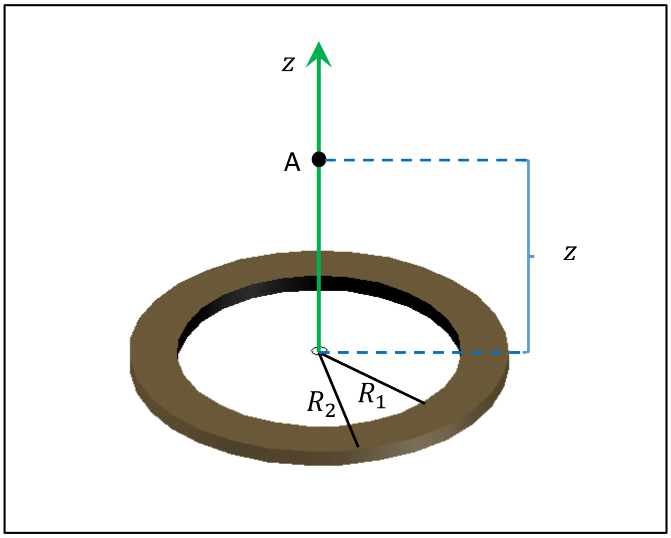
- Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2, με φορτίο Q και αμελητέο ύψους κατά z, σε σημείο Α που βρίσκεται επάνω στη μεσοκάθετό του και απέχει απόσταση z από το κέντρο του, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου απειροελάχιστου πάχους, ακτίνας R και φορτίου q (και όχι κάποια άλλη μέθοδο ή γνωστό αποτέλεσμα):

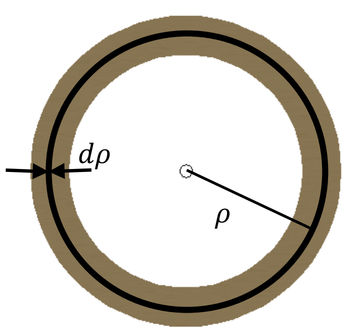
$$E = kq\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$



Απάντηση: $2kQz\left(1 - z/\sqrt{z^2+R^2}\right)/({R_2}^2 - {R_1}^2)$

Λύση:

Χωρίζουμε τον δακτύλιο σε μικρούς απειροστούς δακτυλίους ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$ και φορτίο dq ο καθένας.



Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.5 στην παρακάτω διαφορική μορφή για το απειροστό πεδίο dE που δημιουργεί ένας τέτοιος δακτύλιος στο σημείο Α:

$$dE = kdq\frac{z}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Το εμβαδό που καταλαμβάνει ο απειροστός δακτύλιος ισούται με $2\pi\rho d\rho$ (μήκος × πλάτος). Επειδή ο δεδομένος δακτύλιος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος, ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος και με τον λόγο των φορτίων. Εφαρμόζοντας αυτή την ιδέα για τον απειροστό και για τον όλο δακτύλιο, οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi\rho d\rho}{A}$$

όπου A είναι το εμβαδό του δεδομένου δακτυλίου το οποίο προκύπτει εύκολα με αφαίρεση των εμβαδών δυο κύκλων:

$$A = \pi {R_2}^2 - \pi {R_1}^2$$

Έτσι

$$dq = \frac{2\rho d\rho}{{R_2}^2 - {R_1}^2}Q$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του στοιχειώδους δακτυλίου γίνεται

$$dE = \frac{kzQ}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\frac{2\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

η οποία ολοκληρώνεται εύκολα από $\rho = 0$ έως και $\rho = R$ κάνοντας χρήση του διαφορικού του τετραγώνου:

$$2\rho d\rho = d\rho^2$$

Αφού το z είναι σταθερό (όσον αφορά την ολοκλήρωση ως προς ρ), τότε μπορούμε να προσθέσουμε το τετράγωνό του ως σταθερά μέσα στο διαφορικό και να έχουμε

$$2\rho d\rho = d(\rho^2 + z^2)$$

Επομένως η ολοκλήρωση οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$E = \frac{kQz}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\int_{\rho=0}^{R}\frac{d(\rho^2+z^2)}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2kQz}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

(έγινε χρήση του $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ με $n = -3/2$).

- Το ηλεκτρικό πεδίο ενός μονωτικού κυλίνδρου ακτίνας R και απείρου μήκους με τον άξονα συμμετρίας του κατά μήκος του άξονα z, ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος) δίνεται από την έκφραση $\vec{E} = E\vec{e}_\rho$ όπου $\vec{e}_\rho$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της πολικής ακτίνας ρ στις κυλινδρικές συντεταγμένες και

$$E = \begin{cases} \dfrac{\eta R^2}{2\varepsilon_0 \rho} & \rho \geq R \\ \dfrac{\eta \rho}{2\varepsilon_0} & \rho \leq R \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το αντίστοιχο δυναμικό μηδενίζεται στο $\rho = 0$ (συνοριακή συνθήκη) και είναι μια συνεχής συνάρτηση του ρ (συνθήκη συνέχειας).

α. (**2 ΜΟΝ**) Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη αλλά και τη συνθήκη συνέχειας, να βρεθεί το δυναμικό ενός τέτοιου κυλίνδρου παντού στο χώρο.

β. (**8 ΜΟΝ**) Έστω δυο τέτοιοι κύλινδροι ίσων ακτίνων R, ο ένας κατά μήκος του άξονα z με χωρική πυκνότητα φορτίου η_1 και ένας δεύτερος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\eta_2 = 3\eta_1$, παράλληλος με τον πρώτο και μετατοπισμένος κατά μήκος $\Delta x = +a$ όπου $a > 2R$ μια σταθερά με μονάδες μήκους. Με την βοήθεια της αρχής της επαλληλίας, να βρεθεί η εξίσωση της ισοδυναμικής επιφάνειας σε μορφή πολυωνύμου σε x και y (αποτελείται από δυο παράγοντες με σχετικά μεγάλες δυνάμεις, δεν χρειάζεται να το αναπτύξετε) για δυναμικό $0\,Volts$, εάν γνωρίζουμε ότι η ισοδυναμική βρίσκεται εξ' ολοκλήρου εκτός των δυο κυλίνδρων.

<u>Λύση</u>:

(α) Από την Εξ. 5.6 βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο του παρόντος προβλήματος έχει μόνο ρ-συνιστώσα στις κυλινδρικές συντεταγμένες, δηλαδή $E_\varphi = E_z = 0$ ενώ $E_\rho = E$ (το δεδομένο). Από την Εξ. 5.7α έχουμε $E_\rho = -dV/d\rho$ οπότε ολοκληρώνοντας ως προς ρ, οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\eta \rho^2}{4\varepsilon_0} + c_A & \rho \leq R \\ -\dfrac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} ln\rho + c_B & \rho \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Από την συνοριακή συνθήκη $V = 0$ στο $\rho = 0$ παίρνουμε $c_A = 0$ ενώ από την συνέχεια στο $\rho = R$ παίρνουμε

$$-\frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} lnR + c_B = -\frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0} => c_A = \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} lnR - \frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των λογαρίθμων $lnA - lnB = ln(A/B)$ οδηγεί στο:

$$V = \begin{cases} -\frac{\eta\rho^2}{4\varepsilon_0} & \rho \leq R \\ -\frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\eta R^2}{4\varepsilon_0} & \rho \geq R \end{cases}$$

(β) Για τους δυο κυλίνδρους έχουμε

$$V_1 = \begin{cases} -\frac{\eta_1\rho_1}{4\varepsilon_0} & \rho_1 \leq R \\ -\frac{\eta_1 R^2}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) - \frac{\eta_1 R^2}{4\varepsilon_0} & \rho_1 \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ για τον πρώτο με κέντρο στο $(0,0)$ και

$$V_2 = \begin{cases} -\frac{\eta_2\rho_1}{4\varepsilon_0} & \rho_2 \leq R \\ -\frac{\eta_2 R^2}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) - \frac{\eta_2 R^2}{4\varepsilon_0} & \rho_2 \geq R \end{cases}$$

όπου $\rho_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ για τον δεύτερο με κέντρο στο $(a, 0)$.

(β) Από την αρχή της επαλληλίας για την περιοχή εκτός των κυλίνδρων, έχουμε για μηδενικό δυναμικό:

$$V = V_1 + V_2 = 0 =>$$

$$-\frac{\eta_1 R^2}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) - \frac{\eta_1 R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\eta_2 R^2}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) - \frac{\eta_2 R^2}{4\varepsilon_0} = 0$$

Όμως $\eta_1 = 3\eta_2$ και έτσι

$$ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + \frac{1}{2} + 3ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

$$ln\left(\frac{\rho_1}{R}\right) + ln\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3 = -2$$

$$ln\left[\left(\frac{\rho_1}{R}\right)\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3\right] = -2$$

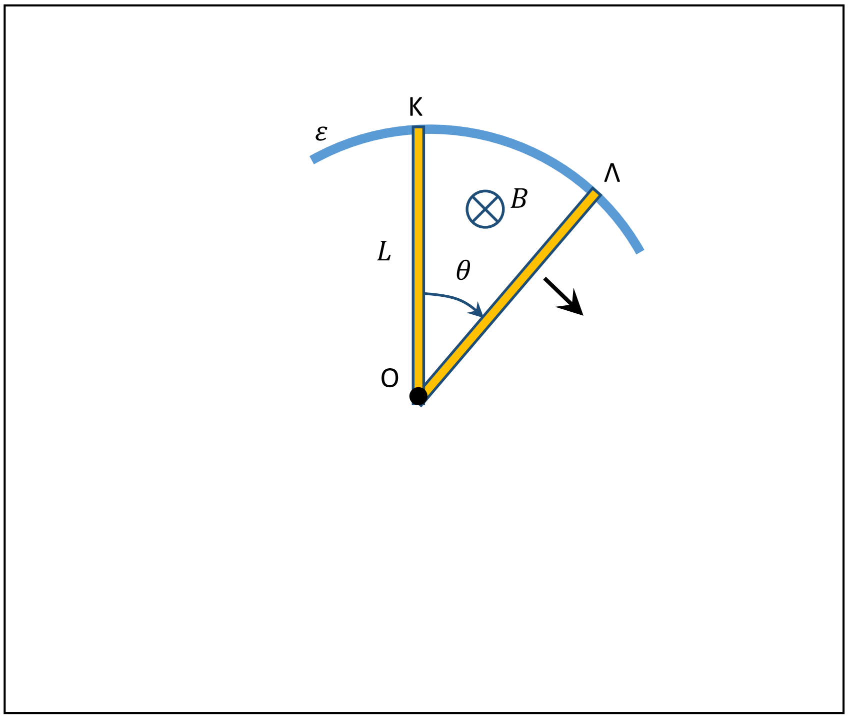
$$\left(\frac{\rho_1}{R}\right)\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^3 = e^{-2}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να φύγουν οι ρίζες από τα δυο ρ και έχουμε

$${\rho_1}^2{\rho_2}^6 = R^8 e^{-4}$$

$$(x^2 + y^2)^2((x-a)^2 + y^2)^6 = R^8 e^{-4}$$

- Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας σταθερός καμπύλος αγωγός ε σε σχήμα τόξου, ένας δεύτερος επίσης σταθερός ευθύγραμμος αγωγός ΟΚ μήκους L και ένας τρίτος ευθύγραμμος αγωγός ΟΛ ίσου μήκους L ο οποίος περιστρέφεται γύρω από το Ο. Και οι τρεις αγωγοί έχουν καλή ηλεκτρική επαφή μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν ένα πλαίσιο με μορφή κυκλικού τομέα. Στον χώρο υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B κάθετο στη σελίδα προς τα μέσα. Αρχικά η γωνία $K\hat{O}\Lambda = 45^0$ αλλά στο $t = 0$ μια εξωτερική δύναμη προσδίνει γωνιακή επιτάχυνση $\pi/6\, rad/s^2$ στον αγωγό ΟΛ μέχρις ότου $K\hat{O}\Lambda = 180^0$ οπότε και ο αγωγός οδηγείται απότομα σε ηρεμία. Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης στο πλαίσιο συναρτήσει του χρόνου, για όλους τους χρόνους από $-\infty$ μέχρι $+\infty$. (Χρήσιμοι τριγωνομετρικοί αριθμοί: $sin30^0 = 0.5,\ cos\, 30^0 = \sqrt{3}/2,\ sin60^0 = \sqrt{3}/2,\ cos\, 60^0 = 0.5$. Επίσης κάποια εμβαδά μπορούν να προκύψουν με απλές αναλογίες)



Λύση:

Σε κάθε χρονική στιγμή, το πλαίσιο OKL' αλλάζει εμβαδό αλλά όχι σχήμα, παραμένει πάντοτε ένας κυκλικός τομέας. Με απλή αναλογία, περιμένουμε το εμβαδό A ενός κυκλικού τομέα να είναι ανάλογο της γωνίας του (εάν διπλασιάσουμε την γωνία του περιμένουμε να διπλασιάζεται το εμβαδό του). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το A συγκρινόμενο με το εμβαδό πL^2 ενός κύκλου ίδιας ακτίνας L, αναλογιζόμενοι ότι η γωνία του κύκλου είναι ίση με 2π:

$$\frac{A}{\pi L^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{\theta}{2} L^2$$

Εφόσον πήραμε τη γωνία του κύκλου σε *rad* τότε αναγκαστικά και η θ πρέπει να είναι σε *rad*. Η μαγνητική ροή ισούται με

$$\Phi_M = BA = \frac{B\theta}{2}L^2$$

Στο παρόν πρόβλημα, αρχικά $\theta(0) = \pi/4$ και υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \pi/6\, rad/s^2$ οπότε η θ εξαρτάται από τον χρόνο ως εξής:

$$\theta = \theta(0) + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}t^2$$

και η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = \frac{\pi}{8}BL^2 + \frac{\pi}{24}BL^2t^2$$

Η αντίστοιχη επαγόμενη τάση ισούται με

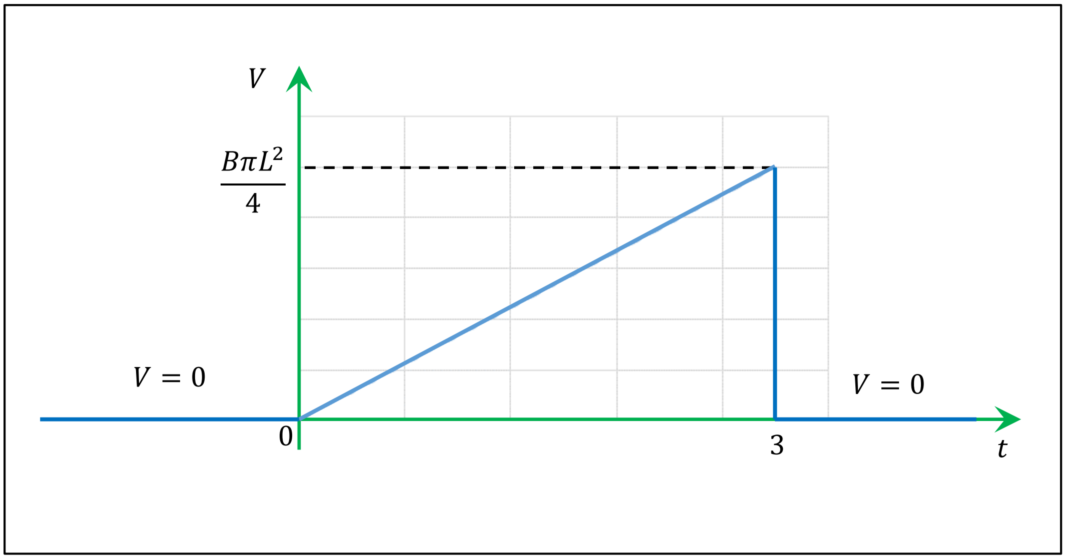
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{\pi}{12}BL^2t$$

Το πλαίσιο έρχεται σε ακινησία όταν $\theta = \pi$ οπότε

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}t^2 = \pi => t = 3\ s$$

και η τάση τότε ισούται με $V = \pi BL^2/4$

Όταν το πλαίσιο βρίσκεται σε ακινησία, το εμβαδό του κυκλικού τομέα είναι σταθερό και άρα και η ροή και επομένως $V = 0$. Αυτό ισχύει για αρνητικούς χρόνους και για $t > 3\ s$. Επομένως η γραφική παράσταση έχει τρεις τομείς, δυο εκ των οποίων μηδενικοί και ένα γραμμικό ως εξής:



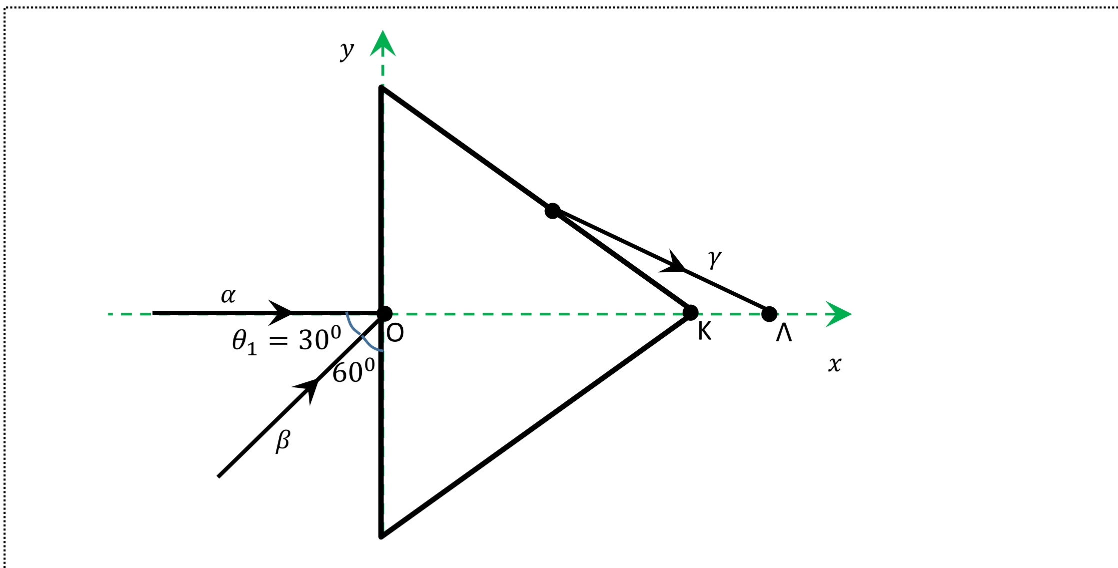
- Ένας φοιτητής κατευθύνει μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη α κάθετα σε μια επίπεδη επιφάνεια ενός λεπτού διαφανούς πρίσματος σε σχήμα ισόπλευρου τριγώνου με ύψος $h = 0.2\ m$ στο σημείο Ο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του (άξονας-x). Το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της δέσμης περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{E} = 1.5 \times 10^4\ \vec{e}_y sin(1.2 \times 10^7 x - 3.6 \times 10^{15} t)$$

όπου το x είναι σε μέτρα, το t σε δευτερόλεπτα και το E σε N/C. Αφού η δέσμη εισέλθει στο πρίσμα, η αντίστοιχη εξίσωση αλλάζει σε

$$\vec{E}' = 1.2 \times 10^4\ \vec{e}_y sin(1.8 \times 10^7 x - 3.6 \times 10^{15} t)$$

Ακολούθως ο φοιτητής στέλνει μια νέα δέσμη β με τα ίδια χαρακτηριστικά ακριβώς όπως της α αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό ώστε να προσπίπτει στο Ο με γωνία 60^0 ως προς την επίπεδη επιφάνεια. Παρατηρεί τότε ότι μια νέα δέσμη γ εξέρχεται από το σημείο Ρ στην πίσω και επάνω επιφάνεια του πρίσματος με τυχαίο προσανατολισμό. Να βρεθεί σε ποιο σημείο τέμνει η δέσμη γ τον άξονα-x εάν το Ο είναι η αρχή των συντεταγμένων.



<u>Λύση</u>: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μόλις η δέσμη β εισέλθει στο πρίσμα, θα διαθλασθεί και θα ακολουθήσει τη διαδρομή ΟΡ. Στο σημείο Ρ θα διαθλασθεί για δεύτερη φορά και θα τείνει προς τον άξονα-x. Για ευκολία στους γεωμετρικούς μας υπολογισμούς, φέρουμε την κάθετη ε στο Ρ η οποία τέμνει τον άξονα-x στο σημείο Σ. Θα εφαρμόσουμε τον νόμο διάθλασης του *Snell* Εξ. 13.7 στα σημεία Ο και Ρ αλλά χρειαζόμαστε τον δείκτη διάθλασης n του πρίσματος τον οποίο θα βρούμε από το πρώτο πείραμα του φοιτητή με την δέσμη α. Από την Εξ. 12.13

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{v}$$

όπου την ταχύτητα v της δέσμης μέσα στο πρίσμα την υπολογίζουμε από την Εξ. 12.14

$$v = \lambda f = \omega / k$$

Λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης α, αυτή συνεχίζει ανενόχλητη την πορεία της κατά μήκος του άξονα-x μέσα στο πρίσμα και άρα το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι της μορφής:

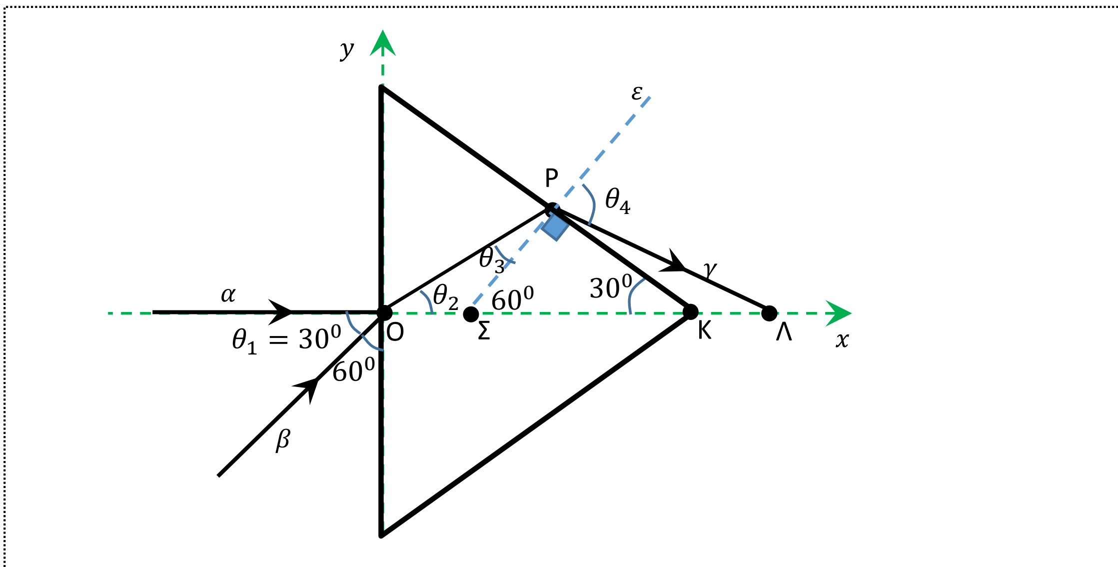
$$\vec{E}' = E_0 \vec{e}_y sin(kx - \omega t)$$

Συγκρίνοντας με το δεδομένο πεδίο έχουμε $k = 1.8 \times 10^7$ και $\omega = 3.6 \times 10^{15}$ (μονάδες S.I.) οπότε

$$v = \frac{3.6 \times 10^4}{1.8 \times 10^7} = 2.0 \times 10^8\, m/s$$

και επομένως

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1.5$$



Όλες οι γωνίες στον νόμο του *Snell* είναι σε σχέση με τις επιμέρους καθέτους. Έτσι στο O η γωνία πρόσπτωσης είναι η $\theta_1 = 30^0$ και η γωνία διάθλασης η θ_2. O δείκτης διάθλασης του αέρα είναι $n_1 = 1$ και έτσι η Εξ. 13.7 οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$n_2 sin\theta_2 = n_1 sin\theta_1 => sin\theta_2 = \frac{sin30^0}{1.5} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

οπότε $\theta_2 = 19.47^0$.

O άξονας -x διχοτομεί την κορυφή Κ του πρίσματος και άρα $\widehat{\Sigma K P} = 30^0$ που σημαίνει ότι στο τρίγωνο ΟΡΚ η γωνία $\theta_3 + 90^0$ είναι ίση με

$$\theta_3 + 90^0 = 180^0 - \theta_2 - 30^0$$

Λύνοντας

$$\theta_3 = 40.53^0$$

Αυτή είναι και η γωνία πρόσπτωσης στο σημείο P οπότε ο νόμος του *Snell* Εξ. 13.7 εκεί γράφεται ως εξής:

$$n_4 sin\theta_4 = n_3 sin\theta_3 \Rightarrow sin\theta_4 = 1.5 sin(40.53^0)$$

Λύνοντας $\theta_4 = 77.1^0$.

Στο τρίγωνο ΟΡΚ γνωρίζουμε όλες τις γωνίες

- $\theta_2 = 19.47^0$,
- $\widehat{\mathrm{OPK}} = 90^0 + \theta_3 = 130.53^0$ και
- $\Sigma\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{P} = 30^0$

Επίσης γνωρίζουμε ένα μήκος, το ύψος ΟΚ ίσο με $h = 0.2\ m$ επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο των ημιτόνων για να βρούμε το μήκος ΡΚ

$$\frac{\mathrm{PK}}{sin\theta_2} = \frac{\mathrm{OK}}{sin(90^0 + \theta_3)} \Rightarrow \mathrm{PK} = 0.088\ m$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΡΚΛ έχουμε για τις τρεις γωνίες

- $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{P}}\Lambda = 90^0 - \theta_4 = 12.9^0$
- $\mathrm{P}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = 180^0 - 30^0 = 150^0$ και άρα
- $\mathrm{K}\widehat{\Lambda}\mathrm{P} = 180^0 - 12.9^0 - 150^0 = 17.1^0$

Επίσης γνωρίζουμε από το προηγούμενο βήμα το μήκος $\mathrm{PK} = 0.088\ m$ επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νόμο των ημιτόνων για να βρούμε το επιθυμητό μήκος ΚΛ

$$\frac{\mathrm{K\Lambda}}{sin12.9^0} = \frac{\mathrm{PK}}{sin17.1^0} \Rightarrow \mathrm{K\Lambda} = 0.066\ m$$

Επομένως από το σημείο Ο το σημείο Λ απέχει

$$O\Lambda = OK + K\Lambda = 0.200 + 0.066 = 0.266\ m$$

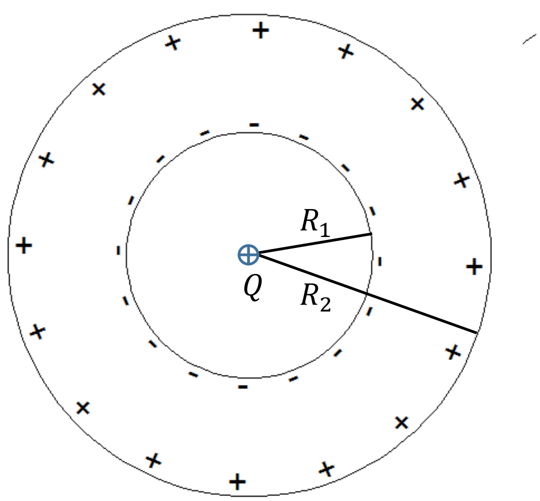
- Σημειακό φορτίο $+Q$ βρίσκεται στο κέντρο σφαιρικού αγώγιμου κελύφους εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2. (α) Περιγράψτε την κατανομή του επαγόμενου φορτίου στο κέλυφος. (β) Να βρεθεί με τη βοήθεια του νόμου του Gauss (και όχι κάποιας άλλης μεθόδου ή έτοιμου αποτελέσματος) το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. (γ) Να σχολιαστεί το αποτέλεσμα. **10 ΜΟΝ**

<u>Απάντηση</u>:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>:

(α) Το επαγόμενο φορτίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το θετικό φορτίο $+Q$ στο κέντρο του κελύφους, έλκει ηλεκτρόνια του αγωγού επειδή αυτά μπορούν και κινούνται ελεύθερα μέσα σε αυτόν. Είπαμε ότι το φορτίο στους αγωγούς καταλήγει πάντα στις επιφάνειες και έτσι ένα αρνητικό φορτίο $-Q$ ίσου μέτρου με το σημειακό θα αναπτυχθεί στην εσωτερική επιφάνεια του κελύφους. Εφόσον το κέλυφος ήταν αρχικά αφόρτιστο, τότε ένα ίσο και αντίθετο φορτίο $+Q$ θα αναπτυχθεί στην απέναντι ακριβώς επιφάνεια, δηλαδή στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους ώστε το κέλυφος να παραμένει ολικά ουδέτερο.



(β) Βασικά υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιοχές του χώρου: Ο κενός εσωτερικός χώρος σε σχήμα σφαίρας ακτίνας R_1, ο αγώγιμος χώρος του κελύφους μεταξύ της εσωτερικής ακτίνας R_1 και της εξωτερικής R_2 και ο εξωτερικός κενός χώρος που περιβάλλει το κέλυφος.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, περιμένουμε η κατανομή των Δ.Γ. να είναι ακτινική. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε ως επιφάνεια *Gauss* μια ιδεατή σφαίρα τυχαίας ακτίνας r, ομόκεντρη με το σημειακό φορτίο. Όπως εξηγούμε και στο βιβλίο, στην περίπτωση της φορτισμένης συμπαγούς σφαίρας στον εδάφιο με τον νόμο του *Gauss*, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ τέμνει παντού κάθετα την επιφάνεια *Gauss* και έτσι είναι παράλληλο με το διάνυσμα της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{A}$. Αυτό σημαίνει έτσι το μεταξύ τους εσωτερικό γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdAcos0^0 = EdA$$

είναι δηλαδή ίσο με το απλό γινόμενο των μέτρων των δυο διανυσμάτων. Έτσι ο νόμος του Gauss απλοποιείται σε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0} => \oint EdA = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα Gauss και Q_π είναι το περικλειόμενο φορτίο. Περιμένουμε η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών, και άρα και το E, να μην αλλάζει επάνω στη σφαίρα. Η πυκνότητα τους μικραίνει όσο απομακρύνονται προς το άπειρο αλλά επάνω στη σφαίρα παραμένει σταθερή. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από πλευράς σφαιρικής συμμετρίας: Οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας Gauss και εάν εξετάσουμε, "βλέπουμε" ακριβώς την ίδια κατανομή φορτίου στην ίδια απόσταση. Επομένως το E είναι σταθερό στην παραπάνω ολοκλήρωση και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \oint dA = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0}$$

Εάν θυμηθούμε ότι το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό του απειροστού τμήματος της σφαίρας στο σημείο P, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδό της σφαίρας που από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με $4\pi r^2$. Επομένως

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0} => E = \frac{Q_\pi}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Το μόνο που αλλάζει στους τρεις διαφορετικούς χώρους, είναι το περικλειόμενο φορτίο. Έτσι έχουμε:

Εσωτερικός χώρος: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $r < R_1$ και περικλείει μόνο το σημειακό φορτίο Q έτσι:

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Χώρος κελύφους: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $R_1 < r < R_2$ και περικλείει τόσο το σημειακό φορτίο Q όσο και την αρνητική κατανομή με ίσο και αντίθετο φορτίο. Έτσι: $Q_\pi = Q - Q = 0$ και

$$E = \frac{Q_\pi}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = 0$$

Επιβεβαιώνεται έτσι το θεώρημα που λέει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό των αγωγών είναι μηδέν.

Εξωτερικός χώρος: Η σφαίρα *Gauss* έχει ακτίνα $r > R_2$ και περικλείει τόσο το σημειακό φορτίο Q όσο και τις δυο κατανομές με ίσα και αντίθετα φορτία. Έτσι: $Q_\pi = Q - Q + Q = Q$ και

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_\pi}{\varepsilon_0} => E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στον κενό χώρο το πεδίο δεν διαφέρει από αυτό που παράγει το σημειακό φορτίο ενώ στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν. Συνοψίζοντας:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

- Δυο ετερόσημα σημειακά φορτία $q_1 = -\sqrt{\lambda}q$ και $q_2 = q/\sqrt{\lambda}$ όπου $q > 0$ μια σταθερά σε μονάδες *Coulomb* και $\lambda > 1$ ένας καθαρός αριθμός, βρίσκονται στον άξονα-x στις θέσεις $x = -a$ και $x = b$ αντίστοιχα.

α. (**2 ΜΟΝ**) Να βρεθεί η μαθηματική έκφραση των ισοδυναμικών επιφανειών στον τρισδιάστατο χώρο (σε μορφή εξίσωσης).

β. (**8 ΜΟΝ**) Η παραπάνω εξίσωση στο επίπεδο $x - y$ γίνεται μια καμπύλη. Να σχεδιαστεί αυτή η καμπύλη για δυναμικό $0\,Volts$ στην περίπτωση όπου $a = 3\,m$, $b = 1\,m$ και $\lambda = 2$ (σε μορφή γραφικής παράστασης)

Λύση:

(α) Το δυναμικό ενός σημειακού φορτίου q_1 σε απόσταση r_1 από αυτό, δίνεται από την

$$V = \frac{kq_1}{r_1}$$

Εδώ έχουμε δυο φορτία οπότε

$$V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}$$

Σε τυχαίο σημείο (x, y, z) στο χώρο, η απόσταση από το αρνητικό φορτίο που βρίσκεται στο $x = -a$ δίνεται από την

$$r = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$$

Ομοίως η απόσταση από το θετικό φορτίο που βρίσκεται στο $x = b$ δίνεται από την

$$r = \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}$$

Τις ισοδυναμικές τις βρίσκουμε θέτοντας $V =$ σταθ. Από τα παραπάνω έχουμε

$$V = -\frac{kq\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{kq\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} = \text{σταθ}$$

(β) Στο επίπεδο x-y έχουμε $z = 0$ οπότε η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$V = -\frac{kq\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{kq\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = \text{σταθ}$$

Για $V = 0$ έχουμε

$$\frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\frac{\lambda^{-1/2}}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο

$$\frac{\lambda}{(x+a)^2+y^2}=\frac{\lambda^{-1}}{(x-b)^2+y^2}$$

$$\lambda^2(x-b)^2+\lambda^2y^2=(x+a)^2+y^2$$

$$(\lambda^2-1)y^2=(x+a)^2-\lambda^2(x-b)^2$$

Θέτουμε $\mu^2=1/(\lambda^2-1)$ και έχουμε

$$y=\pm\mu\sqrt{(x+a)^2-\lambda^2(x-b)^2}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x+3)^2-2^2(x-1)^2}$$

Για να τη σχεδιάσουμε, θα πάρουμε πρώτα το θετικό κλάδο και θα βρούμε τις ρίζες της, την τετμημένη της επί της αρχής, το μέγιστό της και το πεδίο ορισμού της. Αφού τη σχεδιάσουμε, θα σχεδιάσουμε και τον αρνητικό κλάδο απλά ανεστραμμένο σε σχέση με τον θετικό κλάδο. Έτσι έχουμε

Ρίζες

$$(x+3)^2-2^2(x-1)^2=0 => x+3=\pm2(x-1)$$

$x_1=-1/3$ και $x_2=5$

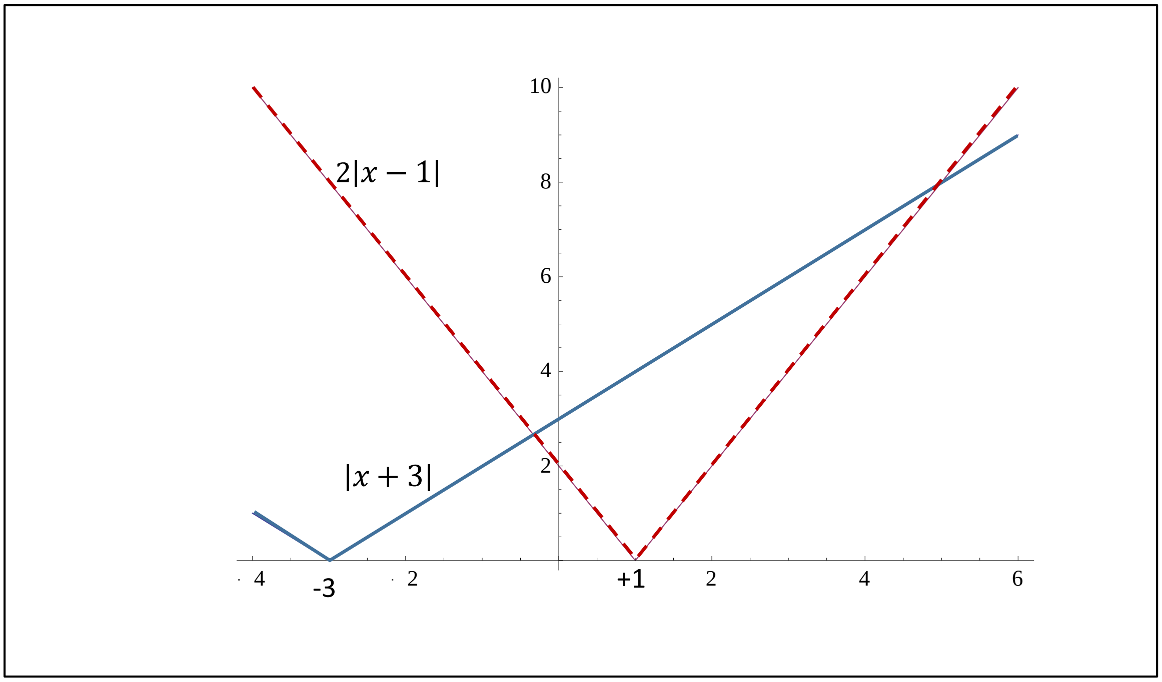
Ο θετικός κλάδος τέμνει τον άξονα στο $x=0$ με τετμημένη επί της αρχής

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3^2-2^21^2}=\sqrt{5/3}=1.29$$

Πεδίο ορισμού, πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι αρνητική

$$(x+3)^2-2^2(x-1)^2>0 => (x+3)^2>2^2(x-1)^2 => |x+3|>2|x-1|$$

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $|x+3|$ και $2|x-1|$ (η δεύτερη με διακεκομμένη γραμμή). Αυτές οι δυο τέμνονται επάνω στις δυο ρίζες $x_1=-1/3$ και $x_2=5$ που είδαμε παραπάνω. Βλέπουμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο στην περιοχή μεταξύ των ριζών (εκτός αυτών δεν ορίζεται η ρίζα). Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $x_1<x<x_2$



Μέγιστο, παραγωγίζω την υπόριζο ποσότητα και την θέτω ίση με μηδέν

$$\frac{d}{dx}[(x+3)^2-2^2(x-1)^2]=0 => 2(x+3)-8(x-1)=0 => x=7/3$$

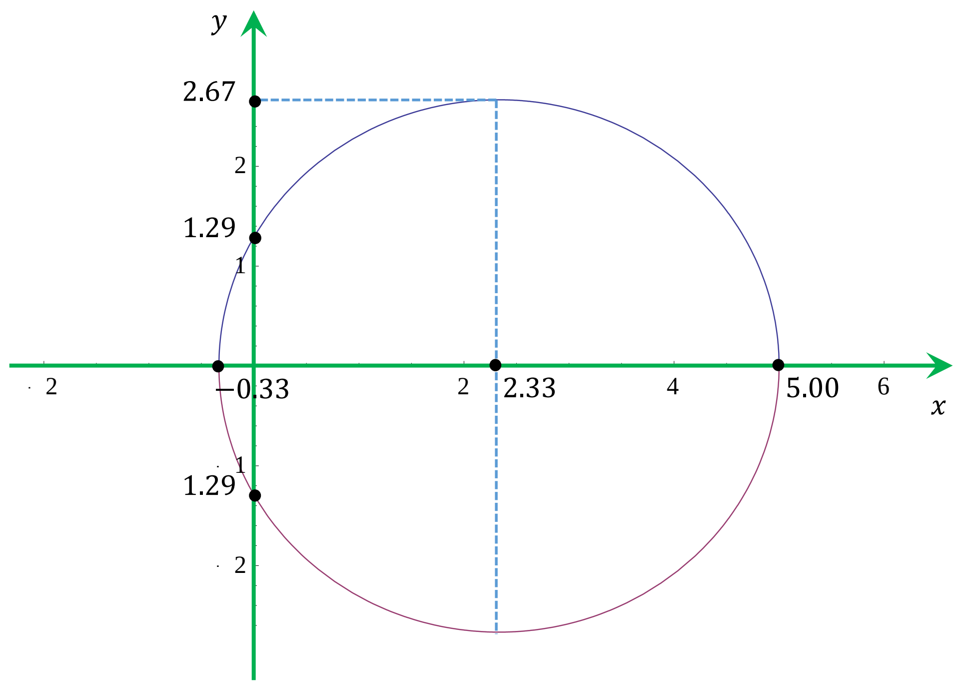
Εκεί ο θετικός κλάδος λαμβάνει τιμή

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(7/3+3)^2-2^2(7/3-1)^2}=\frac{8}{3}=2.67$$

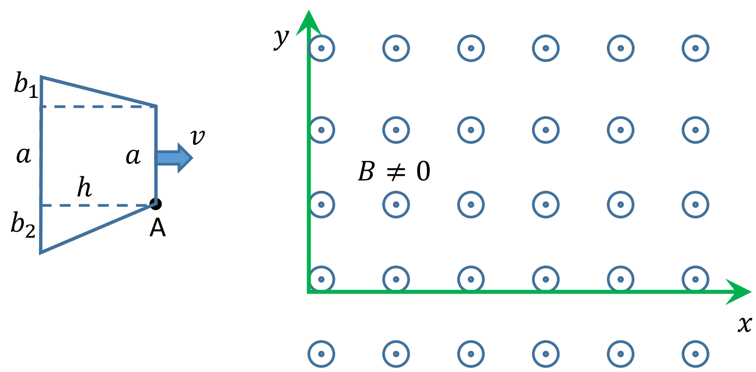
Συμπεριλαμβάνοντας θετικό και αρνητικό κλάδο

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x+3)^2-2^2(x-1)^2}$$

η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω. Φαίνεται σαν να είναι κύκλος αλλά είναι ο συνδυασμός δυο υπερβολών, μια για θετικά y και μια για αρνητικά.


y
2.67
2
1.29
1
2
−0.33
2
2.33
4
5.00
6
x
1
1.29
2

- Στο παρακάτω σχήμα, ένα κλειστό συρμάτινο πλαίσιο με μορφή τραπεζίου με βάσεις μήκους a και $a + b_1 + b_2$ και ύψους h εισέρχεται με ταχύτητα v μέσα σε ημιάπειρο χώρο όπου υπάρχει ομοιογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου B και με φορά έξω από την σελίδα μόνο για $x \geq 0$ ενώ $B = 0$ για $x < 0$. Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ακμή Α του πλαισίου μόλις που εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου (έρχεται σε επαφή με τον άξονα y), να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης τάσης στο πλαίσιο συναρτήσει του χρόνου, για όλους τους χρόνους από $-\infty$ μέχρι $+\infty$. (**10 ΜΟΝ**)



Λύση:

Αρχικά το πλαίσιο βρίσκεται εκτός της περιοχής και έτσι η μαγνητική ροή είναι $\Phi_M = 0$ και από τον νόμο του *Faraday* $V = d\Phi_M/dt$ και η επαγόμενη τάση είναι μηδέν. Αυτό γίνεται μέχρι το σημείο Α να αγγίξει το πλαίσιο οριακά την περιοχή, δηλαδή μέχρι και χρόνο

$$t = 0$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σε κατοπινό χρόνο $t \geq 0$, μόνο το σκιαγραμμένο τμήμα του πλαισίου βρίσκεται μέσα στην μαγνητική περιοχή και άρα η μαγνητική ροή που διαπερνάει το πλαίσιο περιορίζεται μόνο σε αυτό το τμήμα. Η μορφή αυτού του τμήματος είναι επίσης τραπεζίου με ύψος ίσο με

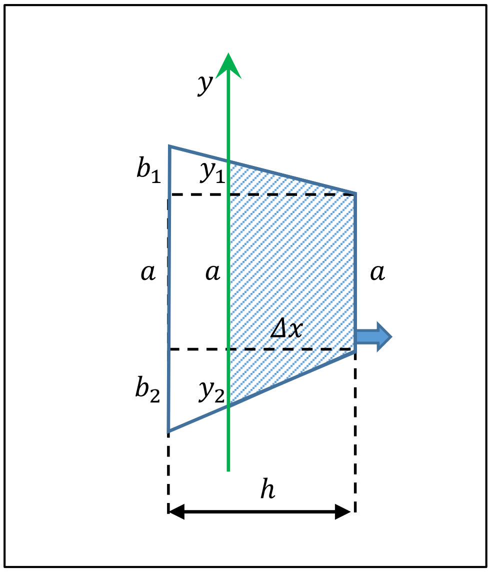
$$\Delta x = vt$$

ενώ μη μια βάση του εξακολουθεί να είναι a ενώ η άλλη ίση με $a + y_1 + y_2$. Από απλή ομοιότητα των τριγώνων βλέπουμε ότι

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{\Delta x}{h} => y_1 = \frac{b_1 v}{h} t$$

και ομοίως

$$\frac{y_1}{b_1} = \frac{\Delta x}{h} => y_2 = \frac{b_2 v}{h} t$$



Το εμβαδό ενός τραπεζίου δίνεται από την *(βάση1 + βάση2) * ύψος / 2* και άρα το εμβαδό του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στη μαγνητική περιοχή είναι ίσο με

$$A = \frac{a + (a + y_1 + y_2)}{2}\Delta x = a\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x = a\Delta x + \frac{b_1 + b_2}{2h}(\Delta x)^2$$

ή

$$A = avt + \frac{b_1 + b_2}{2h}(vt)^2$$

και έτσι η μαγνητική ροπή είναι

$$\Phi_M = BA = Bavt + B\frac{b_1 + b_2}{2h}(vt)^2$$

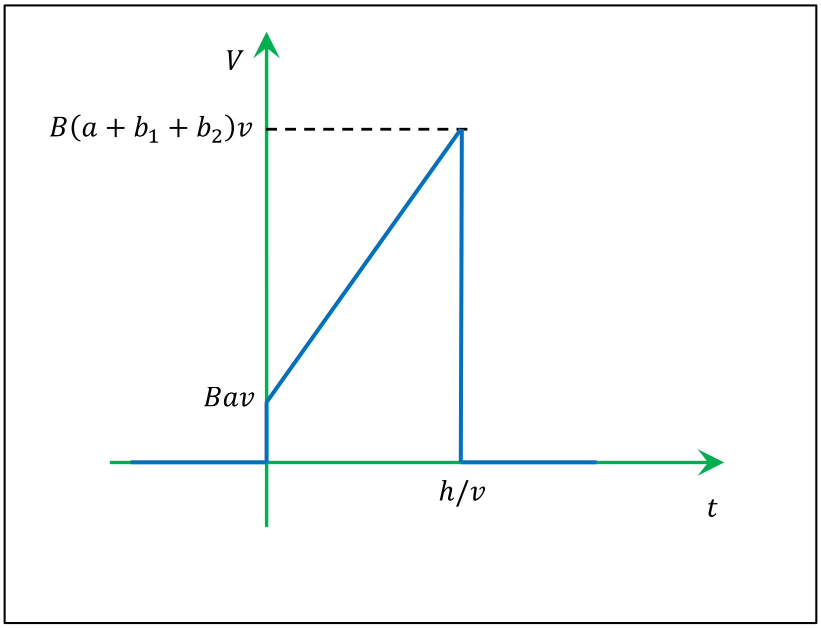
Η επαγόμενη τάση είναι ίση με (κατά απόλυτο μέτρο)

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = Bav + B\frac{b_1 + b_2}{h}v^2 t$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει τάση ακόμη και στο $t = 0$ ίση με $V_0 = Bav$. Αυτή η φάση διαρκεί μέχρι και το χρόνο $t = h/v$ οπότε και οριακά όλο το πλαίσιο εισέρχεται στην περιοχή. Αυτό το σημείο η οριακή τιμής της τάσης γίνεται

$$V = Bav + B(b_1 + b_2)v = B(a + b_1 + b_2)v$$

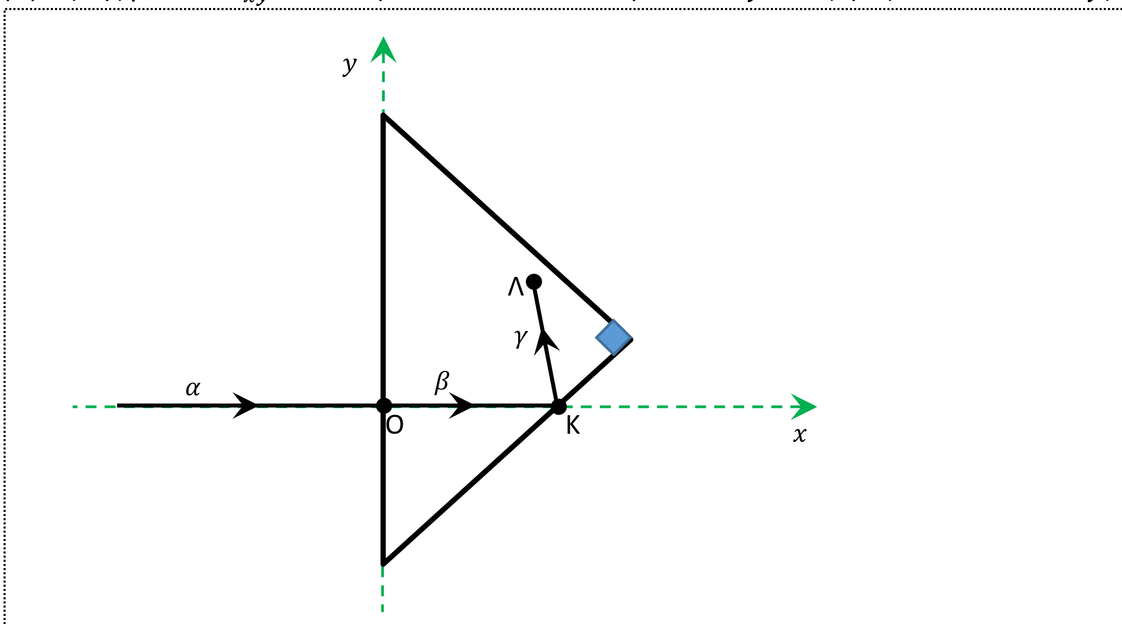
Μετά από αυτόν τον χρόνο, το πλαίσιο αποκτά σταθερή ροή $\Phi_M = BA_0$ όπου A_0 είναι το εμβαδό του όλου πλαισίου και η επαγόμενη τάση είναι ίση με $V = d\Phi_M/dt = 0$. Η γραφική παράσταση V συναρτήσει του χρόνου t φαίνεται παρακάτω. Είναι μηδενική στα άκρα και γραμμική στη μέση. Έχει ασυνέχειες.



- Ένας φοιτητής κατευθύνει μια φωτεινή μονοχρωματική δέσμη α κάθετα σε μια επίπεδη επιφάνεια ενός λεπτού διαφανούς πρίσματος σε σχήμα ισοσκελούς ορθογώνιου τριγώνου με δείκτη διάθλασης $3/2$, προς την αρχή των συντεταγμένων O κατά μήκος του άξονα x (δείτε παρακάτω σχήμα) ο οποίος είναι παράλληλος με τον άξονα συμμετρίας του πρίσματος. Το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της δέσμης περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{E} = 2.5 \times 10^4\, \vec{e}_y sin(1.1 \times 10^7 x - 3.3 \times 10^{15} t)$ όπου το x είναι σε μέτρα, το t σε δευτερόλεπτα και το E σε N/C. Στο εσωτερικό η δέσμη αλλάζει στην β με μειωμένη ένταση ακτινοβολίας κατά 64% σε σχέση με την α. Ακολούθως, μέρος της δέσμης ανακλάται στο σημείο K (και μέρος διαφεύγει εκτός) και το μαγνητικό πεδίο της ανακλώμενης δέσμης γ έχει μειωμένο πλάτος κατά 75% σε σχέση με την β. Κατά την διάθλαση στο O και κατά την ανάκλαση στο K δεν αλλάζει ούτε η πόλωση του μαγνητικού πεδίου αλλά ούτε και η συχνότητα της ακτινοβολίας. Εάν η φάση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο K την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδέν

α. (6 ΜΟΝ) Να γραφτούν οι μαθηματικές εκφράσεις του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}''$ και του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}''$ παντού επάνω στη δέσμη γ

β. (4 ΜΟΝ) να βρεθούν τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{E}'' \cdot \vec{e}_{xy}$ και $\vec{B}'' \cdot \vec{e}_{xy}$ κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15}\, s$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $d = 0.25\, \mu m$ (micrometers) από το K κατά μήκος της γ, όπου $\vec{e}_{xy}$ είναι το μοναδιαίο επάνω στην ευθεία $y = x$ (προς τα θετικά x και y)



Λύση:

(α) Το δεδομένο πεδίο ηλεκτρικό πεδίο (δέσμη α) είναι της μορφής:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y sin(kx - \omega t)$$

με $E_0 = 2.5 \times 10^4$, $k = 1.1 \times 10^7$ και $\omega = 3.3 \times 10^{15}$ (μονάδες S.I.). Από την Εξ. 12.14 παίρνουμε για την ταχύτητα αυτού του κύματος

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{3.3 \times 10^{15}}{1.1 \times 10^7} = 3 \times 10^8\, m/s$$

όπως αναμένεται αφού αυτή είναι η ταχύτητα του φωτός c στον αέρα. Από την Εξ. 12.13, η ταχύτητα αυτή αλλάζει μέσα στο πρίσμα σε

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{3/2} = 2 \times 10^8 \; m/s$$

Αφού από την εκφώνηση, η συχνότητα $\omega = 3.3 \times 10^{15} \; rad/s$ δεν αλλάζει, τότε από την Εξ. 12.14 αναγκαστικά αλλάζει το k σε νέο k' ως εξής

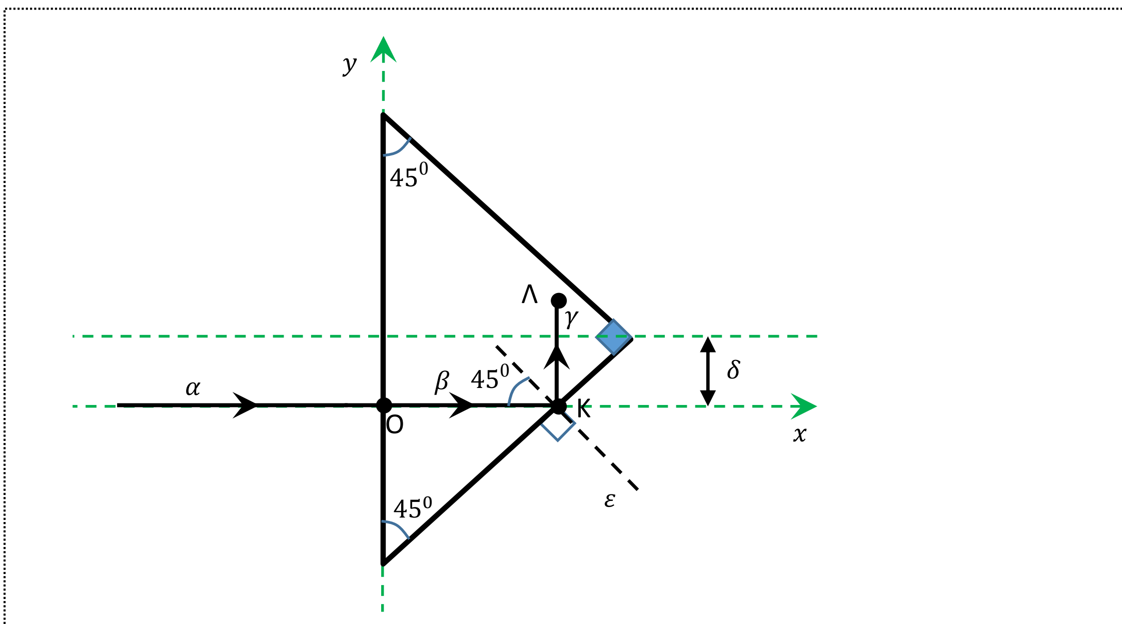
$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{3.3 \times 10^{15}}{2 \times 10^8} = 1.65 \times 10^7 \; rad/m$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης α, αυτή συνεχίζει ανενόχλητη την πορεία της κατά μήκος του άξονα-x μέσα στο πρίσμα και άρα το ηλεκτρικό πεδίο της β θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}' = E_0{}'\vec{e}_y sin(k'x - \omega t)$$

Από την Εξ. 12.10 η ένταση ακτινοβολίας εξαρτάται τετραγωνικά από το πλάτος E_0 και άρα η μείωσή της κατά 64% σε σχέση με την α συνεπάγεται την αντίστοιχη μείωση του E_0 κατά 80% δηλαδή

$$E_0' = 0.8E_0 = 0.8 \times 2.5 \times 10^4 = 2.0 \times 10^4 \; N/C$$



Επειδή το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές, οι δυο ίσες γωνίες του είναι 45^0 η καθεμία. Φέρουμε την κάθετη ε στο Κ και παρατηρούμε ότι η γωνία πρόσπτωσης της β είναι και αυτή ίση με την κάτω γωνία 45^0 του πρίσματος (καθετότητα των πλευρών των δυο γωνιών). Επομένως από τον νόμο της ανάκλασης Εξ. 13.1 και η γωνία ανάκλασης θα είναι 45^0 και άρα η δέσμη εκτρέπεται συνολικά κατά 90^0 στο σημείο Κ και έτσι η γ ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα-y.

Από την Εξ. 12.6, τα E_0 και B_0 είναι ανάλογα και άρα μείωση του B_0 κατά 75%, συνεπάγεται και μείωση του E_0 κατά το ίδιο ποσοστό. Έτσι εάν $E_0{}''$ είναι το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου της γ, τότε θα ισχύει

$$E_0'' = 0.6E_0' = 0.75 \times 2.0 \times 10^4 = 1.5 \times 10^4 \; N/C$$

Όσον αφορά την πόλωση του $\vec{E}$, αυτή θα πρέπει να αλλάξει από $\vec{e}_y$ σε $-\vec{e}_x$ αφού αλλάζει η κατεύθυνση διάδοσης από $+x$ σε $+y$ χωρίς να αλλάζει η πόλωση του $\vec{B}$ η οποία είναι αναγκαστικά κατά μήκος του $\vec{e}_z$ ώστε τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και $\vec{k}$ να σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα. Από την Εξ. 12.6, το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο έχει πλάτος

$$B_0'' = \frac{E_0''}{c} = \frac{1.5 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 0.5 \times 10^{-4} \; T$$

Εφόσον οι δέσμες β και γ ταξιδεύουν στο ίδιο υλικό, τότε θα έχουν και τον ίδιο κυματάριθμο δηλαδή $k'' = k' = 1.65 \times 10^7 \; rad/m$ (σύμφωνα την εκφώνηση η συχνότητα δεν αλλάζει οπότε $\omega'' = \omega' = \omega = 3.3 \times 10^{15} \; rad/s$. Μαζεύοντας όλες τις πληροφορίες μαζί, το Η/Μ πεδίο της γ θα είναι της μορφής:

$$\vec{E}'' = E_0''(-\vec{e}_x) sin(k''y - \omega''t)$$

$$\vec{B}'' = B_0''(\vec{e}_Z) sin(k''y - \omega''t)$$

Παρατηρήστε τώρα ότι το όρισμα του ημιτόνου περιέχει το y ως χωρική μεταβλητή και όχι το x αφού τώρα η δέσμη ταξιδεύει κατακόρυφα. Μαζεύοντας όλες τις πληροφορίες μαζί:

$$\vec{E}'' = 1.5 \times 10^4(-\vec{e}_x) sin(1.65 \times 10^7 y - 3.3 \times 10^{15} t)$$

$$\vec{B}'' = 0.5 \times 10^{-4}(\vec{e}_Z) sin(1.65 \times 10^7 y - 3.3 \times 10^{15} \; t)$$

Προσέξτε ότι στις παραπάνω εκφράσεις μέσα στο όρισμα του ημιτόνου δεν χρειάζεται κάποια επιπλέον αρχική φάση αφού στο σημείο Κ που βρίσκεται στο $y = 0$, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η φάση είναι 0 όπως προβλέπουν οι παραπάνω εξισώσεις.

(β) Κατά τη χρονική στιγμή $t = 10^{-15} \; s$ στο σημείο Λ της διαδρομής γ το οποίο απέχει απόσταση $y = 0.25 \; \mu m$ από το Κ, η φάση των δυο πεδίων είναι ίση με

$$k''y - \omega''t = 1.65 \times 10^7 \times 0.25 \times 10^{-6} - 3.3 \times 10^{15} \times 10^{-15} = 0.825 \; rad$$

Έτσι τα παραπάνω δυο μεγέθη γίνονται

$$\vec{E}'' = 1.5 \times 10^4(-\vec{e}_x) sin(0.825) = -1.1 \times 10^4 \vec{e}_x \; N/C$$

$$\vec{B}'' = 0.5 \times 10^{-4}(\vec{e}_Z) sin(0.825\;) = 0.37 \times 10^{-4} \vec{e}_Z \; T$$

Επειδή το $\vec{e}_{xy}$ είναι εξ' ολοκλήρου στο επίπεδο x-y τότε

$$\vec{B}'' \cdot \vec{e}_{xy} = 0$$

Για το άλλο εσωτερικό γινόμενο, πρέπει να εκφράσουμε το $\vec{e}_{xy}$ σε συνιστώσες. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\vec{e}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

(η τετραγωνική ρίζα του δυο είναι απαραίτητη ώστε το μέτρο του διανύσματος να είναι ίσο με μονάδα). Τελικά

$$\vec{E}'' \cdot \vec{e}_{xy} = -\frac{1.1}{\sqrt{2}} \times 10^4 \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = -\frac{1.1}{\sqrt{2}} \times 10^4 = 0.778 \times 10^4 \; S.I.$$