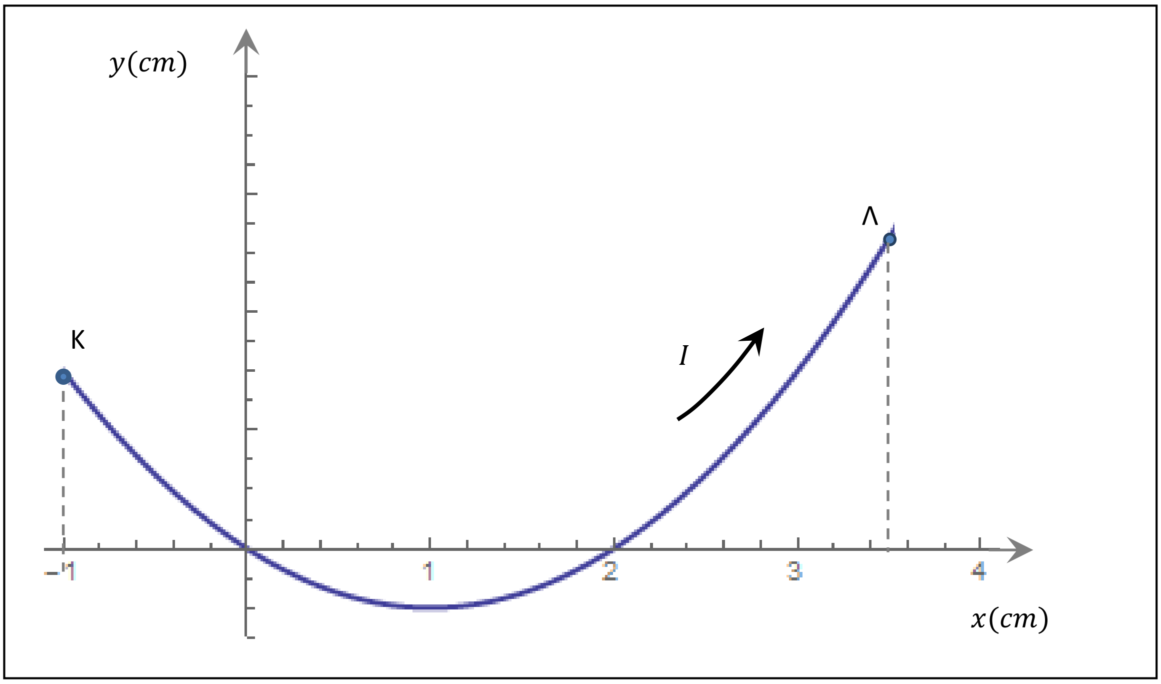
Λύσεις Προόδου 2 – Φυσική ΙΙ Χημ. Μηχανικών – Εαρινό 2016

1α. Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα της καμπύλης ΚΛ μεταξύ $x = -1$ και $x = 3.5$ αντιστοιχεί σε ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα $I = 1.5\ A$ με τη φορά που δείχνεται. Η καμπύλη είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ρίζες στα $x = 0$ και $x = 2$ και ελάχιστο στο $y = -2$. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ όπου $B_0 = 0.4\,T$ εφαρμόζεται στην περιοχή όπου ανήκει ο αγωγός. Να βρεθεί η αντίστοιχη μαγνητική δύναμη σε Newton που ασκείται στον αγωγό. (Σημείωση: Θυμηθείτε ότι $tan(-x) = -tanx$ και αντιστρόφως)



Λύση: Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{K\Lambda}$. Η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = ax(x-2)$$

με ελάχιστο εκεί όπου

$$\frac{dy}{dx} = 0 => (x-2) + x = 0 => x = 1$$

$$y(1) = -a$$

Από τα δεδομένα στο ελάχιστο $y = -2$ άρα $a = 2$ και $y = 2x(x-2)$. Οι συντεταγμένες στα σημεία Κ και Λ είναι

Κ: $y_K = y(-1) = 2(-1)(-1-2) = 6$

Λ: $y_\Lambda = y(3.5) = 7(1.5) = 10.5$

Το διάνυσμα $\vec{L} = \overrightarrow{K\Lambda}$ έχει συντεταγμένες τη διαφορά των συντεταγμένων των Λ και Κ:

$$x_\Lambda - x_K = 3.5 - (-1) = 4.5$$

και

$$y_\Lambda - y_K = 10.5 - 6 = 4.5$$

(ίσα x και y) και άρα έχει μέτρο

$$L = \sqrt{4.5^2 + 4.5^2} = 4.5\sqrt{2}\,cm = 0.045\sqrt{2}\,m$$

και γωνία

$$\theta_L = atan\left(\frac{4.5}{4.5}\right) = 45^0$$

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0(\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y)$ έχει συντεταγμένες $B_x = B_0$ και $B_y = -B_0\sqrt{3}$ και άρα έχει μέτρο

$$B = \sqrt{{B_0}^2 + 3{B_0}^2} = B_0\sqrt{4} = 2B_0 = 0.8\,T$$

και γωνία

$$\theta_B = atan\left(\frac{-B_0\sqrt{3}}{B_0}\right) = atan(-\sqrt{3}) = -30^0$$

Η γωνία θ μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων ισούται με

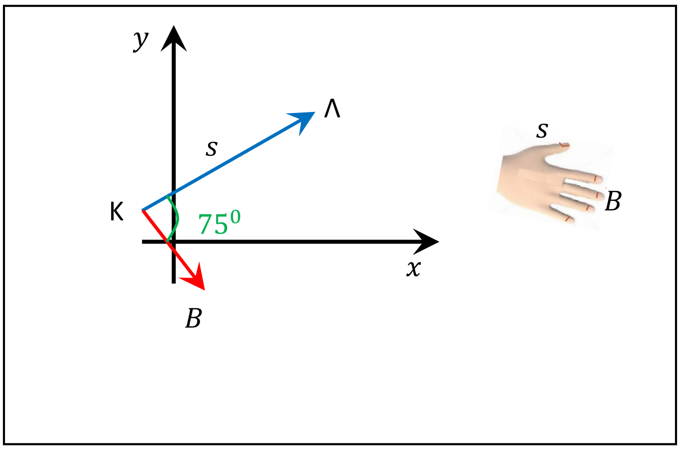
$$\theta = \theta_L - \theta_B = 45^0 - (-30^0) = 75^0$$

Η μαγνητική δύναμη στον αγωγό ισούται με

$$F = ILBsin\theta = 0.045\sqrt{2}IBsin(75^0) = 1.5 \times 0.045\sqrt{2} \times 0.8 \times sin(75^0)\,N$$

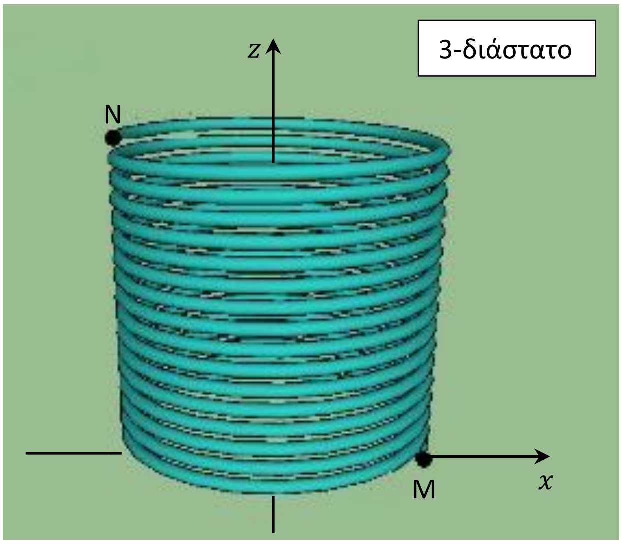
$$F = 0.0738\,N$$

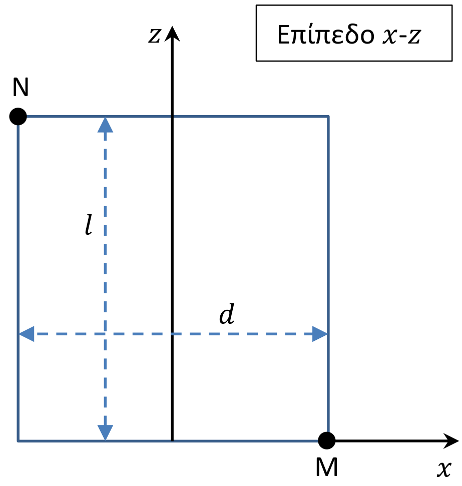
Η φορά της δύναμης σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού είναι προς τα μέσα της σελίδας.



1β.

Ο παρακάτω αγωγός έχει το σχήμα πηνίου συμμετρικά τυλιγμένου γύρω από τον άξονα z, έχει μήκος $l = 5\ cm$, διάμετρο $d = 4.2\ cm$ και αποτελείται συνολικά από 16.5 (δεκαεξίμιση) σπείρες. Διαρρέεται από ρεύμα $I = 3.5\ A$ το οποίο εισέρχεται στο σημείο Μ και εξέρχεται στο σημείο Ν, με τα σημεία Μ και Ν να ανήκουν και τα δυο στο επίπεδο x-z. Εάν στο χώρο που βρίσκεται αυτό το πηνίο, εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{e}_z$ με $B = 1.8\ T$, τότε να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο πηνίο.





Λύση:

Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

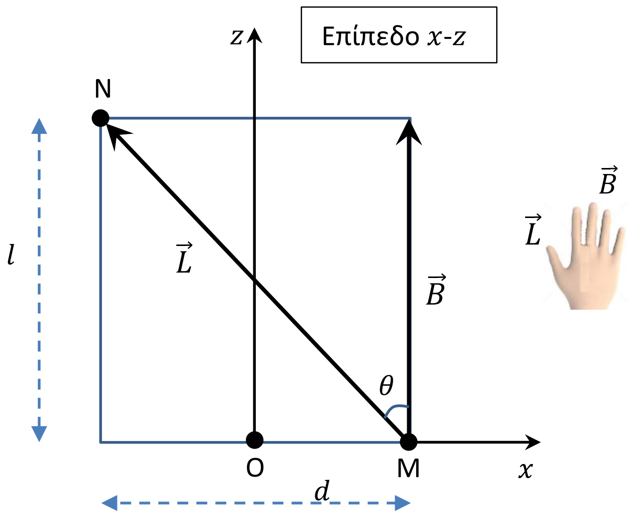
όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Εφόσον τα Μ και Ν ανήκουν στο επίπεδο x-z, τότε και το $\vec{L}$ ανήκει σε αυτό το επίπεδο και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο. Το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F = ILBsin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία, το γινόμενο $Lsin\theta$ είναι ίσο με την διάμετρο d του πηνίου και έτσι

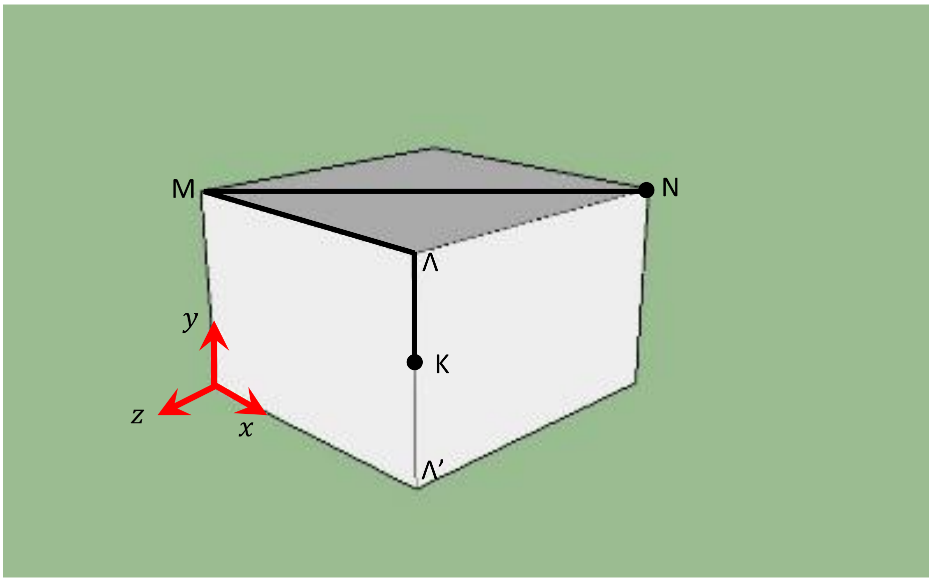
$$F = IBd = 3.5 \times 1.8 \times 0.042 = \ 0.265\ N$$

Η φορά της δύναμης δίνεται από τον νόμο της δεξιάς παλάμης (φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα) και είναι προς τα μέσα της σελίδας.



1γ.

Ο παρακάτω αγωγός ΚΛΜΝ αποτελείται από 3 ευθύγραμμα τμήματα με τα σημεία Λ, Μ και Ν να είναι τρεις από τις οκτώ κορυφές ενός κύβου πλευράς $a = 2.8\ cm$ και το σημείο Κ να είναι το μέσο της ακμής ΛΛ' του κύβου. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $I = 1.5\ A$ το οποίο εισέρχεται στο σημείο Κ και εξέρχεται στο σημείο Ν. Εάν στο χώρο που βρίσκεται αυτός ο αγωγός, εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -B\vec{e}_z$ με $B = 0.7\ T$, τότε να βρεθεί η μαγνητική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στον αγωγό.



Λύση 1 (εύκολη):

Η δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

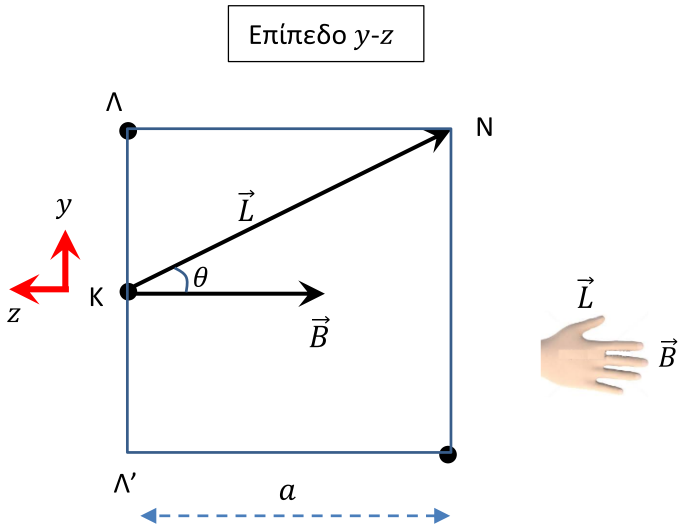
όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα που ενώνει την αρχή και το πέρας του αγωγού, δηλαδή $\vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{KN}}$. Εφόσον τα Κ και Ν ανήκουν στο επίπεδο y-z, τότε και το $\vec{L}$ ανήκει σε αυτό το επίπεδο και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σχηματίζει γωνία θ με το μαγνητικό πεδίο. Το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F = ILBsin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία, το γινόμενο $Lsin\theta$ είναι ίσο με το μήκος ΛΚ το οποίο ισούται με την μισή πλευρά $a/2 = 0.014\ m$ του κύβου και έτσι

$$F = IBa = 1.5 \times 0.7 \times 0.014 = \ 0.0147\ N$$

Η φορά της δύναμης δίνεται από τον νόμο της δεξιάς παλάμης (φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα) και είναι προς τα μέσα της σελίδας δηλαδή προς την κατεύθυνση $-x$.



<u>Λύση 2 (δύσκολη)</u>:

Χωρίζουμε τον αγωγό σε 3 ευθύγραμμα τμήματα, υπολογίζουμε τρεις διαφορετικές δυνάμεις και αθροίζουμε: Η δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

όπου $\vec{L}$ το διάνυσμα κατά μήκος του ευθύγραμμου αγωγού με φορά αυτή του ρεύματος. Το μέτρο της δύναμης ισούται με

$$F = BILsin\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ του $\vec{L}$ και του $\vec{B}$ ενώ η φορά δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Έχουμε για τα τρία τμήματα (δείτε παρακάτω σχήμα)

ΚΛ: Δύναμη F_1 φορά $-x$, μέτρο

$$F_1 = BI\frac{a}{2}sin90^0 = 0.7 \times 1.5 \times 0.014 = \ 0.0147\ \mathrm{N}$$

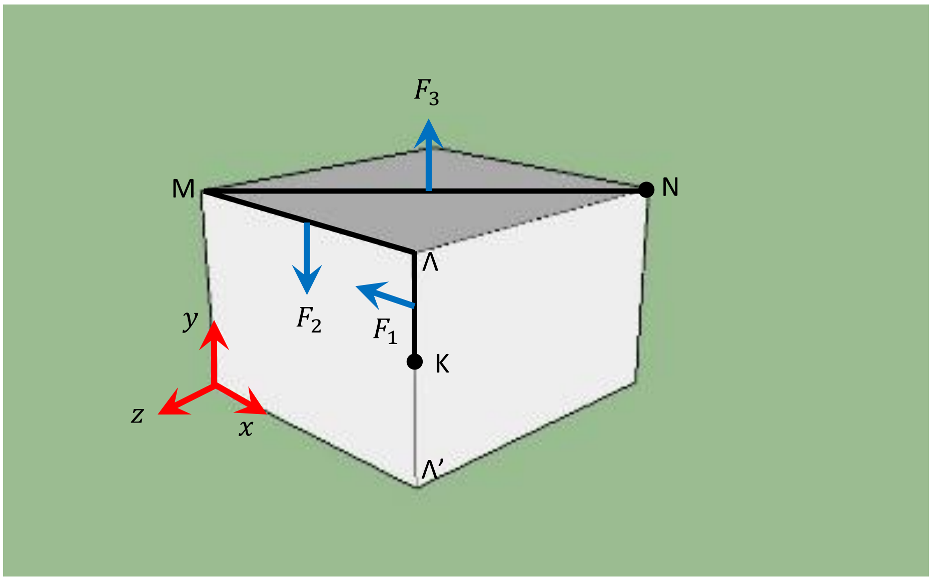
ΛΜ: Δύναμη F_2 φορά $-y$, μέτρο

$$F_2 = BIa\sin 90^0 = 0.7 \times 1.5 \times 0.028 = \ 0.0294 \text{ N}$$

ΜΝ (από Πυθαγόρειο το μήκος της είναι $\sqrt{2}a$): Δύναμη F_3 φορά $+y$, μέτρο

$$F_3 = BI\sqrt{2}a\sin 45^0 = BIa = 0.7 \times 1.5 \times 0.028 = \ 0.0294 \text{ N}$$

Οι δυο συνιστώσες $\pm y$ αλληλοαναιρούνται και έτσι η συνολική δύναμη είναι ίση με την F_1 δηλαδή έχει μέτρο $F = 0.0147$ N και φορά $-x$



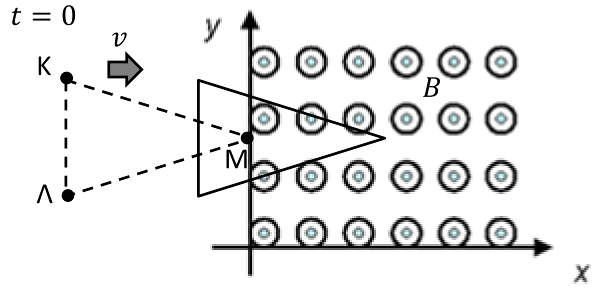
Από απλή τριγωνομετρία, το γινόμενο $L\sin\theta$ είναι ίσο με το μήκος ΛΚ το οποίο ισούται με την μισή πλευρά $a/2 = 0.014\ m$ του κύβου και έτσι

$$F = IBa = 1.5 \times 0.7 \times 0.014 = \ 0.0147\ N$$

Η φορά της δύναμης δίνεται από τον νόμο της δεξιάς παλάμης (φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα) και είναι προς τα μέσα της σελίδας δηλαδή προς την κατεύθυνση $-x$.

2α.

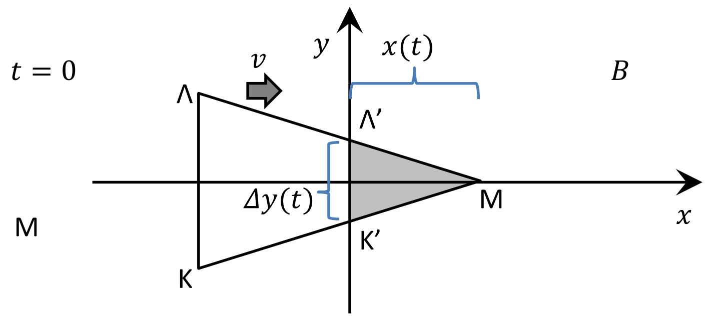
Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΚΛΜΚ έχει το σχήμα ισοσκελούς τριγώνου με τις πλευρές ΚΜ και ΛΜ να είναι ίσες μεταξύ τους, την βάση ΚΛ μήκους $w = 5\ cm$ να είναι παράλληλη με τον άξονα y και την απόσταση Μ από την ΚΛ (το ύψος) να είναι ίσο με $h = 9.9\ cm$. Αρχικά ο αγωγός είναι ακίνητος και η κορυφή Μ βρίσκεται επάνω στον άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 1.2\ T$ με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου $B = 0$. Ο αγωγός τίθεται σε επιταχυνόμενη κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με το θετικό άξονα x με σταθερή επιτάχυνση $a = 2.2\ m/s^2$ και σε χρόνο t_1 η βάση ΚΛ φτάνει στον άξονα y. Ποια είναι η επαγόμενη τάση V (κατά μέτρο) στον αγωγό την χρονική στιγμή $t = {t_1}^{-}$ (οριακά λίγο πριν το t_1);



Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του τριγώνου, μόνο το τμήμα ΜΚ'Λ'Μ που βρίσκεται μεταξύ της κορυφής Μ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα είναι τριγωνικό και άρα έχει εμβαδό

$$A(t) = \frac{1}{2}\Delta y(t) \times x(t)$$



Λόγω της επιταχυνόμενης κίνησης,

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΛΜ και Κ'Λ'Μ έχουμε

$$\frac{x}{\Delta y} = \frac{h}{w}$$

Συνδυάζοντας

$$A(t) = \frac{w}{2h}x^2(t) = \frac{wa}{4h}t^4$$

Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{wa}{h}{t_1}^3$$

Η βάση ΚΜ φτάνει στον άξονα y την χρονική στιγμή $t = t_1$ όταν η κορυφή Μ έχει καλύψει απόσταση ίση με το ύψος h δηλαδή:

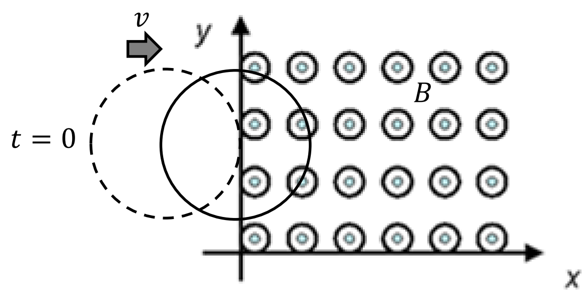
$$h = \frac{1}{2}a{t_1}^2$$

Αντικαθιστώντας στην τάση V έχουμε

$$V = \frac{2Bwa}{a{t_1}^2}{t_1}^3 = 2Bwt_1 = 2Bw\sqrt{\frac{2h}{a}} = 2 \times 1.2 \times 0.05\sqrt{\frac{2 \times 0.099}{2.2}} = 36\,mV$$

<u>2β</u>.

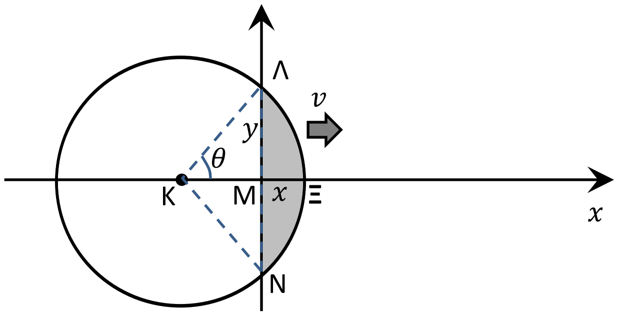
Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός σχήματος κύκλου έχει ακτίνα R και αρχικά είναι ακίνητος και εφάπτεται στα αριστερά του άξονα y ο οποίος χωρίζει το επίπεδο της σελίδας σε δυο περιοχές, σε μια που αντιστοιχεί σε $x \geq 0$ και όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο ίσο με B με τη φορά που δείχνεται (έξω από την σελίδα) και σε μια άλλη με $x < 0$ όπου δεν υπάρχει πεδίο. Ο αγωγός τίθεται σε ομαλή κίνηση στο $t = 0$ παράλληλα με τον θετικό άξονα x με σταθερή ταχύτητα v και σε χρόνο $t_1 = R/v$ ο μισός κύκλος έχει μόλις εισέλθει στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. Να δοθεί μια έκφραση της μαγνητικής ροής που διέρχεται διαμέσου του κυκλικού αγωγού συναρτήσει του χρόνου για $0 < t < t_1$. Χρήσιμα εμβαδά: Κυκλικός τομέας γωνίας 2θ (τμήμα πίττας) $E = \theta R^2$, Τρίγωνο $E = 1/2\ \beta\upsilon$.



<u>Λύση</u>:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κίνησης του κύκλου, μόνο το τμήμα ΛΜΝΞΛ που βρίσκεται μεταξύ του προπορευόμενου σημείου Ξ και του άξονα y βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Έστω x το μήκος ΜΞ και y το μήκος ΛΜ = ΜΝ. Το εμβαδό A του τμήματος ΛΜΝΞΛ προκύπτει από την αφαίρεση του εμβαδού του κυκλικού τομέα ΛΚΝΞΛ μείον του τριγώνου ΚΛΝ. Επομένως

$$A = \theta R^2 - \frac{1}{2}2yx$$



Λόγω της ομαλής κίνησης,

$$x(t) = vt$$

ενώ από Πυθαγόρειο

$$y = \sqrt{R^2 - (R-x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}$$

Επίσης από απλή τριγωνομετρία

$$tan\theta = \frac{y}{R-x}$$

Επομένως

$$A = R^2 tan^{-1}\left(\frac{y}{R-x}\right) - yx$$

$$A = R^2 tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2Rx - x^2}}{R-x}\right) - x\sqrt{2Rx - x^2}$$

$$A = R^2 tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2Rvt - v^2t^2}}{R-vt}\right) - vt\sqrt{2Rvt - x^2}$$

Η μαγνητική ροής ισούται με

$$\Phi = BA$$

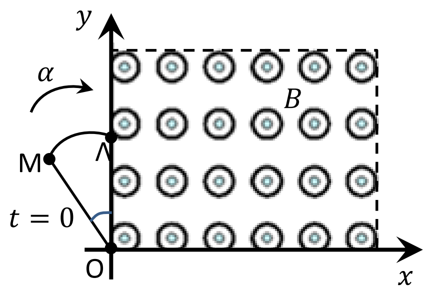
ή

$$BR^2 tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2Rvt - v^2t^2}}{R-vt}\right) - Bvt\sqrt{2Rvt - x^2}$$

που είναι και η τελική έκφραση.

2γ.

Στο παρακάτω σχήμα ο αγωγός ΟΜΛΟ αποτελείται από δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΟΜ και ΟΛ μήκους $0.1\ m$ το καθένα, ένα τόξο ΛΜ γωνίας $0.6\ rad$ ενώ μπορεί και περιστρέφεται γύρω από την αρχή των συντεταγμένων Ο και είναι αρχικά ακίνητος και έτσι προσανατολισμένος ώστε η πλευρά του ΟΛ να εφάπτεται στον άξονα y. Στον χώρο υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.4\ T$ μόνο μέσα στο ορθογώνιο που ορίζεται από τις διακεκομμένες γραμμές και τους δυο άξονες x και y, με διαστάσεις μερικών μέτρων. Ο αγωγός τίθεται σε ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση στο $t = 0$ με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 7.5\ rad/s^2$ και φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού ενώ σε χρόνο t_1 η πλευρά ΟΜ φτάνει στον άξονα y. Ποια είναι η επαγόμενη τάση V (κατά μέτρο) στον αγωγό την χρονική στιγμή $t = {t_1}^-$ (οριακά λίγο πριν το t_1); Χρήσιμα εμβαδά, Κυκλικός τομέας γωνίας 2θ: $E = \theta R^2$, Τρίγωνο: $E = 1/2\ \beta\upsilon$, Τραπέζιο: $E = (\alpha + \beta)\upsilon/2$



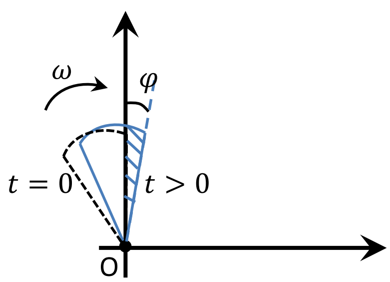
Λύση:

Η μαγνητική ροή Φ για σταθερό μαγνητικό πεδίο B κάθετο σε μια επιφάνεια A ισούται με το γινόμενο BA. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της περιστροφής του αγωγού, μόνο το σκιαγραμμένο τμήμα του βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτό το τμήμα αντιστοιχεί σε γωνία $\varphi = 1/2\alpha t^2$ και επομένως έχει εμβαδό

$$A = \frac{\varphi}{2}R^2 = \frac{\alpha t^2}{4}R^2$$

και η μαγνητική ροή είναι ίση με

$$\Phi = BA = \frac{\alpha t^2}{4}BR^2$$



Από τον νόμο του Faraday η επαγόμενη τάση την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι ίση κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\alpha t_1}{2}BR^2$$

Αφού σε χρόνο t_1 η πλευρά ΟΜ φτάνει στον άξονα y, τότε

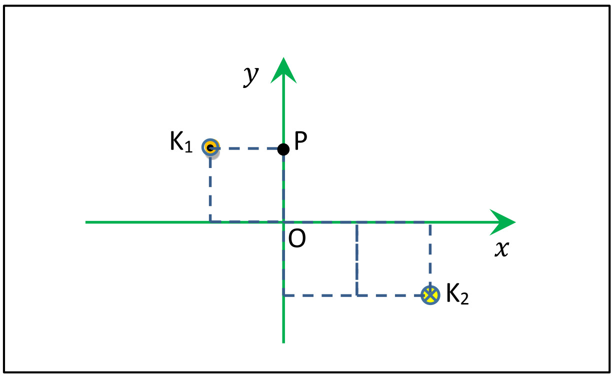
$$\frac{1}{2}\alpha {t_1}^2 = \theta_0 => t_1 = \sqrt{\frac{2\theta_0}{\alpha}}$$

Αντικαθιστώντας στην τάση V έχουμε

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha\theta_0}BR^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\times 7.5\times 0.6}\times 0.4\times 0.1^2 = 6\,mV$$

3α.

Στο παρακάτω σχήμα δυο λεπτοί ευθύγραμμοι αγωγοί K_1 και K_2 απείρου μήκους τέμνουν κάθετα την σελίδα στα σημεία $(-2,1)$ και $(4,-1)$ αντίστοιχα (σε cm) και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα $I = 2.2\,A$ και με τη φορά που σημειώνεται. Να βρεθούν οι συνιστώσες του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγουν οι δυο αγωγοί στην αρχή των συντεταγμένων Ο.



Λύση:

Είδαμε ότι ο ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος είναι κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στο ένθετο (με διακεκομμένη), και το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ.

Επομένως στην αρχή Ο υπάρχουν δυο πεδία (παρουσιάζονται σε δυο ξεχωριστά σχήματα για λόγους ευκρίνειας), το B_1 που παράγεται από τον αγωγό K_1 με φορά προς τα πάνω & δεξιά και το B_2 που παράγεται από τον αγωγό K_2 το οποίο είναι επίσης προς τα πάνω & δεξιά (κανόνας δεξιού χεριού). Τα δυο πεδία είναι κάθετα αντίστοιχα στα ευθύγραμμα τμήματα K_1O και K_2O τα οποία παίζουν το ρόλο της ακτίνας των αντίστοιχων κύκλων $ΔΓ_1$ και $ΔΓ_2$. Από τις συντεταγμένες των σημείων K_1 και K_2 μπορούμε να βρούμε τις αποστάσεις

$$\rho_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,cm$$

και

$$\rho_2 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}\,cm$$

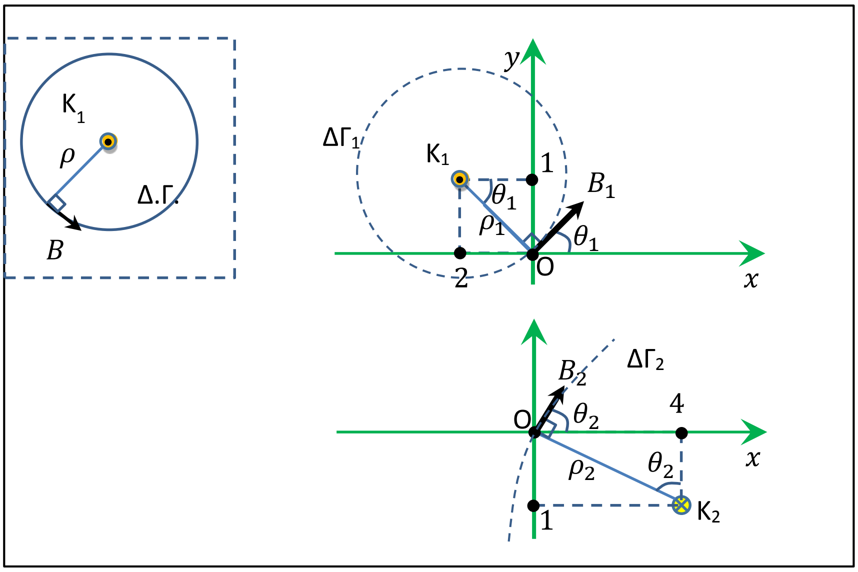
και τις γωνίες θ_1 και θ_2 ως εξής:

$$tan\theta_1 = \frac{1}{2} => \theta = 26.6^0$$

και

$$tan\theta_2 = \frac{4}{1} => \theta = 76.0^0$$

Αυτές οι δυο γωνίες είναι ίσες λόγω καθετότητας με τις γωνίες που σχηματίζουν τα πεδία B_1 και B_2 αντίστοιχα με τον άξονα x.



Επομένως τα μέτρα των B_1 και B_2 ισούνται με

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_1} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{\sqrt{5} \times 10^{-2}} = 1.97 \times 10^{-5}\ T$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} I}{2\pi\rho_2} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.2}{\sqrt{17} \times 10^{-2}} = 1.07 \times 10^{-5}\ T$$

ενώ οι συντεταγμένες τους είναι ίσες με

$$B_{1x} = 1.97 \times 10^{-5} cos(26.6^0) = 1.76 \times 10^{-5}\ T$$

$$B_{1y} = 1.97 \times 10^{-5} sin(26.6^0) = 0.88 \times 10^{-5}\ T$$

$$B_{2x} = 1.07 \times 10^{-5} cos(76.0^0) = 0.26 \times 10^{-5}\ T$$

$$B_{2y} = 1.07 \times 10^{-5} sin(76.0^0) = 1.04 \times 10^{-5}\ T$$

Έτσι το συνιστάμενο πεδίο έχει συνιστώσες

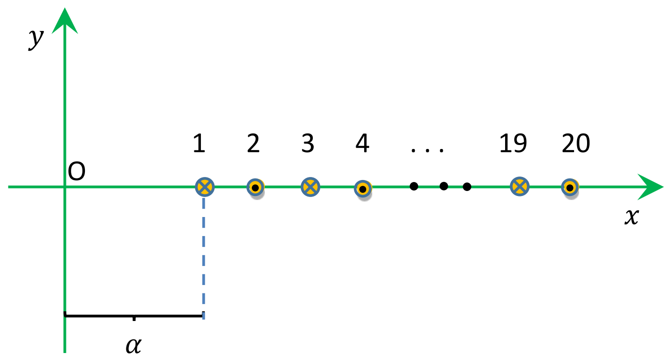
$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 2.02 \times 10^{-5}\ T$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = 1.92 \times 10^{-5}\ T$$

<u>3β</u>.

Θεωρήστε την παρακάτω συστοιχία κατά μήκος του άξονα x που αποτελείται από ένα μεγάλο ζυγό πλήθος N ευθύγραμμων αγωγών απείρου μήκους οι οποίοι τέμνουν κάθετα τη σελίδα. Το κέντρο του πρώτου αγωγού βρίσκεται σε απόσταση α από την αρχή των αξόνων, ο δεύτερος σε απόσταση α^2, τρίτος α^3 κ.ό.κ. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I αλλά με εναλλασσόμενη φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίστε το συνιστάμενο μαγνητικό πεδίο που παράγει η συστοιχία στο σημείο Ο. Σημείωση: Πρώτα να αναπτύξετε το παρακάτω γινόμενο γιατί καταλήγει σε ένα εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα που μπορεί να σας φανεί πολύ χρήσιμο στον υπολογισμό της γεωμετρικής σειράς:

$$(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1})$$



Λύση:

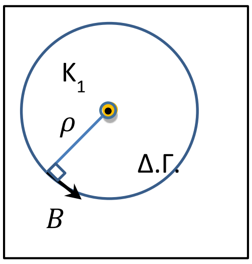
Το ανάπτυγμα δίνει $(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1})=1-\lambda^N$ και άρα μπορούμε να γράψουμε ταυτοτικά για τη γεωμετρική σειρά ότι

$$1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots\lambda^{N-1}=\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}$$

Είδαμε ότι ο ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ο οποίος είναι κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και το $\vec{B}$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ.



Επομένως στο σημείο Ο του δεδομένου σχήματος, η φορά του μαγνητικού πεδίου που παράγει ο κάθε αγωγός είναι εναλλασσόμενα προς τα πάνω και κάτω (κανόνας δεξιού χεριού) και έχει μέτρο

$$B_n = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha^n}$$

με $n = 1,2,3 \dots N$. Αθροίζοντας σε όλους τους αγωγούς

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha^2} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha^3} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha^4} \dots$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^4} \dots\right)$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^4} \dots\right)$$

Προσέξτε ότι τα πρόσημα εναλλάσσονται. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά με $\lambda = -1/\alpha$ εάν προσθαφαιρέσουμε τη μονάδα:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(1 - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^4} \dots\right)$$

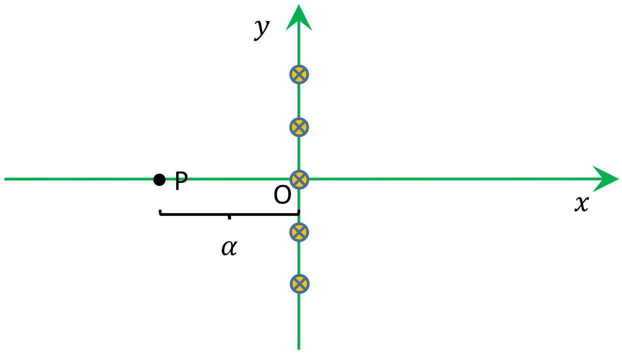
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(1 - \frac{1 - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)}\right)$$

Επειδή ο $N + 1$ είναι περιττός αριθμός, έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(1 - \frac{1 + \frac{1}{\alpha^{N+1}}}{1 + \frac{1}{\alpha}}\right)$$

<u>3γ</u>.

Θεωρήστε την παρακάτω συστοιχία κατά μήκος του άξονα y που αποτελείται από ένα πλήθος $N = 5$ ευθύγραμμων αγωγών με τον καθένα να είναι κάθετος στη σελίδα, να έχει άπειρο μήκος και να ισαπέχει απόσταση $c = 0.3\ m$ από τους γειτονικούς αγωγούς, ενώ ο μεσαίος αγωγός βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Όλοι οι αγωγοί διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα $I = 3\ A$ με τη φορά που σημειώνεται. Υπολογίστε <u>το μέτρο και τη φορά</u> του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου που παράγει η συστοιχία στο σημείο Ρ με συντεταγμένες $(-\alpha, 0)$ όπου $a = 0.4\ m$.

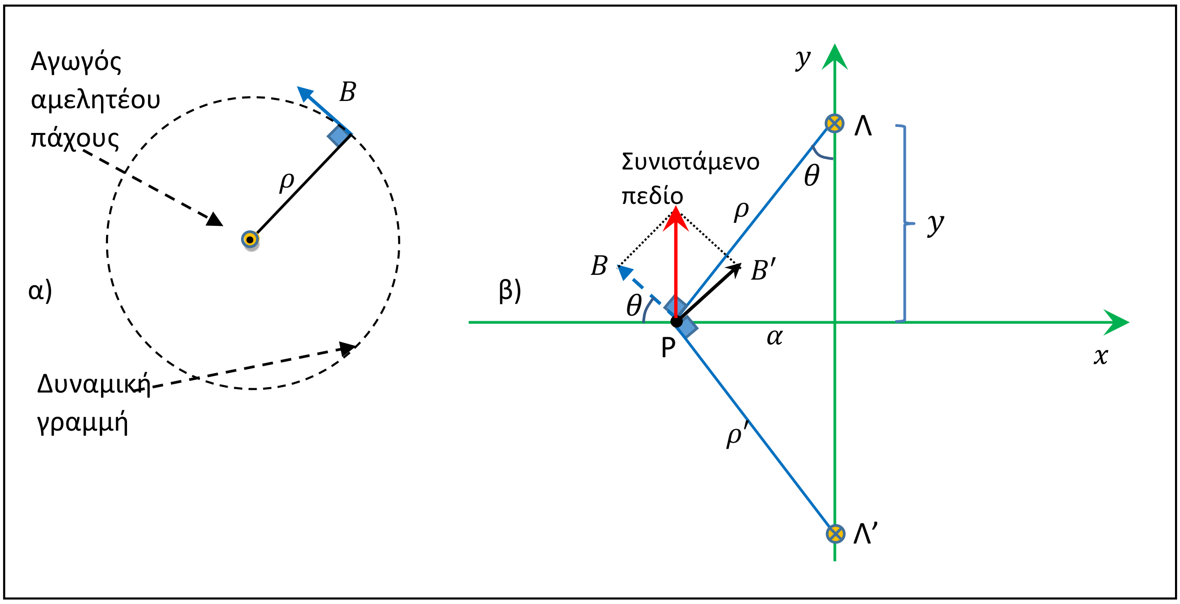


Λύση:

Όπως περιγράφεται στο βιβλίο, όταν ένας ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους βρίσκεται κατά μήκος του άξονα z δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο σε απόσταση ρ από αυτόν που δίνεται από την:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

Οι αντίστοιχες δυναμικές γραμμές (Δ.Γ.) είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο επάνω στον αγωγό όπως αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα στο α) με το $\vec{B}$ εφαπτόμενο στον κύκλο και άρα κάθετο στην ακτίνα του ρ. Εάν τώρα θεωρήσουμε δυο από τους αγωγούς της συστοιχίας όπως ο Λ και ο Λ' στο παρακάτω σχήμα στο β) τότε οι ευθείες ΛΡ και ΛΡ' παίζουν το ρόλο της ακτίνας ρ και άρα τα αντίστοιχα παραγόμενα πεδία B και B' είναι κάθετα σε αυτά και το συνιστάμενο πεδίο, λόγω συμμετρίας είναι κατακόρυφο προς τα πάνω. Από τους δεδομένους 5 αγωγούς υπάρχουν 2 τέτοια ζευγάρια και έτσι περισσεύει ο αγωγός στο Ο. Αλλά και το πεδίο αυτού του αγωγού προκύπτει κατακόρυφο από τον νόμο του δεξιού χεριού. Έτσι το ολικό συνιστάμενο πεδίο είναι κατά μήκος του άξονα y. Επομένως θα θεωρήσουμε μόνο την y-συνιστώσα του κάθε πεδίου.



Π.χ. για τον αγωγό Λ στο παραπάνω σχήμα, εάν βρίσκεται σε απόσταση y από το O, τότε η απόσταση ΛP είναι ίση με

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + y^2}$$

και η y-συνιστώσα του πεδίου B που παράγει στο σημείο P είναι ίση με

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} sin\theta$$

Από απλή τριγωνομετρία

$$sin\theta = \frac{\alpha}{\rho}$$

και έτσι

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}\alpha = \frac{\mu_0 I \alpha}{2\pi(\alpha^2 + y^2)}$$

Οι 5 αγωγοί βρίσκονται στις θέσεις $y = 0, \pm 0.3, \pm 06\ m$ και έτσι έχουν αντίστοιχα B_y ίσα με:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3}{2\pi \times 0.4} = 15 \times 10^{-7}\ T$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}\alpha = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 0.4}{2\pi(0.3^2 + 0.4^2)} = 9.6 \times 10^{-7}\ T$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2}\alpha = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 0.4}{2\pi(0.6^2 + 0.4^2)} = 4.61 \times 10^{-7}\ T$$

Έτσι το συνολικό πεδίο είναι ίσο με

$$B_{O\Lambda} = (15 + 2 \times 9.6 + 2 \times 4.61) \times 10^{-7}\ T = 4.342 \times 10^{-6}\ T$$

(οι παράγοντες "2" είναι για τους αγωγούς που λαμβάνονται κατά ζεύγη)