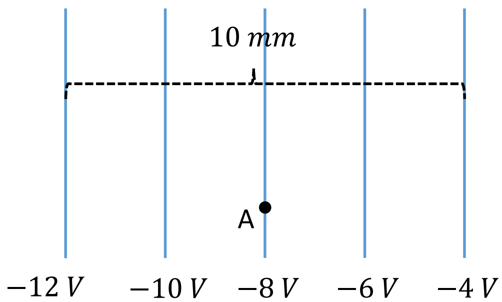
<u>Λύσεις Προόδου 1 – Φυσική ΙΙ Χημ. Μηχανικών – Εαρινό 2016</u>

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ισοδυναμικές επιφάνειες σε κάποια περιοχή του χώρου. Εάν ένα <u>αρνητικό</u> σημειακό φορτίο $q = -3\ \mu C$ αφεθεί ελεύθερο στο σημείο Α, να βρεθεί προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί και να βρεθεί το έργο που παράγεται από το πεδίο εάν η μετακίνηση αυτή είναι ίση με $2\ mm$.



<u>Λύση</u>: Τα αρνητικά φορτία κινούνται προς περιοχές υψηλότερου δυναμικού και άρα το q θα κινηθεί προς τα δεξιά. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το δυναμικό αυξάνει γραμμικά με την απόσταση και αυτό σημαίνει ότι $E =$ σταθερό αφού

$$V = -\int E dx = -E \int dx = -Ex + c$$

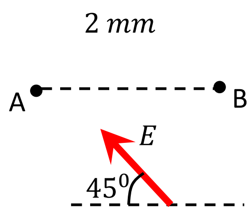
Από το δεδομένο σχήμα έχουμε αύξηση της τάσης κατά $-4 - (-12) = 8\ V$ μέσα σε $10\ mm$ και άρα από απλή αναλογία μπορούμε να πούμε ότι στα $2\ mm$ θα έχουμε μεταβολή κατά $8/5 = 1.6\ V$. Η διαφορά της δυναμικής ενέργειας του φορτίου ισούται με

$$\Delta U = q\Delta V = -3 \times 10^{-6} \times 1.6 = -4.8 \times 10^{-6}\ Joules$$

Το έργο δίνεται από την

$$W = -\Delta U = 4.8 \times 10^{-6}\ Joules$$

Στο παρακάτω σχήμα ένα θετικό φορτίο $3\ \mu C$ αναγκάζεται από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις να κινηθεί ευθύγραμμα κατά $2\ mm$ στην ευθύγραμμη διαδρομή ΑΒ μέσα σε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $12\ N/C$ όπως φαίνεται. Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού κατά τη μετακίνηση αυτή.



Λύση: Η διαφορά δυναμικού μεταξύ του Α και Β δίνεται από την

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

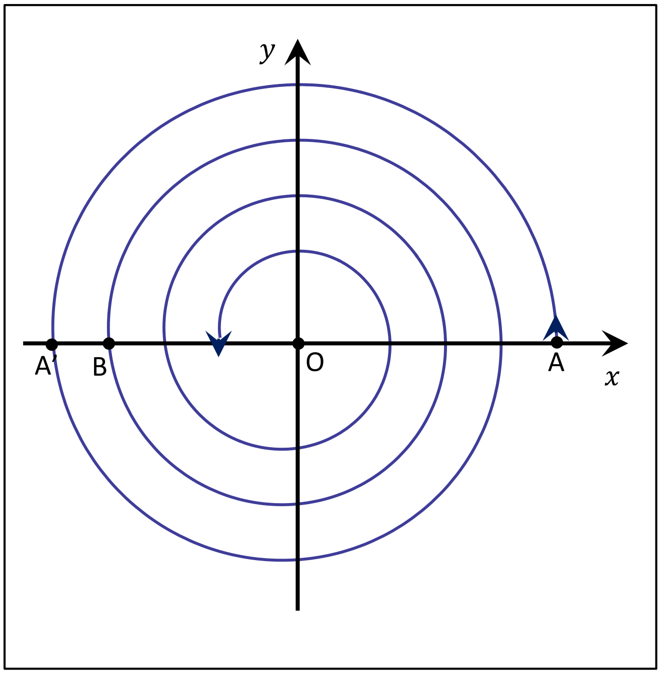
Το $d\vec{l}$ είναι κατά τον άξονα x αλλά το $\vec{E}$ σχηματίζει γωνία $180 - 45 = 135^0$ με αυτόν. Έτσι

$$V_B - V_A = -\int_A^B E cos 135^0 dx$$

Το $Ecos135^0$ είναι σταθερό και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Οπότε

$$V_B - V_A = -Ecos135^0 \int_A^B dx = -Ecos135^0 \Delta x = -12 \times (-0.707) \times 2 \times 10^{-3} = 0.017\ V$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση $V(x) = ax^2$ όπου $a = 10\ Volts/m^2$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένα θετικό φορτίο $3\ \mu C$ αναγκάζεται από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις να κινηθεί σε αυτή την περιοχή κατά μήκος της σπειροειδής τροχιάς ΑΒ. Η τροχιά αυτή έχει την ιδιότητα να τέμνει τον άξονα x διαδοχικά κατά 10% λιγότερο από ότι η προηγούμενη τομή, για παράδειγμα η x-συντεταγμένη του σημείου Α' είναι $x'_A = -0.9\ m$ ενώ του σημείου Α είναι $x_A = 1.0\ m$. Να βρεθεί η διαφορά της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μεταξύ των σημείων Α και Β.



<u>Λύση</u>:

Το σημείο Β είναι η 3η σε σειρά τομή μετά το Α και άρα η συντεταγμένη του θα είναι ίση με

$$x_B = -(0.9)^3\, x_A = -0.729\, m$$

Από την δεδομένη συνάρτηση $V(x)$ έχουμε:

$$V_A = 10 \times 1^2 = 10\, Volts$$

$$V_B = 10 \times (0.729)^2 = 5.31\, Volts$$

Η διαφορά δυναμικού είναι ίση με

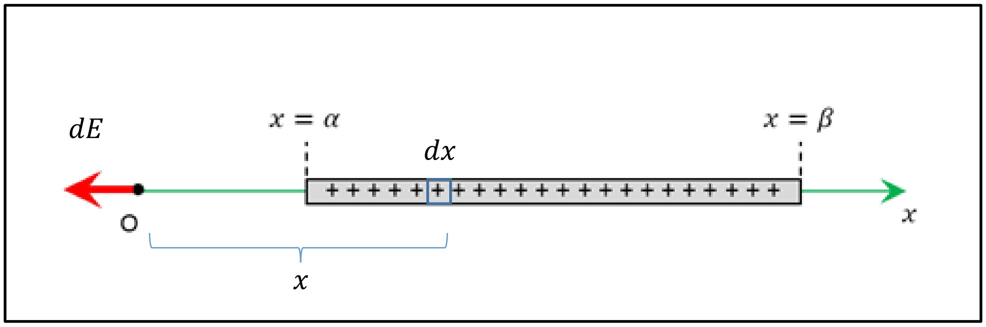
$$V_B - V_A = 5.31 - 10 = -4.69\, Volts$$

Η αντίστοιχη διαφορά δυναμικής ενέργειας είναι ίση με

$$U_B - U_A = q(V_B - V_A) = -4.69 \times 3 \times 10^{-6} = -14.07 \times 10^{-6}\, J$$

Να υπολογισθεί με ολοκλήρωση το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στην αρχή των αξόνων λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που φέρει φορτίο Q και που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x από το $x = \alpha$ έως το $x = \beta$ (όπου $\beta > \alpha > 0$).

Λύση: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ράβδος επάνω στον άξονα x. Θα τεμαχίσουμε τη ράβδο σε μικρά απειροστά κομμάτια με μήκος dx το καθένα, όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα το οποίο απέχει απόσταση x από την αρχή Ο και θα υπολογίσουμε το αντίστοιχο πεδίο που δημιουργείται στο σημείο Ο.



Πόσο φορτίο dq περιέχει το dx; Αφού η κατανομή του φορτίου είναι ομοιογενής, τότε ο λόγος των φορτίων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών. Παίρνοντας αναλογίες για την όλη ράβδο και το απειροστό της κομμάτι, οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dx}{\beta - \alpha}$$

Αφού το dq είναι στην ουσία ένα σημειακό φορτίο, τότε θα δημιουργεί στο σημείο Ο ένα πεδίο dE με φορά προς τα αριστερά (εάν τοποθετήσουμε στο Ο ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο τότε η δύναμη που θα δεχθεί από το dq θα είναι προς τα αριστερά) και μέτρο που σύμφωνα με την Εξ. 2.3 δίνεται από την

$$dE = k\frac{dq}{x^2}$$

ή

$$dE = k\frac{Q}{\beta - \alpha}\frac{dx}{x^2}$$

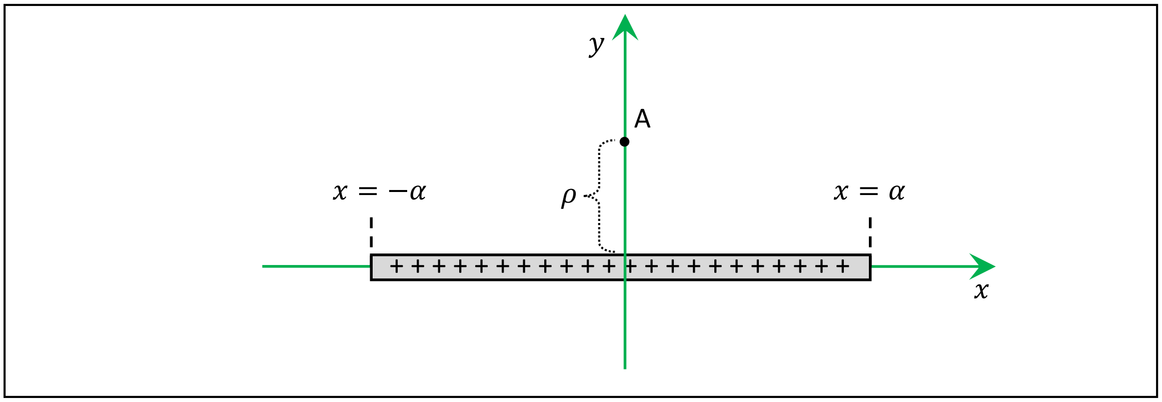
απ' όπου με ολοκλήρωση επάνω σε όλη τη ράβδο προκύπτει το αποτέλεσμα

$$E = k\frac{Q}{\beta - \alpha}\int_{x=\alpha}^{b}\frac{dx}{x^2} = k\frac{Q}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

ή

$$E = k\frac{Q}{\alpha\beta}$$

Να υπολογισθεί με τη μέθοδο της ολοκληρώσεως το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο Α του παρακάτω σχήματος με συντεταγμένη $(0, \rho)$ λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που βρίσκεται επάνω στον άξονα x από το $x = -\alpha$ έως το $x = \alpha$ εάν η γραμμική πυκνότητα του φορτίου της είναι ίση με λ. Σημείωση: Λόγω έλλειψης χρόνου, αφήστε το αποτέλεσμά σας σε μορφή ολοκληρώματος το οποίο θα πρέπει να περιέχει μέσα μόνο γεωμετρικές μεταβλητές όπως μήκη και γωνίες (κάποιες πρέπει να τις ορίσετε εσείς) ενώ εκτός ολοκληρώματος θα πρέπει να τοποθετηθούν όλες οι σταθερές.

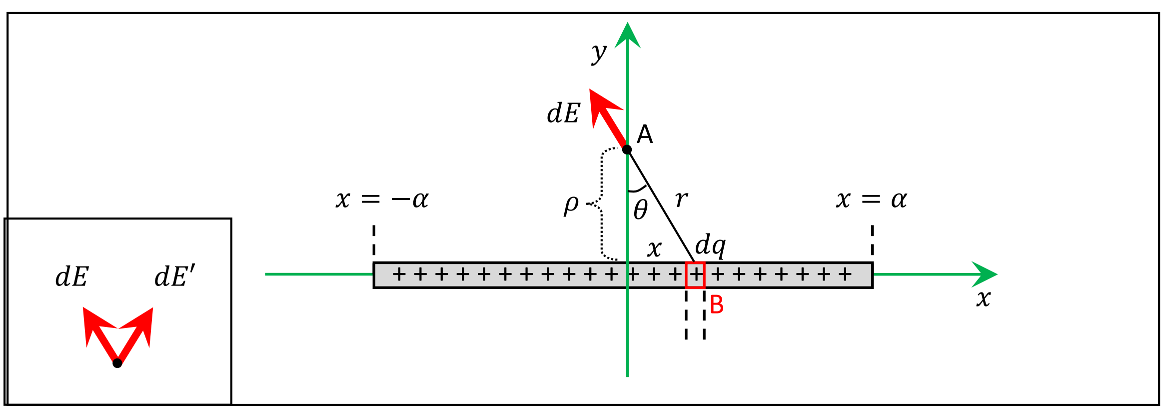


Λύση:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, "τεμαχίζουμε" τη ράβδο σε απειροστά κομμάτια. Έστω ένα τέτοιο κομμάτι απειροστού εύρους dx στο σημείο B της ράβδου με συντεταγμένη x το οποίο απέχει απόσταση r από το σημείο A. Το κομμάτι αυτό θα περιέχει απειροστό φορτίο ίσο με $dq = \lambda dx$ και έτσι θα παράγει στο σημείο A ένα απειροστό πεδίο ίσο με

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\lambda\frac{dx}{r^2}$$

Η φορά του dE φαίνεται στο Σχήμα. Το dE μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες x και y. Προσέξτε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη συμμετρικά επάνω στον άξονα x και έτσι για κάθε σημείο B υπάρχει και το συμμετρικό του σημείο, έστω B', το οποίο θα ισαπέχει από το B και θα παράγει πεδίο dE' ίσου μέτρου αλλά διαφορετικής φοράς προς τα πάνω και δεξιά, όπως φαίνεται και στο ένθετο του σχήματος. Έτσι, όταν αθροίσουμε την συνεισφορά του κάθε κομματιού της ράβδου, οι οριζόντιες συνιστώσες του ολικού πεδίου αλληλο-αναιρούνται σε ζεύγη και το πεδίο θα έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Άρα από τη συνεισφορά του σημείου B θα κρατήσουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα $dE_y = dE cos\theta$



Ολοκληρώνοντας όλες τις συνεισφορές οδηγεί στο

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} dE_y = \int_{x=-a}^{x=a} dE cos\theta = k\lambda \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx}{r^2} cos\theta$$

Να υπολογισθεί με τη μέθοδο της ολοκληρώσεως το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο κέντρο Ο ομοιόμορφα φορτισμένου λεπτού ημιδακτυλίου αμελητέου πάχους, ακτίνας R και φορτίου ίσου με Q.

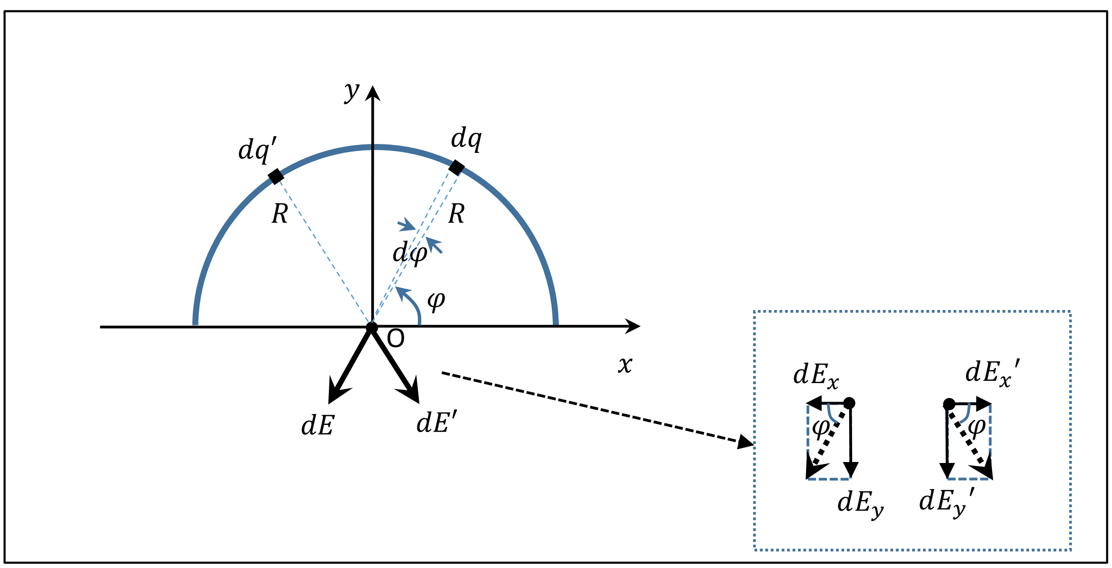
<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ο ημιδακτύλιος εκτείνεται από γωνία $\varphi = 0$ έως και $\varphi = \pi$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το δακτύλιο ως ένα σύνολο σημειακών φορτίων, να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 2.3 για το καθένα από αυτά και τελικά να αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) ώστε να βρούμε το ολικό πεδίο που αυτά δημιουργούν. Για το σκοπό αυτό "τεμαχίζουμε" τον δακτύλιο σε στοιχειώδη κομμάτια που το καθένα αντιστοιχεί σε στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ και περιέχει φορτίο dq. Αυτό το φορτίο δημιουργεί στο κέντρο Ο ένα ηλεκτρικό πεδίο ίσο με

$$dE = k\frac{dq}{R^2}$$

Συμμετρικά ως προς το φορτίο dq σχετικά με τον άξονα y υπάρχει και κάποιο άλλο φορτίο $dq' = dq$ το οποίο δημιουργεί στο κέντρο Ο ένα ηλεκτρικό πεδίο ίσο με

$$dE' = k\frac{dq'}{R^2}$$



Όπως φαίνεται και στο ένθετο στο κάτω δεξί μέρος του σχήματος, τα δυο πεδία dE και dE' είναι ίσα κατά μέτρα αλλά διαφέρουν κατά προσανατολισμό. Λόγω της σχετικής συμμετρίας των δυο φορτίων dq και dq' ως προς τον άξονα y, τα δυο πεδία έχουν ίσες και αντίθετες x-συνιστώσες οπότε αυτές αλληλο-εξουδετερώνονται μεταξύ τους. Επομένως κατά την ολοκλήρωση θα θεωρήσουμε μόνο την y-συνιστώσα

$$dE_y = dEsin\varphi$$

η οποία στο συγκεκριμένο σχήμα είναι προς τα κάτω. Το ολικό πεδίο θα ισούται με

$$E = \int_{HM} dE_y = \int_{HM} dEsin\varphi$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται επάνω σε όλο τον ημιδακτύλιο (ΗΜ). Αφού το φορτίο είναι ομοιογενές, τότε παίρνοντας απλές αναλογίες οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$\frac{dq}{Q} = \frac{d\varphi}{\pi}$$

Επομένως το στοιχειώδες πεδίο dE γράφεται ως εξής:

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{Qd\varphi}{\pi R^2}$$

Η ολοκλήρωση οδηγεί στο αποτέλεσμα

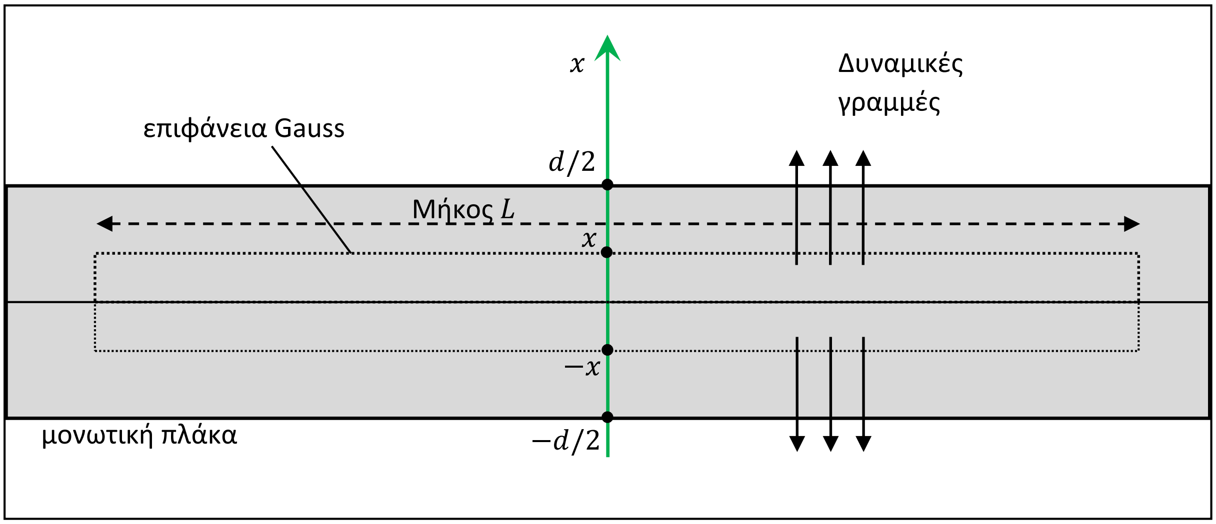
$$E = k\frac{Q}{\pi R^2}\int_{\varphi=0}^{\pi} sin\varphi\, d\varphi = k\frac{Q}{\pi R^2}[-cos\varphi]_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{2kQ}{\pi R^2}$$

με φορά προς τα κάτω.

Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο εσωτερικό μιας επίπεδης μονωτικής πλάκας απείρου επιφάνειας και πεπερασμένου πάχους d (μη λεπτή πλάκα) με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου η. Πάρτε για ευκολία τον άξονα x κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, με το $x = 0$ στο κεντρικό επίπεδο της πλάκας (έτσι ώστε οι επιφάνειες της πλάκας να είναι στο $x = \pm d/2$) και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι υπάρχει συμμετρία ως προς $\pm x$. Επίσης υποθέστε ότι η κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών είναι παρόμοια με αυτή μιας λεπτής πλάκας με τον ίδιο προσανατολισμό.

Λύση:

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο εσωτερικό της πλάκας, με τις δυο επιφάνειές του να έχουν σταθερή συντεταγμένη $\pm x$. Έστω ότι οι άλλες δυο διαστάσεις αυτής της επιφάνειας είναι μήκος L κατά μήκος της σελίδας και βάθος w κάθετα στη σελίδα.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Η επιφάνεια Gauss περικλείει όγκο $V = 2xLw$ και έτσι από την πυκνότητα φορτίου το περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q = \eta V = 2\eta xLw$$

Από τα δεδομένα, οι δυναμικές γραμμές είναι κατά μήκος του άξονα x και έτσι στο παραπάνω ολοκλήρωμα συνεισφέρουν μόνο οι δυο επιφάνειες που είναι κάθετες στον άξονα x με εμβαδό $A = Lw$ η καθεμία. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με το κάθετο της κάθε επιφάνειας και έτσι:

$$E(x)Lw + E(-x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\varepsilon_0}$$

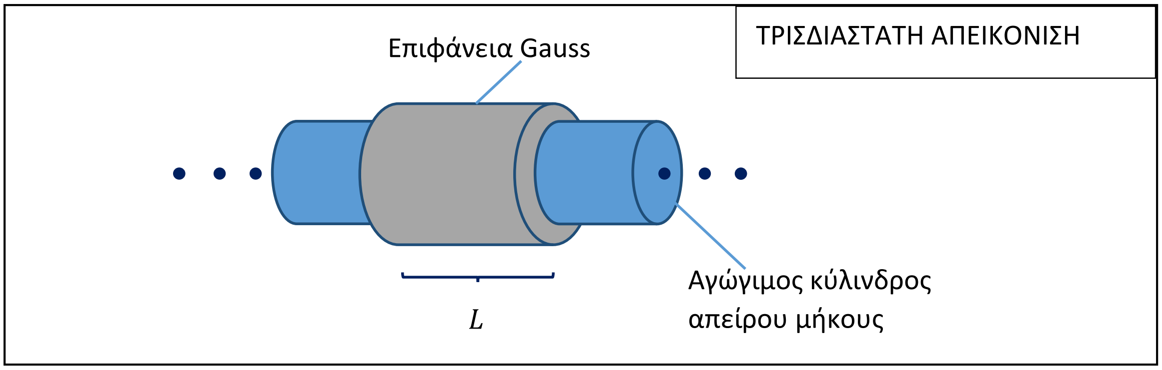
Λόγω συμμετρίας περιμένουμε $E(x) = E(-x)$ οπότε

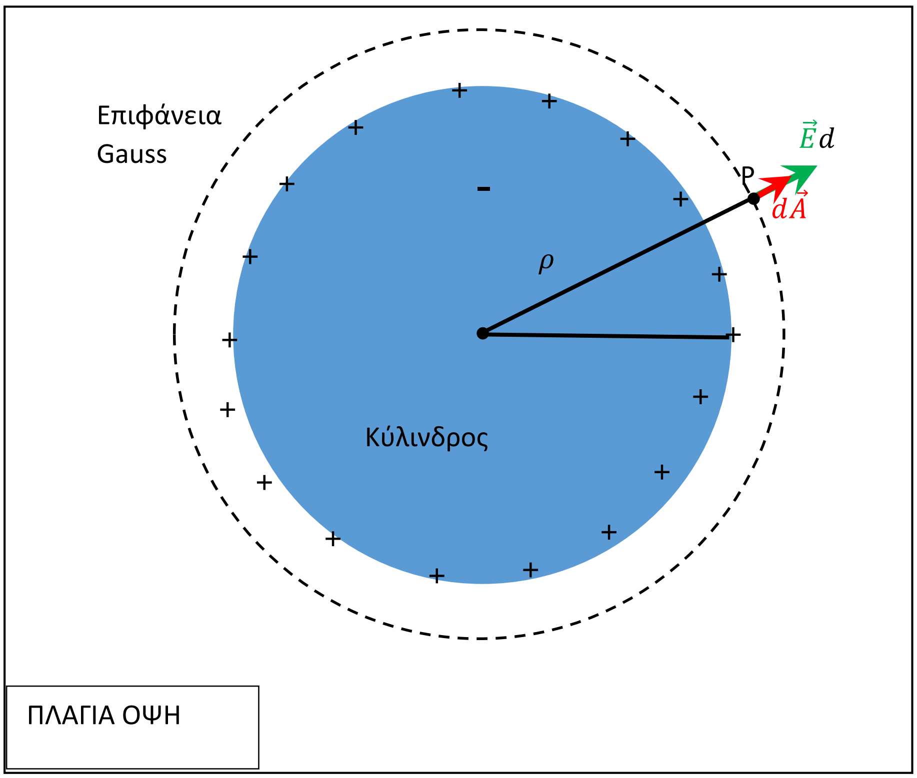
$$2E(x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\varepsilon_0} => E(x) = \frac{\eta}{\varepsilon_0}x$$

B2. Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στον εξωτερικό χώρο ενός αγώγιμου κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με σ

Λύση:

Όπως φαίνεται και στα παρακάτω δυο σχήματα, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho > R$ και μήκους L, ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο.





Στους αγωγούς όλο το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνειά τους και το πεδίο είναι κάθετο σε αυτήν. Άρα οι δυναμικές γραμμές είναι δισδιάστατες ακτινικές όπως στην γραμμή φορτίου απείρου μήκους. Το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και + B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1}\vec{E}\cdot d\vec{A}+\int_{B_2}\vec{E}\cdot d\vec{A}+\int_{\Pi}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi}EdA=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (*βάση×ύψος*). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q. Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του αγώγιμου κυλίνδρου, η αντίστοιχη περικλειόμενη επιφάνεια του αγωγού έχει εμβαδό ίσο με

$$A = 2\pi RL$$

Δεδομένου ότι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ είναι εξ' ορισμού φορτίο ανά εμβαδό, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \sigma A = \sigma 2\pi RL$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\sigma 2\pi RL}{\varepsilon_0}$$

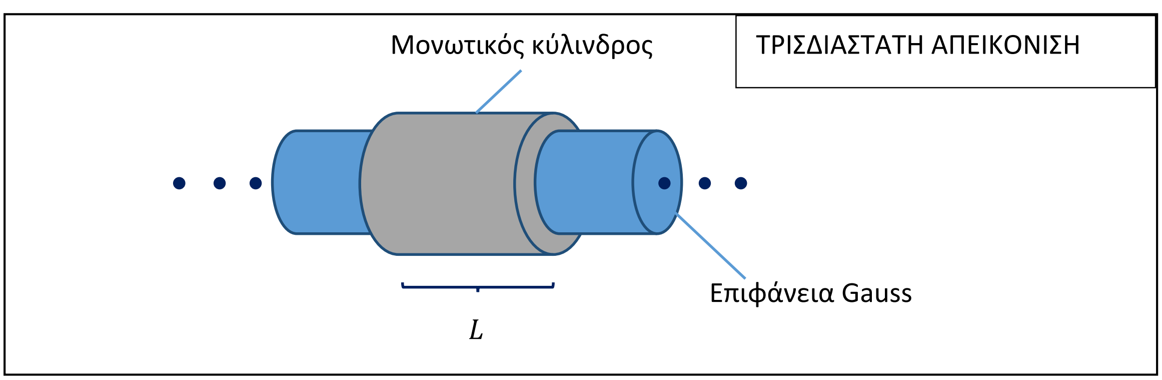
ή

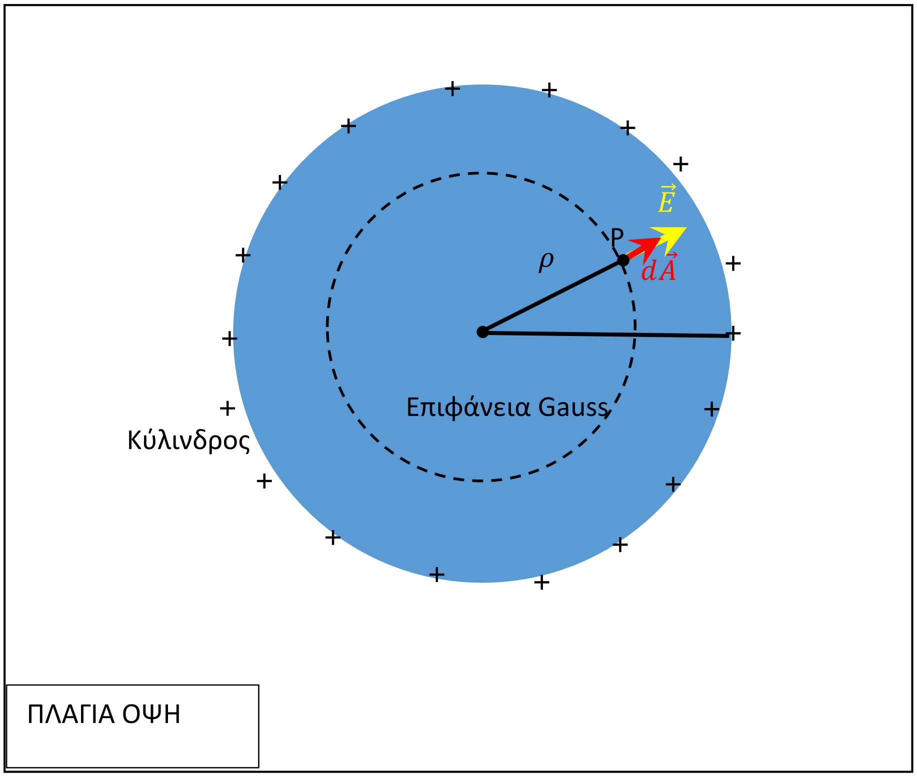
$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \rho}$$

Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος). Πάρτε δεδομένο ότι οι δυναμικές γραμμές είναι δισδιάστατες ακτινικές, όπως αυτές της γραμμής φορτίου.

<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται και στα παρακάτω δυο σχήματα, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho < R$ και μήκους L, ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο.





Το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και + B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A}=EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1}\vec{E}\cdot d\vec{A}+\int_{B_2}\vec{E}\cdot d\vec{A}+\int_{\Pi}\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi}EdA=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi}dA=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (*βάση×ύψος*). Επομένως

$$2E\pi\rho L=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q. Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του αγώγιμου κυλίνδρου, ο αντίστοιχος περικλειόμενος όγκος της επιφάνειας Gauss ισούται με

$$V=\pi\rho^2 L$$

Δεδομένου ότι η πυκνότητα φορτίου η είναι εξ' ορισμού φορτίο ανά όγκο, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \eta V = \eta\pi\rho^2 L$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\eta\pi\rho^2 L}{\varepsilon_0}$$

οπότε

$$E = \frac{\eta\rho}{2\varepsilon_0}$$

Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι κυλινδρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με

$$E_\rho = \frac{5c\rho^4}{R^5} sin(5\varphi)$$
$$E_\varphi = \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi)$$
$$E_z = 0$$

όπου c είναι μια σταθερά σε $Volts$ και η R μια άλλη σταθερά σε m. Να βρεθεί το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα y που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

Λύση:

Αφού $E_z = 0$ τότε $\partial V/\partial z = 0$ που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το z. Από την $E_\rho = -\partial V/\partial\rho$ με ολοκλήρωση ως προς ρ παίρνουμε

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + \beta(\varphi)$$

Από την φ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi} => \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi) = \frac{5c\rho^4}{R^5} cos(5\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{d\beta}{d\varphi}$$

Επομένως

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = 0$$

και άρα η β είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του φ. Έτσι

$$V = -\frac{c\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + \beta$$

Για να βρούμε τη β χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι $V = 0$ σε ένα σημείο στον άξονα y που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων. Στις πολικές συντεταγμένες, ο άξονας y αντιστοιχεί σε $z = 0$ και $\varphi = \pi/2$ και το σημείο αυτό βρίσκεται σε $\rho = R$ και έτσι

$$0 = -c \times 1^5 sin(5\pi/2) + \beta$$

οπότε

$$\beta = c$$

Έτσι:

$$V = -c\frac{\rho^5}{R^5} sin(5\varphi) + c$$

Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι σφαιρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με

$$E_r = \frac{2bcos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{bsin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

όπου b είναι μια σταθερά σε $Volts \cdot m^2$. Να βρεθεί το δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

<u>Λύση</u>:

Αφού $E_\varphi = 0$ τότε $\partial V/\partial\varphi = 0$ που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το φ. Από την $E_r = -\partial V/\partial r$ με ολοκλήρωση ως προς r παίρνουμε

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u(\theta)$$

Από την θ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} => \frac{bsin\theta}{r^3} = \frac{bsin\theta}{r^3} - \frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}$$

Επομένως

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

και άρα η u είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του θ. Έτσι

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u$$

Για να βρούμε τη u χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι $V = 0$ σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, ο άξονας z αντιστοιχεί σε $\theta = 0$ και το σημείο αυτό βρίσκεται σε $r = R$ και έτσι

$$0 = \frac{bcos0}{R^2} + u$$

οπότε

$$u = -\frac{b}{R^2}$$

Έτσι:

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} - \frac{b}{R^2}$$

Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι καρτεσιανές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με:

$$E_x = cke^{-kz}sinkx$$
$$E_y = 0$$
$$E_z = cke^{-kz}coskx$$

όπου c είναι μια σταθερά σε $Volts$, η k μια άλλη σταθερά σε m^{-1} και η συντεταγμένη z περιορισμένη να παίρνει μόνο θετικές τιμές. Να βρεθεί το δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι τείνει στην τιμή c για μεγάλες θετικές τιμές του z.

<u>Λύση</u>:

Αφού $E_y = 0$ τότε $\partial V/\partial y = 0$ που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το y. Από την $E_x = -\partial V/\partial x$ με ολοκλήρωση ως προς x παίρνουμε

$$V = ce^{-kz}coskx + u(z)$$

Από την z-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} => cke^{-kz}coskx = cke^{-kz}coskx - \frac{du}{dz}$$

Επομένως

$$\frac{du}{dz} = 0$$

και άρα η u είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του z. Έτσι

$$V = ce^{-kz}coskx + u$$

Για να βρούμε τη u χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι το δυναμικό τείνει στην τιμή c για μεγάλες θετικές τιμές του z.

$$c = ce^{-k\infty}coskx + u$$

οπότε

$$u = c$$

Έτσι:

$$V = ce^{-kz}coskx + c = c(1 + e^{-kz}coskx)$$