικές συντεταγμένες του θα είναι ίσες με

$$(r, \theta, \varphi) = (1/2, 3\pi/4, \varphi_\Lambda)$$

και το δυναμικό του θα είναι ίσο με

$$V_\Lambda = \frac{A}{(1/2)^2}\varphi_\Lambda sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c = 2\sqrt{2}A\varphi_\Lambda + c$$

Εξισώνοντας τα δυο δυναμικά παίρνουμε

$$2\sqrt{2}A\varphi_\Lambda = \frac{\sqrt{2}A\pi}{2}$$

απ’ όπου προκύπτει $\varphi_\Lambda = \pi/4$. Από την εκφώνηση, το σημείο Μ έχει γωνία $\theta_M = 5\pi/4$ ενώ η συντεταγμένη του φ είναι κατά μέτρο η μισή της φ_Λ δηλαδή

$$|\varphi_M| = |\varphi_\Lambda|/2 = \pi/8$$

αλλά με αντίθετο πρόσημο οπότε $\varphi_M = -\pi/8$. Επίσης, επάνω στη σφαίρα με διάμετρο D, ισχύει για την επιβατική ακτίνα $r = D/2$ και άρα το δυναμικό του Μ ισούται με

$$V_M = \frac{4A}{D^2}\left(-\frac{\pi}{8}\right) sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{2}A\pi}{4D^2} + c$$

Εξισώνοντας τα δυο δυναμικά των σημείων Κ και Μ (ή Λ και Μ) οδηγεί στο

$$\frac{\sqrt{2}A\pi}{4D^2} = \frac{\sqrt{2}A\pi}{2}$$

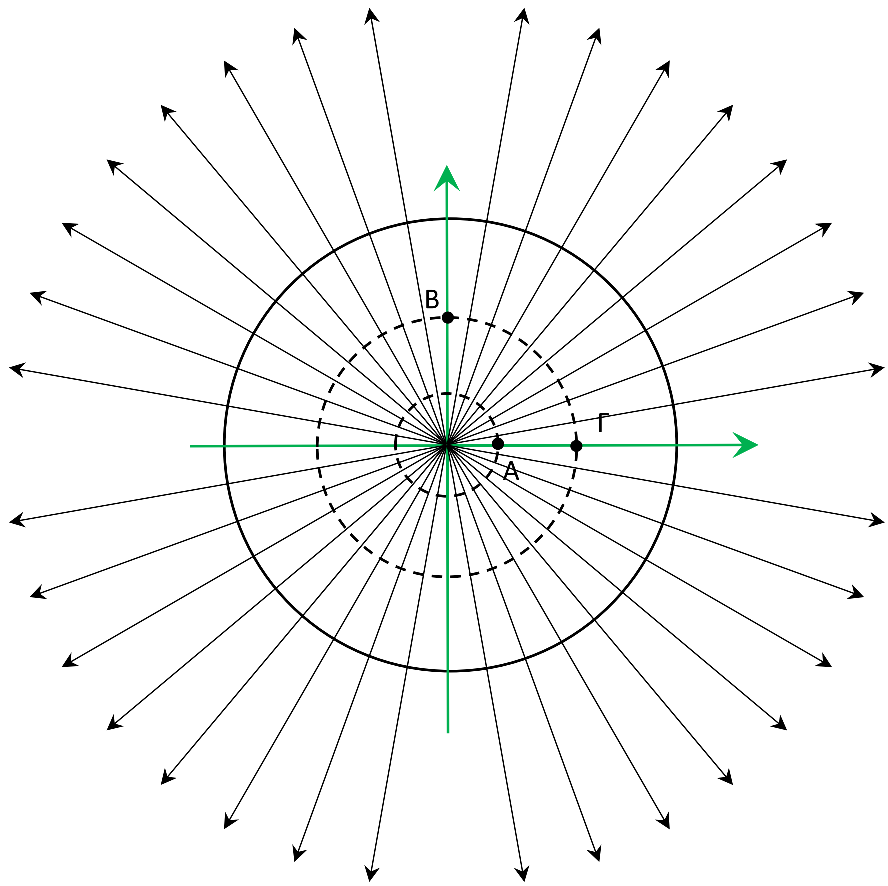
απ’ όπου παίρνουμε $D = \sqrt{2}/2$ και άρα $r_M = \sqrt{2}/4$. Συνοπτικά οι σφαιρικές συντεταγμένες των τριών σημείων είναι οι εξής

Σημείο	r	θ	φ
Κ	1	$\pi/4$	π
Λ	$1/2$	$3\pi/4$	$\pi/4$
Μ	$\sqrt{2}/4$	$5\pi/4$	$-\pi/8$

2β) Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας με φορτίο $+Q$ και ακτίνα R, σε απόσταση $r \leq R$ από το κέντρο της, δίνεται από την έκφραση

$$E = k\frac{Qr}{R^3}$$

Να βρεθεί η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού ΔV μεταξύ δυο σημείων που βρίσκονται επάνω στο επίπεδο x-y, του σημείου Α με συντεταγμένες $(x_A, y_A) = (R/5, 0)$ και του Β με συντεταγμένες $(x_B, y_B) = (0, R/2)$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ΔV <u>με το ορισμένο ολοκλήρωμα</u> και <u>όχι</u> κάποια άλλη σχέση.



Θα διαλέξουμε την διαδρομή ΑΒ που αποτελείται από δυο διαδρομές, την ΑΓ επάνω στον άξονα x όπου το σημείο Γ έχει συντεταγμένη $x_\Gamma = R/2$ και το τόξο ΓΒ το οποίο βρίσκεται επάνω σε κύκλο με ακτίνα $R/2$. Έτσι μπορούμε να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δυο μέρη:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_\Gamma^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Επειδή ο άξονας x είναι κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής, τότε επάνω στην διαδρομή ΑΓ ισχύει

$$\int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^\Gamma E dx \, cos 0^0 = k \frac{Q}{R^3} \int_{x_A}^{x_\Gamma} x dx = k \frac{Q}{2R^3} ({x_\Gamma}^2 - {x_A}^2)$$

Αντικαθιστώντας

$$\int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = k \frac{Q}{2R^3} \left(\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{25} \right) = \frac{21}{200} \frac{kQ}{R}$$

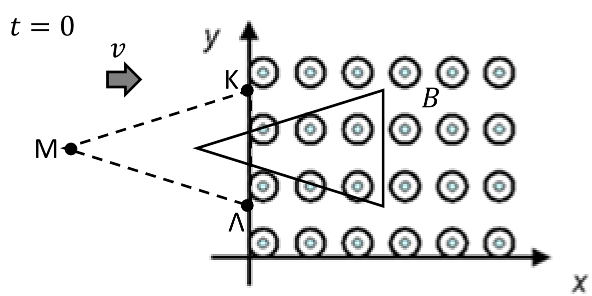
Οι δυναμικές γραμμές τέμνουν το τόξο ΓΒ κάθετα και άρα

$$\int_A^\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^\Gamma E dl \cos 90^0 = 0$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού είναι ίση με

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{21}{200}\frac{kQ}{R}$$

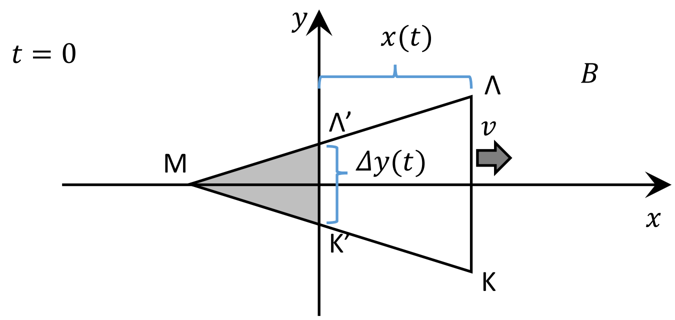
3α) Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΚΛΜΚ έχει το σχήμα ισοσκελούς τριγώνου με τις πλευρές ΚΜ και ΛΜ να είναι ίσες μεταξύ τους, την βάση ΚΛ μήκους $5\ m$ να είναι παράλληλη με τον άξονα y και την απόσταση Μ από την ΚΛ (το ύψος) να είναι ίσο με $h = 8\ m$. Αρχικά ο αγωγός είναι ακίνητος και η βάση ΚΛ βρίσκεται επάνω στον άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 1.6\ T$ με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου $B = 0$. Ο αγωγός τίθεται σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με το θετικό άξονα x και προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2\ m/s$. Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης για όλους τους χρόνους t.



Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του τριγώνου, μόνο το τμήμα Κ'Λ'ΛΚ που βρίσκεται μεταξύ της κορυφής Μ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα έχει σχήμα τραπεζίου και άρα το εμβαδό του είναι ίσο με

$$A(t) = \frac{K'\Lambda' + K\Lambda}{2} x(t)$$



Λόγω της ομαλής κίνησης,

$$x(t) = vt$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΛΜ και Κ’Λ’Μ έχουμε

$$\frac{K'\Lambda'}{h-x} = \frac{K\Lambda}{h}$$

Συνδυάζοντας

$$A(t) = K\Lambda \frac{\frac{h-x}{h}+1}{2}x = 5\frac{2h-x}{2h}x = 5\frac{16-x}{16}x$$

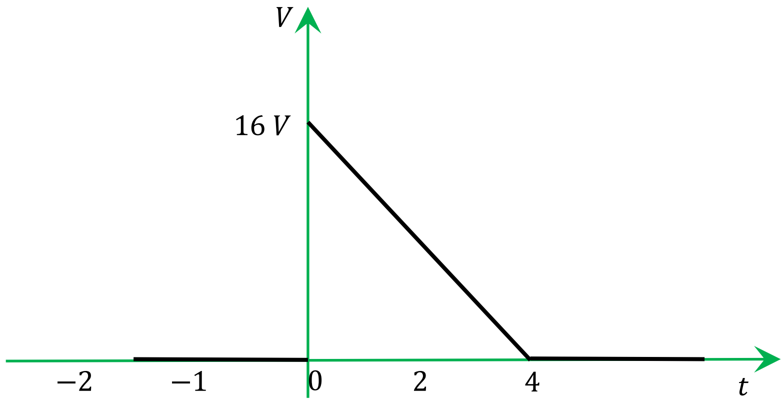
Επομένως η μαγνητική ροή $\Phi = BA$ ισούται με

$$\Phi = \frac{5}{16}1.6(16-x)x = 0.5(16-2t)2t = t(16-2t)$$

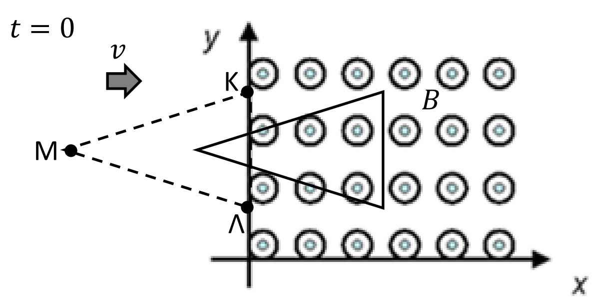
όπου το x αντικαταστάθηκε με το vt όπου $v = 20\ m/s$. Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = 16 - 4t$$

Αυτή η σχέση ισχύει από το $t = 0$ μέχρι και το $t = 8/2 = 4\ s$ όπου το πλαίσιο βρίσκεται μόνο μερικώς μέσα στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Για $t < 0$ η μαγνητική ροή είναι μηδέν και άρα $V = 0$ ενώ για $t \geq 4\ s$ η ροή είναι σταθερή (αφού όλο το εμβαδό του τριγώνου διαπερνάται από το B) και έτσι κα πάλι $V = 0$. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω



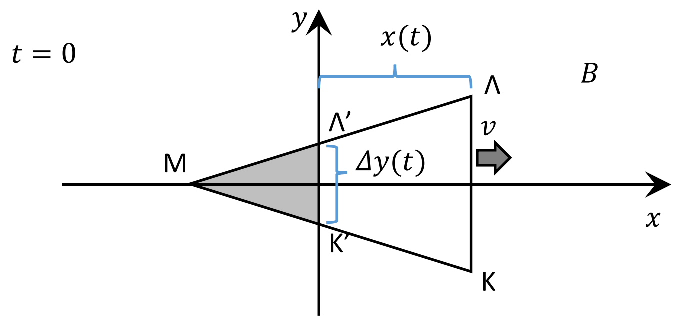
3β) Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΚΛΜΚ έχει το σχήμα ισοσκελούς τριγώνου με τις πλευρές ΚΜ και ΛΜ να είναι ίσες μεταξύ τους, την βάση ΚΛ μήκους $5\ m$ να είναι παράλληλη με τον άξονα y και την απόσταση Μ από την ΚΛ (το ύψος) να είναι ίσο με $h = 8\ m$. Αρχικά ο αγωγός είναι ακίνητος και η βάση ΚΛ βρίσκεται επάνω στον άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 1.6\ T$ με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου $B = 0$. Ο αγωγός τίθεται σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με το θετικό άξονα x και προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2\ m/s$. Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης για όλους τους χρόνους t.



Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του τριγώνου, μόνο το τμήμα Κ'Λ'ΛΚ που βρίσκεται μεταξύ της κορυφής Μ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα έχει σχήμα τραπεζίου και άρα το εμβαδό του είναι ίσο με

$$A(t) = \frac{K'\Lambda' + K\Lambda}{2} x(t)$$



Λόγω της ομαλής κίνησης,

$$x(t) = vt$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΛΜ και Κ'Λ'Μ έχουμε

$$\frac{K'\Lambda'}{h-x} = \frac{K\Lambda}{h}$$

Συνδυάζοντας

$$A(t) = K\Lambda \frac{\frac{h-x}{h}+1}{2}x = 5\frac{2h-x}{2h}x = 5\frac{16-x}{16}x$$

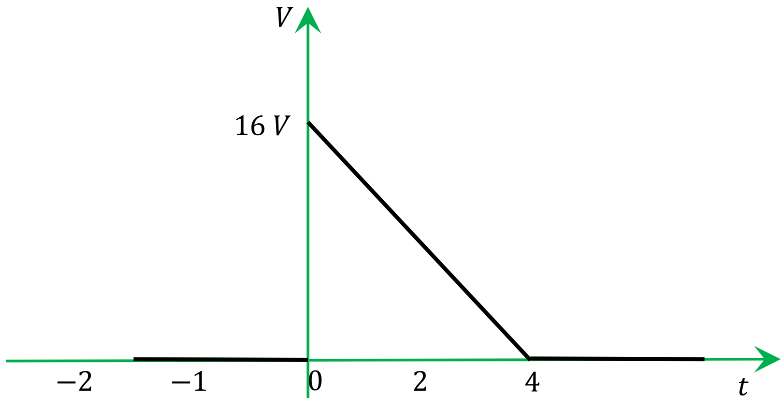
Επομένως η μαγνητική ροή $\Phi = BA$ ισούται με

$$\Phi = \frac{5}{16}1.6(16-x)x = 0.5(16-2t)2t = t(16-2t)$$

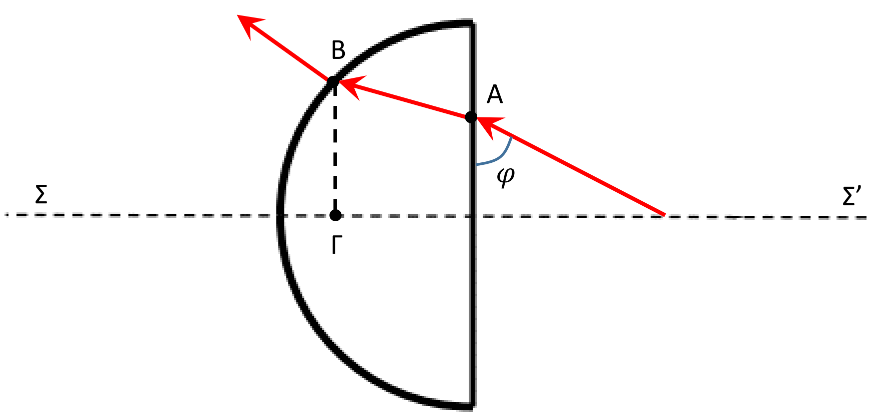
όπου το x αντικαταστάθηκε με το vt όπου $v = 20\ m/s$. Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = 16 - 4t$$

Αυτή η σχέση ισχύει από το $t = 0$ μέχρι και το $t = 8/2 = 4\ s$ όπου το πλαίσιο βρίσκεται μόνο μερικώς μέσα στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Για $t < 0$ η μαγνητική ροή είναι μηδέν και άρα $V = 0$ ενώ για $t \geq 4\ s$ η ροή είναι σταθερή (αφού όλο το εμβαδό του τριγώνου διαπερνάται από το B) και έτσι κα πάλι $V = 0$. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω

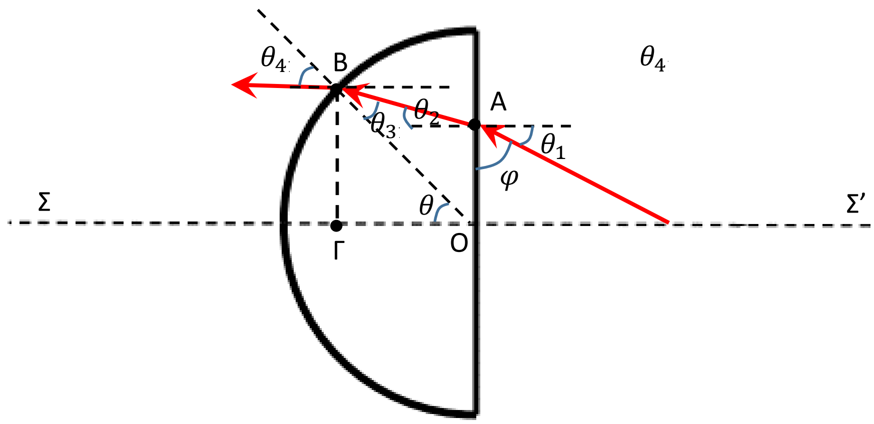


4α) Λεπτή φωτεινή δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρίου με δείκτη διάθλασης 1.5 στο σημείο Α και εξέρχεται στο σημείο Β. Ένας φοιτητής παρατηρεί ότι σε κάποια γωνία $\varphi = \varphi_1$, η εξερχόμενη δέσμη στο Β ταξιδεύει παράλληλα με τον άξονα συμμετρίας ΣΣ' του ημισφαιρίου. Εάν η απόσταση ΒΓ είναι ίση με το μισό της ακτίνας R του ημισφαιρίου, να βρεθεί η γωνία φ



Λύση:

Φέρουμε την ακτίνα ΒΟ η οποία «παίζει τον ρόλο» της καθέτου τοπικά στο σημείο Β



Έστω θ η γωνία ΓΟΒ. Από τα δεδομένα έχουμε

$$sin\theta = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} => \theta = 30\ ^0$$

Ως εντός-εκτός και επί τα αυτά, η θ_4 είναι ίση με την θ και έτσι $\theta_4 = 30\ ^0$. Όμως η θ_4 είναι η γωνία διάθλασης από το γυαλί στον αέρα. Από τον νόμο του Snell έχουμε

$$nsin\theta_3 = sin\theta_4 => 1.5sin\theta_3 = 0.5 => sin\theta_3 = 1/3$$

από την οποία βρίσκουμε $\theta_3 = 19.47\ ^0$. Στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε για τις γωνίες

$$(90\ ^0 - \theta) + \theta_3 + (\theta_2 + 90\ ^0) = 180\ ^0$$

$$60\ ^0 + 19.47\ ^0 + \theta_2 = 90\ ^0$$

από την οποία βρίσκουμε $\theta_2 = 10.53\ ^0$. Όμως η θ_2 είναι η γωνία διάθλασης από το αέρα στο γυαλί. Από τον νόμο του Snell έχουμε

$$sin\theta_1 = nsin\theta_2 => sin\theta_1 = 1.5sin(10.53\ ^0)$$

από την οποία βρίσκουμε $\theta_1 = 15.9\ ^0$. Η ζητούμενη γωνία φ είναι ίση με

$$\varphi = 90\ ^0 - 15.9\ ^0 = 74.1\ ^0$$

(προσέξτε ότι οι γωνίες που εμφανίζονται στον νόμο του Snell ορίζονται σε σχέση με την κάθετη στην διεπιφάνεια μεταξύ των δυο υλικών, όπως η θ_1 παραπάνω και όχι όπως η φ που ορίζεται σε σχέση με την διεπιφάνεια).

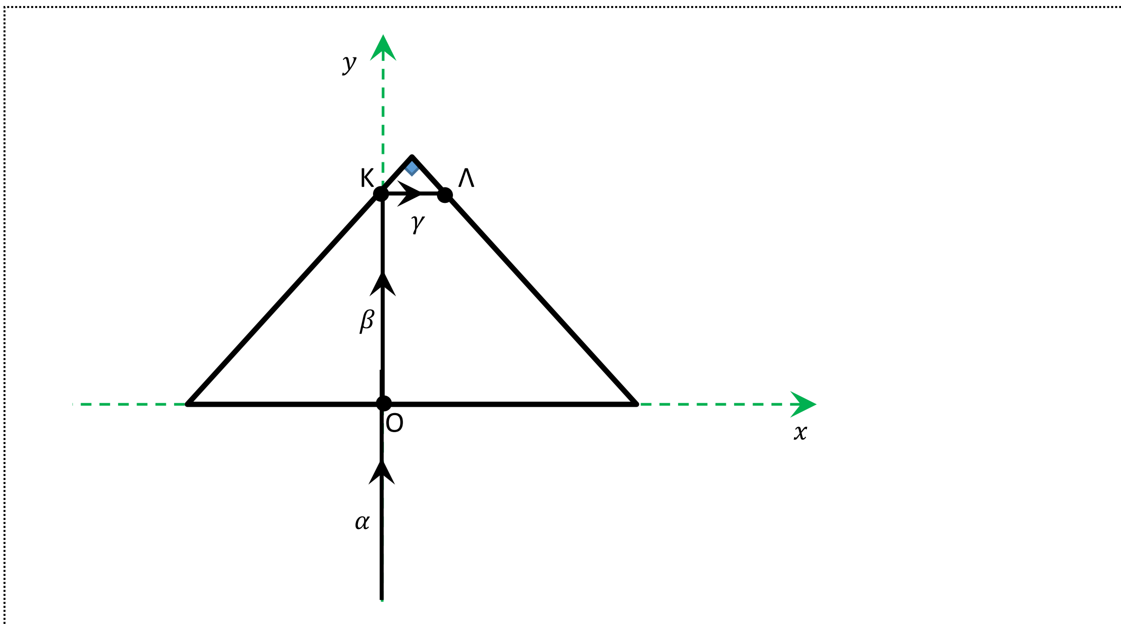
4β) Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής κατευθύνει μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη α κατά μήκος του άξονα $+y$, η οποία προσπίπτει κάθετα σε μια επίπεδη επιφάνεια ενός λεπτού διαφανούς πρίσματος σε σχήμα ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου με δείκτη διάθλασης $\sqrt{3/2}$. Το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της δέσμης α περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{E} = 1.5\times10^4\ \vec{e}_x sin(1.2\times10^7 y - 3.6\times10^{15} t)$$

όπου τα x και y είναι σε μέτρα, το t σε δευτερόλεπτα και το E σε N/C. Η δέσμη εισέρχεται στο σημείο Ο το οποίο λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Στο εσωτερικό του πρίσματος, η δέσμη αλλάζει στην β με μειωμένη ένταση ακτινοβολίας κατά 64% σε σχέση με την α. Ακολούθως, μέρος της δέσμης ανακλάται στο σημείο Κ (και μέρος διαφεύγει εκτός) και το μαγνητικό πεδίο της ανακλώμενης οριζόντιας δέσμης γ έχει μειωμένο πλάτος κατά 75% σε σχέση με την β. Κατά την διάθλαση στο Ο και κατά την ανάκλαση στο Κ δεν αλλάζει ούτε η πόλωση του μαγνητικού πεδίου αλλά ούτε και η συχνότητα της ακτινοβολίας. Εάν η φάση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδέν

(α) Να γραφτούν οι μαθηματικές εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}''$ και του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}''$ παντού επάνω στη δέσμη γ

(β) να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{E}''$ και $\vec{B}''$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15}\ s$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $d = 0.25\ \mu m$ (micrometers) από το Κ κατά μήκος της γ.



Λύση:

(α) Το δεδομένο ηλεκτρικό πεδίο (δέσμη α) είναι της μορφής:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x sin(ky - \omega t)$$

με $E_0 = 1.5\times10^4$, $k = 1.2\times10^7$ και $\omega = 3.6\times10^{15}$ (μονάδες S.I.). Από την Εξ. 12.14 παίρνουμε για την ταχύτητα αυτού του κύματος

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{3.6\times10^{15}}{1.2\times10^7} = 3\times10^8\ m/s$$

όπως αναμένεται αφού αυτή είναι η ταχύτητα του φωτός c στον αέρα. Από την Εξ. 12.13, η ταχύτητα αυτή αλλάζει μέσα στο πρίσμα σε

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3\times 10^8}{\sqrt{3/2}} = 2.45\times 10^8\ m/s$$

Αφού από την εκφώνηση, η συχνότητα $\omega = 3.6\times 10^{15}\ rad/s$ δεν αλλάζει, τότε από την Εξ. 12.14 αναγκαστικά αλλάζει το k σε νέο k' ως εξής

$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{3.6\times 10^{15}}{2.45\times 10^8} = 1.47\times 10^7\ rad/m$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης α, αυτή συνεχίζει ανενόχλητη την πορεία της κατά μήκος του άξονα-y μέσα στο πρίσμα και άρα το ηλεκτρικό πεδίο της β θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}' = E_0{}'\vec{e}_x sin(k'y - \omega t)$$

Αφού το $\vec{E}'$ είναι πολωμένο κατά τον άξονα x και το κύμα ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα y, τότε αναγκαστικά το $\vec{B}'$ είναι πολωμένο κατά τον άξονα z δηλαδή

$$\vec{B}' = B_0{}'\vec{e}_z sin(k'y - \omega t)$$

Από την Εξ. 12.10 η ένταση της ακτινοβολίας εξαρτάται τετραγωνικά από το πλάτος E_0 και άρα η μείωσή της κατά 64% σε σχέση με την α συνεπάγεται την αντίστοιχη μείωση του E_0 κατά 80% δηλαδή

$$E_0' = 0.8E_0 = 0.8\times 1.5\times 10^4 = 1.2\times 10^4\ N/C$$

Από την Εξ. 12.6, τα E_0 και B_0 είναι ανάλογα και άρα μείωση του B_0 κατά 75%, συνεπάγεται και μείωση του E_0 κατά το ίδιο ποσοστό. Έτσι εάν $E_0{}''$ είναι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου της γ, τότε θα ισχύει

$$E_0{}'' = 0.75E_0{}' = 0.75\times 1.2\times 10^4 = 0.9\times 10^4\ N/C$$

Όσον αφορά την πόλωση του $\vec{E}$, αυτή θα πρέπει να αλλάξει από $\vec{e}_x$ σε $-\vec{e}_y$ αφού αλλάζει η κατεύθυνση διάδοσης από $+y$ σε $+x$ χωρίς να αλλάζει η πόλωση του $\vec{B}$ η οποία είναι αναγκαστικά κατά μήκος του $\vec{e}_z$ ώστε τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και $\vec{k}$ να σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα. Από την Εξ. 12.6, το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο έχει πλάτος

$$B_0'' = \frac{E_0''}{c} = \frac{0.9\times 10^4}{3\times 10^8} = 0.3\times 10^{-4}\ T$$

Εφόσον οι δέσμες β και γ ταξιδεύουν στο ίδιο υλικό, τότε θα έχουν και τον ίδιο κυματάριθμο δηλαδή $k'' = k' = 1.47\times 10^7\ rad/m$ (σύμφωνα την εκφώνηση η συχνότητα δεν αλλάζει οπότε $\omega'' = \omega' = \omega = 3.6\times 10^{15}\ rad/s$. Μαζεύοντας όλες αυτές τις πληροφορίες μαζί, το Η/Μ πεδίο της γ θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}'' = E_0{}''(-\vec{e}_y)sin(k''x - \omega'' t)$$

$$\vec{B}'' = B_0{}''(\vec{e}_z)sin(k''x - \omega'' t)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι το όρισμα του ημιτόνου περιέχει το x ως χωρική μεταβλητή και όχι το y αφού η δέσμη γ ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα-x. Αντικαθιστώντας:

$$\vec{E}'' = 0.9\times 10^{4}(-\vec{e}_y)sin(1.65\times 10^{7}x - 3.3\times 10^{15}t)$$

$$\vec{B}'' = 0.3\times 10^{-4}(\vec{e}_z)sin(1.65\times 10^{7}x - 3.3\times 10^{15}\ t)$$

Προσέξτε ότι στις παραπάνω εκφράσεις μέσα στο όρισμα του ημιτόνου δεν χρειάζεται κάποια επιπλέον αρχική φάση αφού στο σημείο Κ που βρίσκεται στο $x = 0$, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η φάση είναι 0 όπως προβλέπουν οι παραπάνω εξισώσεις.

(β) Κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15}\ s$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $x = 0.25\ \mu m$ από το Κ, η φάση των δυο πεδίων είναι ίση με

$$k''x - \omega''t = 1.47\times 10^{7}\times 0.25\times 10^{-6} - 3.6\times 10^{15}\ \times 10^{-15} = 0.075\ rad$$

Έτσι τα παραπάνω δυο μεγέθη γίνονται

$$\vec{E}'' = 0.9\times 10^{4}(-\vec{e}_y)sin(0.075\ ) = -674\vec{e}_y\ N/C$$

$$\vec{B}'' = 0.3\times 10^{-4}(\vec{e}_z)sin(0.075\ ) = 2.25\times 10^{-6}\vec{e}_z\ T$$