1α)

Σε ένα κύκλωμα RC συνεχούς με διακόπτη, αντίσταση $R = 650\,\Omega$ και πηγή $12\,V$ όλα σε σειρά, ο διακόπτης κλείνει στο $t = 0$ και ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Η διαφορά δυναμικού στον πυκνωτή φτάνει στο $1/\kappa$ της οριακής της τιμής έπειτα από χρονικό διάστημα $5.5\,s$. Ποιά είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή <u>σε F</u> εάν $\kappa = 5$;

<u>Λύση</u>:

Κατά την φόρτιση πυκνωτή (Εξ. 37 στις σημειώσεις Ηλεκτρομαγνητισμού)

$$V_C(t) = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Στο $t \to \infty$ η οριακή τιμή της V_C είναι

$$V_C(\infty) = E(1 - e^{-\infty}) = E(1 - 0) = E$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, σε χρονικό διάστημα $5.5\,s$ ισχύει $V_C = E/\kappa$ επομένως:

$$\frac{E}{\kappa} = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Λύνοντας

$$C = -\frac{t}{Rln\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)} = 0.038\,F$$

1β)

Κύκλωμα RC σε σειρά με $C = 20\,\mu F$, τροφοδοτείται από πηγή τάσης που περιγράφεται από την μαθηματική έκφραση $V_S = 200 sin(400t)$. Εάν η τάση της αντίστασης υπερτερεί της V_S κατά $\varphi = 42^0$, να βρεθεί το πλάτος του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε A.

Λύση:

Από τα δεδομένα $\omega = 400\; rad/s$ και έτσι

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{20 \times 10^{-6} \times 400} = 125\;\Omega$$

Για τη γωνία ισχύει

$$tan\varphi = \frac{Z_C}{R} => R = \frac{Z_C}{tan\varphi} = \frac{125}{tan(42^0)} = 139\;\Omega$$

Από τον ορισμό της ολικής εμπέδησης έχουμε

$$Z = \sqrt{{Z_C}^2 + R^2} = \sqrt{125^2 + 139^2} = 187\;\Omega$$

Από τα δεδομένα το πλάτος της τάσης της πηγής είναι $V_0 = 200\;V$ και έτσι το πλάτος του ρεύματος ισούται με:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{200}{187} = 1.07\;A$$

1γ)

Φοιτητής χρησιμοποιεί ένα κύκλωμα RLC το οποίο έχει πυκνωτή χωρητικότητας C_1 για να ακούσει τον αγαπημένο του ραδιοφωνικό σταθμό στα $100 - x$ FM. Λόγω βλάβης, αντικαθιστά τον πυκνωτή με ένα μικρότερο χωρητικότητας C_2 και παρατηρεί ότι τώρα λαμβάνει σήμα από έναν άλλο σταθμό που εκπέμπει στα $100 + x$ FM. Να βρεθεί σε ποια FM βρίσκεται ο αγαπημένος σταθμός του φοιτητή εάν δίνονται τα $C_1 = 24.2\ \mu F$ και $C_2 = 20\ \mu F$.

Λύση:

Το κύκλωμα RLC χρησιμοποιείται για να ενισχύσει μόνο μια από τις ραδιοφωνικές συχνότητες. Η κυκλική συχνότητα συντονισμού βρίσκεται από την

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

οπότε η συχνότητα δίνεται από την

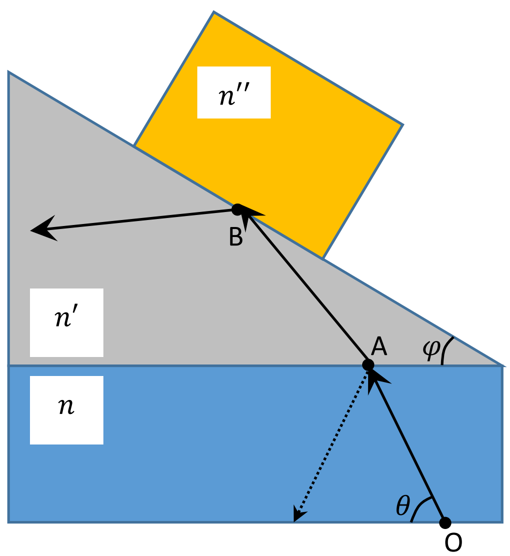
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Τα FM είναι σε μεγάκυκλους, δηλαδή σε MHz. Παίρνοντας λόγους πριν-μετά την αλλαγή του πυκνωτή:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} => \frac{100 + x}{100 - x} = \sqrt{\frac{24.2}{20}} = 1.1$$

Λύνοντας την αλγεβρική εξίσωση παίρνουμε $x = 4.8$ οπότε $f_1 = 100 - x = \ 95.2$ FM

2α) Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n, n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρος της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ στο σημείο Α ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Παρατηρείται ότι όταν η γωνία θ ελαττωθεί αρκετά, τότε στο σημείο Β υπάρχει μόνο ανάκλαση, δηλαδή δεν εισέρχεται φως στο πάνω ορθογώνιο. Εάν η θ είναι η οριακή γωνία που παρατηρείται αυτό το φαινόμενο, τότε να βρεθεί η τιμή της εάν δίνονται τα $n = 2\sqrt{2}$, $n' = 2$ και $n'' = \sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος.



Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Β, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Α και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Αφού οριακά δεν εμφανίζεται διαθλώμενη ακτίνα στο σημείο Β, τότε η $\theta_B{}'$ είναι εξ' ορισμού η κρίσιμη γωνία και θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$n' sin\theta_B' = n'' sin90^0 => sin\theta_B' = \frac{n''}{n'} = \frac{\sqrt{3}}{2} => \theta_B' = 60^0$$

Αυτή η γωνία είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta_A' + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\theta_B' = \theta_A' + \varphi'$$

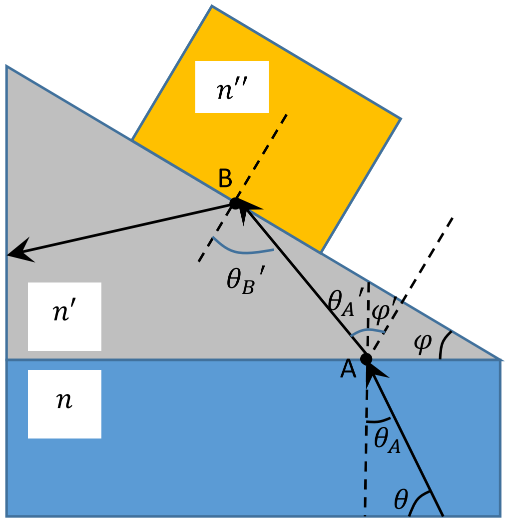
Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επομένως

$$\theta_A' = \theta_B' - \varphi = 60 - 15 = 45^0$$

Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Α

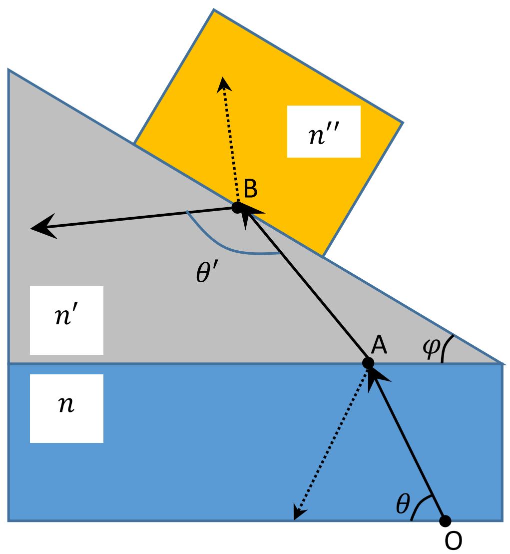
$$n sin\theta_A = n' sin\theta_A' => sin\theta_A = \frac{n'}{n} sin\theta_A' = \frac{2}{2\sqrt{2}} sin45^0 = \frac{1}{2}$$

οπότε $\theta_A = 30^0$. Η ζητούμενη γωνία είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta = 60^0$.



2γ)

Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n, n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρος της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Παρατηρείται ότι όταν η γωνία θ ελαττωθεί αρκετά, τότε στο σημείο Β υπάρχει μόνο ανάκλαση, δηλαδή δεν εισέρχεται φως στο πάνω ορθογώνιο. Εάν η $\theta = 60^0$ είναι η οριακή γωνία που παρατηρείται αυτό το φαινόμενο και τότε $\theta' = 120^0$, να βρεθεί η τιμή του n εάν δίνονται το $n'' = \sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος.



<u>Λύση</u>: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Β, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Α και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Αφού οριακά δεν εμφανίζεται διαθλώμενη ακτίνα στο σημείο Β, τότε η α' είναι εξ' ορισμού η κρίσιμη γωνία και θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$n' sin\alpha' = n'' sin 90^0 => sin\alpha' = \frac{n''}{n'} = \frac{\sqrt{3}}{n'}$$

Από τον νόμο της ανάκλασης $\beta' = \alpha'$ και αφού το άθροισμά τους είναι ίσο με τη δεδομένη $\theta' = 120^0$ τότε $\alpha' = \beta' = 60^0$. Από τον ορισμό της κρίσιμης γωνίας παραπάνω έχουμε

$$sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{n'} => n' = 2$$

Η γωνία α' είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta'_A + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\alpha' = \theta'_A + \varphi'$$

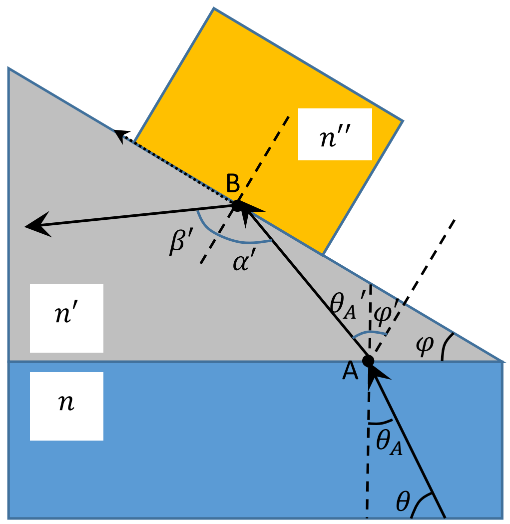
Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επομένως

$$\theta_A' = \alpha' - \varphi = 60 - 15 = 45^0$$

Η γωνία θ είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta_A = 30^0$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο A

$$n sin\theta_A = n' sin\theta_A' => n = n' \frac{sin\theta_A'}{sin\theta_A} = 2\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

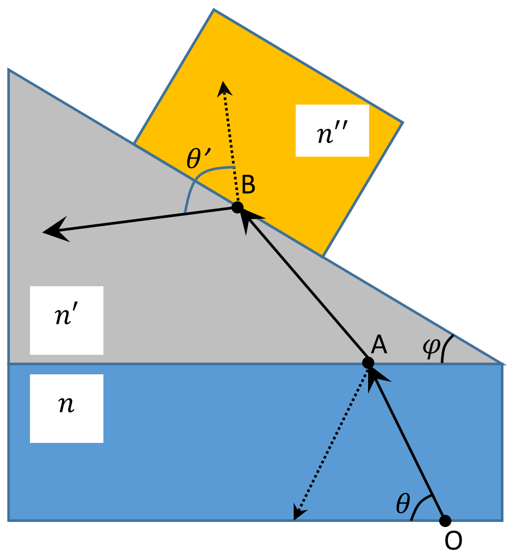
και άρα $n = 2\sqrt{2}$



2β)

Στο παρακάτω σχήμα τα τρία διαφορετικά σχήματα, δυο ορθογώνια και ένα πρίσμα (κοινώς σφήνα), είναι από διαφορετικά υλικά με δείκτες διάθλασης n, n' και n'' όπως αναγράφονται. Ένας μέρος της προσπίπτουσας ακτίνας ΟΑ ανακλάται ενώ ένα μέρος της διαθλάται προς το σημείο Β. Να βρεθεί η τιμή της γωνίας θ' μεταξύ της ανακλώμενης και της διαθλώμενης ακτίνας στο σημείο Β εάν δίνονται οι τιμές $\theta = 60^0$, $n = 2\sqrt{2}$, $n' = 2$ και $n'' = 2\sqrt{3}$ και η γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος.

.



<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, φέρουμε μια κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Β, μια άλλη κάθετο στη διεπιφάνεια στο σημείο Α και μια τρίτη κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια του πρίσματος η οποία διέρχεται από το σημείο Α. Η γωνία θ είναι η συμπληρωματική της θ_A οπότε $\theta_A = 30^0$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Α

$$nsin\theta_A = n'sin\theta'_A => sin\theta'_A = \frac{nsin\theta_A}{n'} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ή

$$\theta'_A = 45^0$$

Η γωνία φ' είναι ίση με την γωνία $\varphi = 15^0$ του πρίσματος αφού οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους και είναι και οι δυο οξείες. Επίσης η γωνία πρόσπτωσης α' είναι εντός-εναλλάξ με την γωνία $\theta'_A + \varphi'$ και άρα είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή

$$\alpha' = \theta'_A + \varphi' = 45 + 15 = 60^0$$

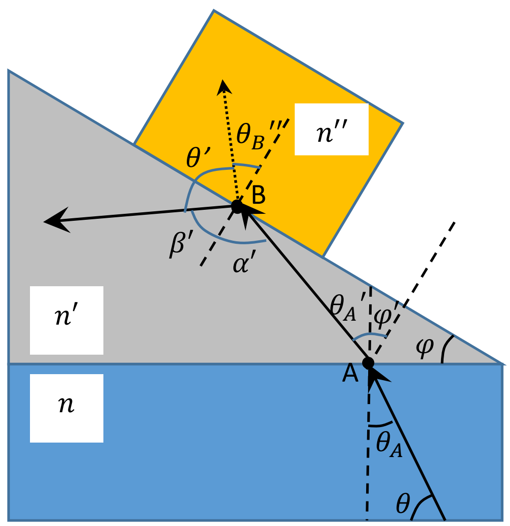
Από τον νόμο της ανάκλασης $\beta' = \alpha' = 60^0$. Από τον νόμο της διάθλασης στο σημείο Β

$$n''sin\theta_B{}'' = n'sin\alpha' => sin\theta_B{}'' = \frac{n'sin\alpha'}{n''} = \frac{2\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

οπότε $\theta_B{}'' = 30^0$.

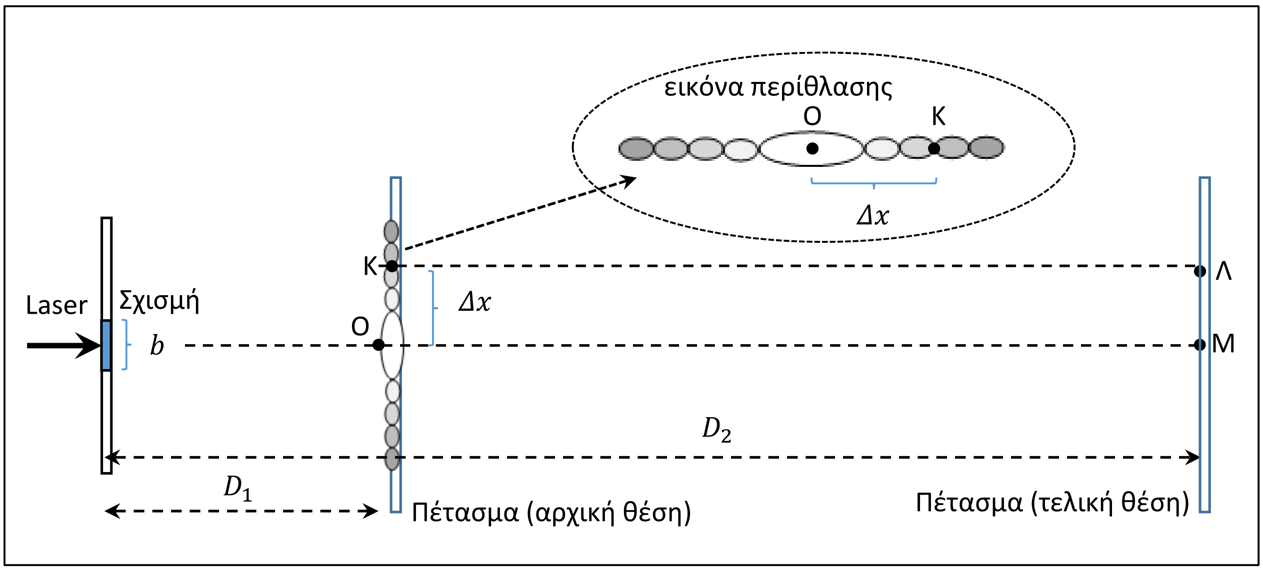
Στο σημείο B οι τρεις γωνίες από την μια μεριά της καθέτου ξεκινούν και τελειώνουν σε μια ευθεία οπότε πρέπει να δίνουν άθροισμα 180^0 δηλαδή:

$$\beta' + \theta' + \theta_B' = 180^0 => \theta_B' = 180 - 60 - 30 = 90^0$$



3α)

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D_1 από αυτή (θεωρούμε ότι τα b και λ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής μετράει την μέγιστη ένταση I_0 του φωτός επάνω στο πέτασμα στο σημείο Ο και μετά τοποθετεί το φωτοκύτταρο επάνω στο σημείο Κ που βρίσκεται σε απόσταση Δx από το Ο κατά μήκος της εικόνας περίθλασης και παρατηρεί ότι η ένταση εκεί $I = 0$. Ακολούθως αλλάζει την απόσταση σχισμής-πετάσματος σε $D_2 = 4D_1$ και παρατηρεί ότι στο νέο μέγιστο στο σημείο Μ το φωτοκύτταρο μετράει μικρότερη ένταση $I_0' = 9I_0/16$. Πόση ένταση θα μετρήσει τώρα το φωτοκύτταρο εάν τοποθετηθεί στο σημείο Λ το οποίο απέχει την ίδια απόσταση Δx κατά μήκος της νέας εικόνας περίθλασης από το Μ; Θεωρήστε ότι $D_1 \gg \Delta x$



<u>Λύση</u>: Επειδή $D_1 \gg \Delta x$, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση:

$$I \approx I_0 \left(\frac{sin\xi}{\xi}\right)^2$$

όπου

$$\xi = \frac{\pi b}{\lambda D_1} x$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$sin\xi = sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_1} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b}{\lambda D_1}x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l' Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \to 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n\frac{\lambda D_1}{b}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ … Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, το K φαίνεται να είναι στο τρίτο ελάχιστο, δηλαδή $n = 3$ και

$$\Delta x = x_3 = 3\frac{\lambda D_1}{b}$$

Όταν η απόσταση σχισμής-πετάσματος αλλάξει σε D_2, τότε το ξ αλλάζει σε

$$\xi = \frac{\pi b}{\lambda D_2}x$$

και άρα η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας γίνεται:

$$I' \approx I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_2}x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda D_2}x}\right)^2$$

(προσέξτε ότι άλλαξε και η μέγιστη τιμή της έντασης από I_0 σε $I_0{}'$). Αντικαθιστώντας το παραπάνω Δx και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $I_0{}' = 9I_0/16$ και $D_2 = 4D_1$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

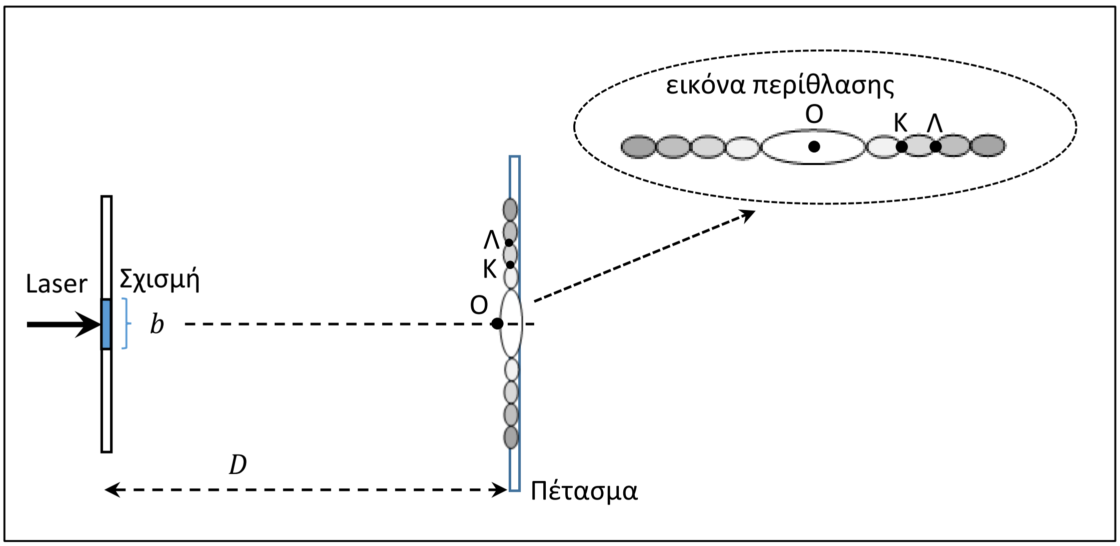
$$I' = \frac{9I_0}{16}\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda D_2}3\frac{\lambda D_1}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda D_2}3\frac{\lambda D_1}{b}}\right)^2 = \frac{9I_0}{16}\left(\frac{sin\left(3\pi\frac{D_1}{D_2}\right)}{3\pi\frac{D_1}{D_2}}\right)^2 = \frac{9I_0}{16}\left(\frac{sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{3\pi}{4}}\right)^2$$

ή

$$I' = \frac{9I_0}{16}\frac{1/2}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} = \frac{I_0}{2\pi^2}$$

3β)

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ_1 και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D από αυτή (θεωρούμε ότι τα b και λ_1 είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής βρίσκει για την ένταση διαδοχικά $I = 0$ στα σημεία Κ και Λ. Ακολούθως αντικαταστεί την πηγή laser με μια πιο ασθενή αλλά και με διαφορετικό μήκος κύματος $\lambda_2 = 1.2\lambda_1$. Ποιος θα είναι τώρα ο λόγος των εντάσεων $I(K)/I(\Lambda)$ στα σημεία Κ και Λ; Θεωρήστε ότι το D είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από οποιαδήποτε απόσταση μετράει ο φοιτητής επάνω στο πέτασμα. Χρήσιμα νούμερα: $sin(\pi/0.2) = 0$, $sin(\pi/0.4) = 1$, $sin(\pi/0.6) = -\sqrt{3}/2$, $sin(\pi/0.8) = -\sqrt{2}/2$



<u>Λύση</u>: Επειδή το D είναι μεγάλο, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση

$$I \approx I_0 \left(\frac{sin\xi}{\xi}\right)^2$$

όπου

$$\xi = \frac{\pi b}{\lambda_1 D} x$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$sin\xi = sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_1 D} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b}{\lambda_1 D}x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l' Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \to 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n\frac{\lambda_1 D}{b}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ … Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, τα Κ και Λ φαίνονται να είναι στο δεύτερο και τρίτο ελάχιστο αντίστοιχα, δηλαδή στα $n = 2$ και $n = 3$, οπότε έχουν συντεταγμένες

$$x_K = 2\frac{\lambda_1 D}{b}$$

και

$$x_\Lambda = 3\frac{\lambda_1 D}{b}$$

Ομοίως όταν το μήκος κύματος αλλάξει σε λ_2, τότε το ξ αλλάζει σε

$$\xi = \frac{\pi b}{\lambda_2 D}x$$

και η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας γίνεται

$$I' \approx I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x}\right)^2$$

όπου πρέπει $I_0' < I_0$ αφού πρόκειται για ασθενέστερη πηγή. Μας ενδιαφέρει η ένταση στα σημεία Κ και Λ με συντεταγμένες x_K και x_Λ που είδαμε παραπάνω. Με αντικατάσταση:

$$I'(K) \approx I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x_K\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x_K}\right)^2 = I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D}2\frac{\lambda_1 D}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D}2\frac{\lambda_1 D}{b}}\right)^2 = I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2}2\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2}2\lambda_1}\right)^2$$

$$I'(\Lambda) \approx I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x_\Lambda\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D}x_\Lambda}\right)^2 = I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_2 D}3\frac{\lambda_1 D}{b}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda_2 D}3\frac{\lambda_1 D}{b}}\right)^2 = I_0{}'\left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2}3\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2}3\lambda_1}\right)^2$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι ο

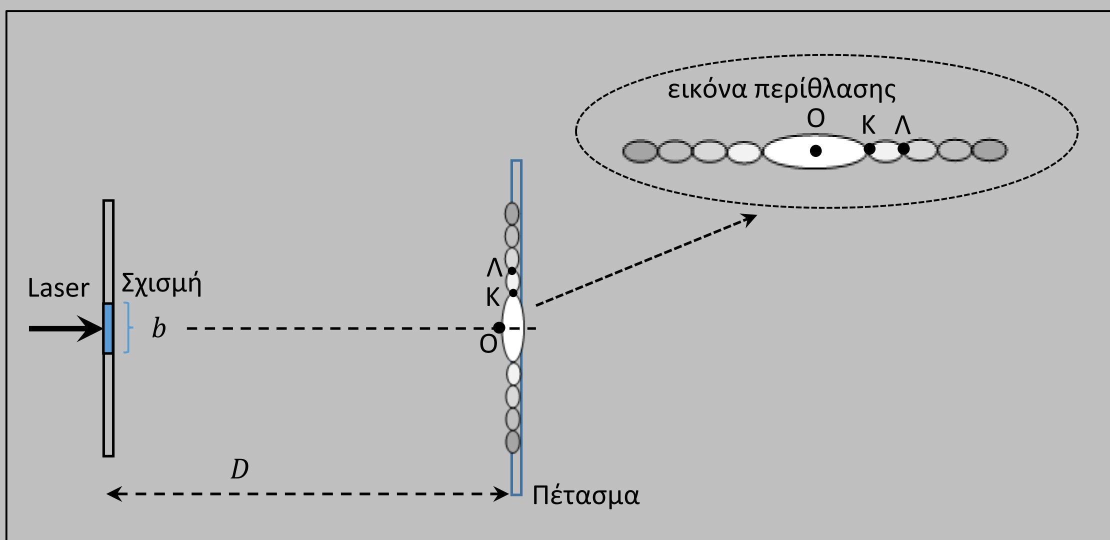
$$\frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2}2\lambda_1\right)}{\frac{\pi}{\lambda_2}2\lambda_1} \times \frac{\frac{\pi}{\lambda_2}3\lambda_1}{sin\left(\frac{\pi}{\lambda_2}3\lambda_1\right)}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{sin\left(2\pi\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{sin\left(3\pi\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}\right)^2$$

Αντικαθιστώντας το $\lambda_2 = 1.2\lambda_1$, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{sin\left(\frac{\pi}{0.6}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{0.4}\right)}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{-\sqrt{3}/2}{1}\right)^2 = \frac{27}{16}$$

3γ)

Ένας φοιτητής εκτελεί ένα πείραμα περίθλασης με μια απλή ορθογώνια σχισμή μικροσκοπικού πλάτους b_1 και μακροσκοπικού ύψους $a \gg b_1$ ρίχνοντάς της από την μια μεριά φως laser μήκους κύματος λ και παρατηρώντας από την άλλη μεριά την εικόνα της περίθλασης που σχηματίζεται σε ένα πέτασμα σε απόσταση D από αυτή (θεωρούμε ότι τα b_1 και λ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους). Με τη βοήθεια ενός φωτοκυττάρου, ο φοιτητής βρίσκει για την ένταση διαδοχικά $I = 0$ στα σημεία Κ και Λ. Ακολούθως αντικαταστεί την σχισμή με μια ίδιου ύψους a αλλά διαφορετικού πλάτους $b_2 = b_1/4$. Ποιος θα είναι τώρα ο λόγος των εντάσεων $I(K)/I(\Lambda)$ στα σημεία Κ και Λ; Θεωρήστε ότι το D είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από οποιαδήποτε απόσταση μετράει ο φοιτητής επάνω στο πέτασμα.



Λύση: Επειδή το D είναι μεγάλο, η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας του αρχικού διαγράμματος περίθλασης δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση

$$I \approx I_0 \left(\frac{sin\xi}{\xi}\right)^2$$

όπου

$$\xi = \frac{\pi b_1}{\lambda D} x$$

Τα ελάχιστα εμφανίζονται εκεί όπου

$$sin\xi = sin\left(\frac{\pi b_1}{\lambda D} x\right) = 0$$

δηλαδή εκεί όπου

$$\frac{\pi b_1}{\lambda D} x = n\pi$$

με το n να είναι ακέραιος με εξαίρεση το $n = 0$ επειδή λόγω του νόμου του De l' Hospital δίνει μέγιστο της μορφής $0/0 \to 1$. Έτσι τα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις

$$x_n = n\frac{\lambda D}{b_1}$$

με $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ … Από τη δεδομένη εικόνα περίθλασης, τα Κ και Λ φαίνονται να είναι στο πρώτο και δεύτερο ελάχιστο αντίστοιχα, δηλαδή στα $n = 1$ και $n = 2$, οπότε έχουν συντεταγμένες

$$x_K = \frac{\lambda D}{b_1}$$

και

$$x_\Lambda = 2\frac{\lambda D}{b_1}$$

Όταν το πλάτος της σχισμής αλλάξει σε b_2, τότε το ξ αλλάζει σε

$$\xi = \frac{\pi b_2}{\lambda D}x$$

και η κατανομή της έντασης της ακτινοβολίας γίνεται

$$I' \approx I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{\lambda D}x\right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D}x}\right)^2$$

όπου το I_0 παραμένει το ίδιο αφού πρόκειται για την ίδια πηγή. Μας ενδιαφέρει η ένταση στα σημεία Κ και Λ με συντεταγμένες x_1 και x_2 που είδαμε παραπάνω. Με αντικατάσταση, βρίσκουμε για την νέα ένταση στα δυο σημεία:

$$I'(K) \approx I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{\lambda D}x_K\right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D}x_K}\right)^2 = I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{\lambda D}\frac{\lambda D}{b_1}\right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D}\frac{\lambda D}{b_1}}\right)^2 = I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{b_1}\right)}{\frac{\pi b_2}{b_1}}\right)^2$$

$$I'(\Lambda) \approx I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{\lambda D}x_\Lambda\right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D}x_\Lambda}\right)^2 = I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi b_2}{\lambda D}2\frac{\lambda D}{b_1}\right)}{\frac{\pi b_2}{\lambda D}2\frac{\lambda D}{b_1}}\right)^2 = I_0\left(\frac{sin\left(2\frac{\pi b_2}{b_1}\right)}{2\frac{\pi b_2}{b_1}}\right)^2$$

Αφού $b_2 = b_1/4$, έχουμε

$$I'(K) = I_0\left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}}\right)^2 = I_0\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}\right)^2 = I_0\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^2$$

$$I'(\Lambda) = I_0\left(\frac{sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{2\frac{\pi}{4}}\right)^2 = I_0\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = I_0\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι ο

$$\frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \frac{I'(K)}{I'(\Lambda)} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$