ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ UNIVERSITY OF PATRAS	ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Εξέταση Φυσικής - Σεπτεμβρίου 2015 Διδάσκων: Δ. Κουζούδης
Ημερομηνία	16 Σεπτεμβρίου 2015
Ονοματεπώνυμο:	
ΑΜ: (το 7 ψήφιο)	

Υποδείξεις προς τους φοιτητές:

α) Η εξέταση είναι με κλειστές σημειώσεις και βιβλία, και αποτελείται από 5 ισοδύναμα προβλήματα. Επιτρέπεται η χρήση των τυπολογίων που ετοίμασε ο διδάσκοντας.

β) Απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων αλλά και οποιασδήποτε είδους ηλεκτρονικής συσκευής, συμπεριλαμβανομένων και των αριθμομηχανών τσέπης αφού όλες οι απαντήσεις είναι αναλυτικές. Βεβαιωθείτε ότι τα κινητά είναι σε σιγή και όχι επάνω στο θρανίο. Επίσης επάνω στο θρανίο δεν πρέπει να βρίσκονται τσάντες ή είδη ενδυμασίας.

γ) Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρεις (αλλά όχι πολύ φλύαρες). Αποτελέσματα χωρίς τεκμηρίωση δεν θα γίνονται δεκτά ακόμα και εάν είναι αριθμητικώς σωστά. Επίσης οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι συναρτήσει των δεδομένων αλλιώς δεν θα θεωρούνται σωστές.

δ) Σιγουρευτείτε ότι έχετε υπογράψει στο Παρουσιολόγιο το οποίο θα σας το φέρει ο διδάσκοντας κατά την διάρκεια της εξέτασης. Επίσης να έχετε το πάσο έτοιμο επάνω στο θρανίο ώστε να μη χάνετε πολύτιμο χρόνο όταν σας ζητηθεί κατά τη διάρκεια της πιστοποίησης.

ε) Δεν επιτρέπεται για οποιοδήποτε λόγο να αφήσετε τη θέση σας κατά τη διάρκεια της εξέτασης. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό λόγω ανωτέρω βίας, ο διδάσκοντας θα πάρει το γραπτό σας και θα σας δώσει προφορική εξέταση στις αμέσως επόμενες ημέρες.

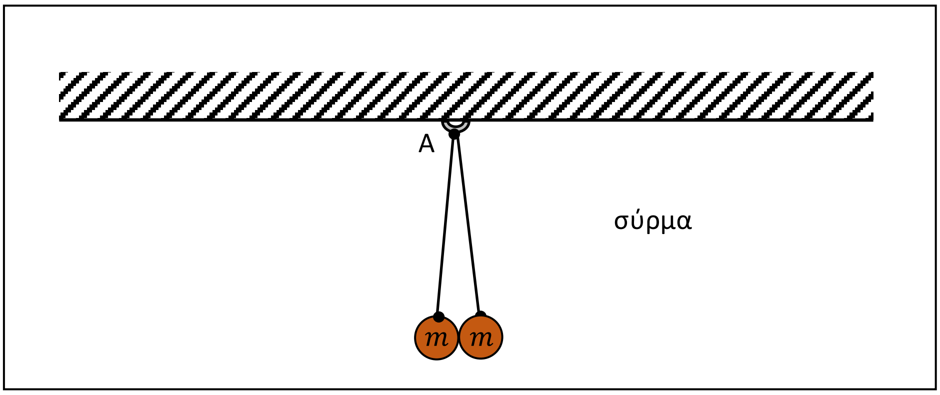
στ) Επειδή κάποιοι φοιτητές συνεχίζουν να γράφουν και μετά το πέρας της εξέτασης, δηλώνω ότι μετά την αποχώρησή μου από την αίθουσα δεν πρόκειται να δεχτώ κανένα γραπτό αφού δεν είναι δυνατό να ελέγξω τον προορισμό του.

Καλή επιτυχία!

$

1{

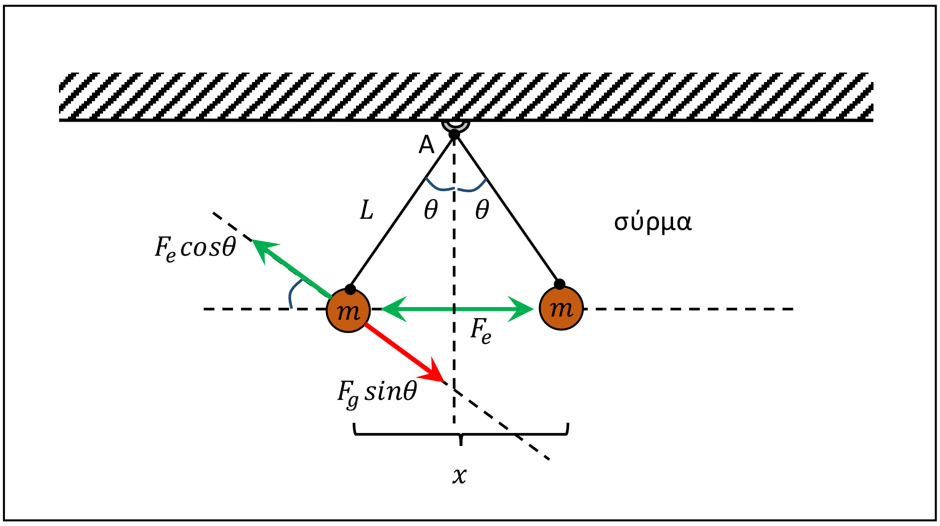
Στο παρακάτω σχήμα, δυο πανομοιότυπα χάλκινα συμπαγή σφαιρίδια πολύ μικρών διαστάσεων και μάζας m το καθένα, αναρτιούνται με ξεχωριστό αβαρές χάλκινο σύρμα το καθένα από τον ίδιο χαλύβδινο μικρό γάντζο Α στην οροφή. Τα δυο σύρματα είναι πανομοιότυπα με μήκος L και απειροελάχιστο πάχος το καθένα. Αρχικά τα δυο σφαιρίδια είναι αφόρτιστα και ένας φοιτητής τοποθετεί με κάποιο τρόπο ένα συνολικό φορτίο q στο σημείο Α και καταγράφει αμέσως μετά την απόσταση x μεταξύ των δυο σφαιριδίων (από κέντρο σε κέντρο). Να βρείτε μια έκφραση του φορτίου q συναρτήσει των δεδομένων x, L, m αλλά και των σταθερών g (βαρυτική) και K (ηλεκτρική) της Φυσικής (Σημείωση: μπορείτε να θεωρήσετε κατάσταση ισορροπίας και να λάβετε προσεγγιστικά ότι για μικρές γωνίες ισχύει $cos\theta \approx 1$. Τα σφαιρίδια μπορούν να εκληφθούν ως σημειακά κατά προσέγγιση).



Λύση: Το φορτίο που τοποθετεί ο φοιτητής στο σημείο Α δεν θ μείνει εκεί αφού όλα τα υλικά είναι αγώγιμα (γάντζος, σύρματα, σφαιρίδια). Επειδή το σύρμα είναι απειροστά λεπτό, το περισσότερο φορτίο θα καταλήξει στα σφαιρίδια. Λόγω συμμετρίας, το φορτίο θα μοιραστεί δια δύο και μπορούμε να πούμε προσεγγιστικά ότι στο κάθε σφαιρίδιο έχουμε φορτίο $q/2$. Αφού πρόκειται για το ίδιο φορτίο, θα επέλθει ηλεκτρική άπωση

$$F_e = k\frac{(q/2)(q/2)}{x^2} = k\frac{q^2}{4x^2}$$

μεταξύ των δυο σφαιριδίων, όπου x είναι η απόσταση μεταξύ τους. Εάν δεν υπήρχε το σύρμα και η βαρύτητα, τα σφαιρίδια θα είχαν μετακινηθεί στο άπειρο λόγω της άπωσης αυτής. Όπως όμως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο σφαιρίδιο δρα η τάση του σύρματος και η βαρύτητα $F_g = mg$ και έτσι τα σφαιρίδια ισορροπούν σε κάποια γωνία θ συμμετρικά ως προς την κατακόρυφο.



Θεωρήστε ένα άξονα κάθετο στο σύρμα στο σφαιρίδιο στα αριστερά (λόγω συμμετρίας, οι δυνάμεις είναι οι ίδιες και στα δυο σφαιρίδια). Σε αυτό τον άξονα υπάρχουν δυο συνιστώσες, η βαρυτική $F_g sin\theta$ και της ηλεκτρικής $F_e cos\theta$. Λόγω ισορροπίας, αυτές οι δυο είναι ίσες και έτσι

$$k\frac{q^2}{4x^2}cos\theta = mgsin\theta$$

Χρησιμοποιώντας τη δεδομένη προσέγγιση της μικρής γωνίας, έχουμε

$$k\frac{q^2}{4x^2} \approx mgsin\theta$$

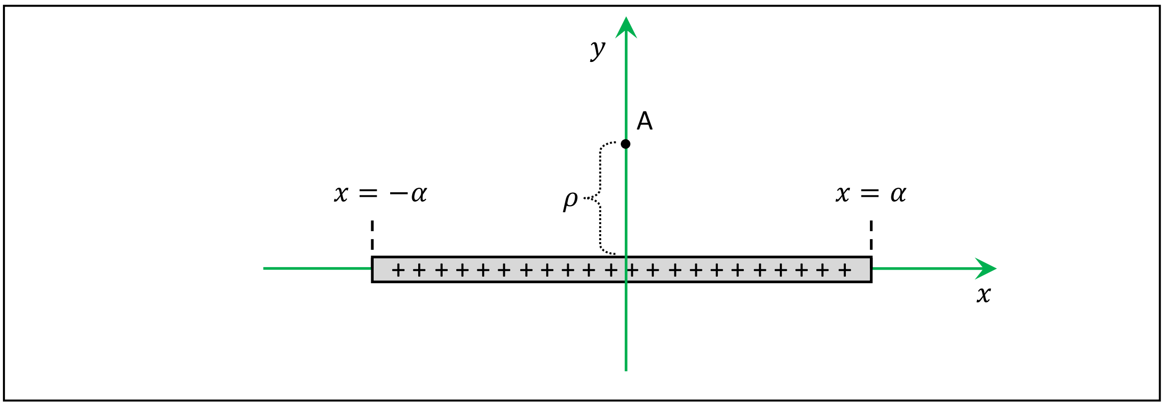
Από απλή τριγωνομετρία στο παραπάνω σχήμα, έχουμε $sin\theta = x/2L$ οπότε

$$k\frac{q^2}{4x^2} \approx mg\frac{x}{2L}$$

Λύνοντας

$$q \approx \sqrt{mg\frac{2x^3}{kL}}$$

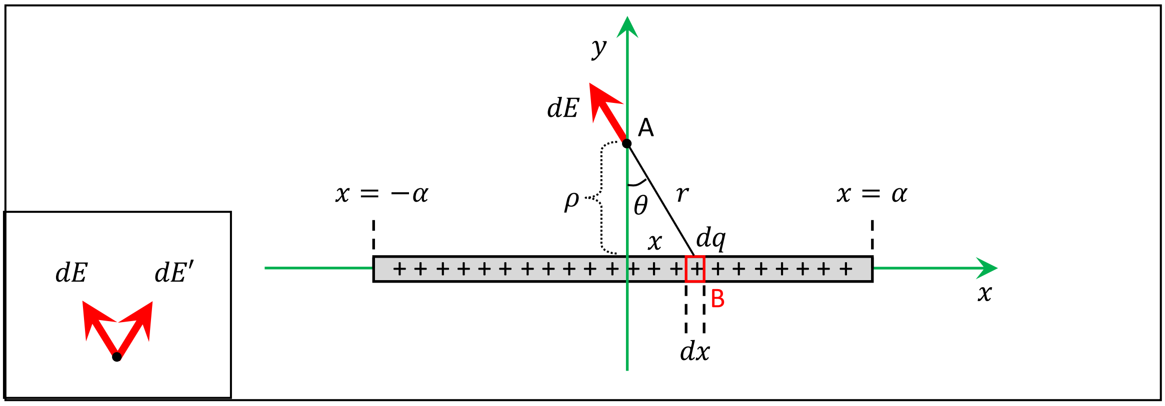
2) Να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο Α του παρακάτω σχήματος με συντεταγμένη $(0, \rho)$ λόγω μιας ομοιόμορφα φορτισμένης λεπτής ράβδου που βρίσκεται επάνω στον άξονα x από το $x = -\alpha$ έως το $x = \alpha$ εάν η γραμμική πυκνότητα του φορτίου της είναι ίση με λ.



Λύση: Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, "τεμαχίζουμε" τη ράβδο σε απειροστά κομμάτια. Έστω ένα τέτοιο κομμάτι απειροστού εύρους dx στο σημείο Β της ράβδου με συντεταγμένη x το οποίο απέχει απόσταση r από το σημείο Α. Το απειροστό αυτό κομμάτι θα περιέχει απειροστό φορτίο ίσο με $dq = \lambda dx$ και έτσι θα παράγει στο σημείο Α ένα απειροστό πεδίο ίσο με

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\lambda\frac{dx}{r^2}$$

Η φορά του dE φαίνεται στο Σχήμα. Το dE μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες x και y. Προσέξτε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη συμμετρικά επάνω στον άξονα x και έτσι για κάθε σημείο Β υπάρχει και το συμμετρικό του σημείο, έστω Β', το οποίο θα ισαπέχει από το Β και θα παράγει πεδίο dE' ίσου μέτρου αλλά διαφορετικής φοράς προς τα πάνω και δεξιά, όπως φαίνεται και στο ένθετο του σχήματος. Έτσι, όταν αθροίσουμε την συνεισφορά του κάθε κομματιού της ράβδου, οι οριζόντιες συνιστώσες του ολικού πεδίου αλληλο-αναιρούνται σε ζεύγη και έτσι το πεδίο θα έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα. Άρα από τη συνεισφορά του σημείου B θα κρατήσουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα $dE_y = dEcos\theta$



Ολοκληρώνοντας όλες τις συνεισφορές οδηγεί στο

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} dE_y = \int_{x=-a}^{x=a} dEcos\theta = k\lambda \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx}{r^2} cos\theta$$

Μέσα στο ολοκλήρωμα έχουμε τρεις μεταβλητές, τα θ, x και r. Πρέπει να τα εκφράσουμε όλα συναρτήσει μιας μεταβλητής αλλά και συναρτήσει του δεδομένου ρ. Επιλέγουμε ως κοινή μεταβλητή τη γωνία θ. Από απλή τριγωνομετρία στο παραπάνω σχήμα έχουμε

$$tan\theta = \frac{x}{\rho} => x = \rho tan\theta => dx = \frac{\rho}{cos^2\theta} d\theta$$

$$rcos\theta = \rho => \frac{1}{r} = \frac{cos\theta}{\rho}$$

Έστω θ_αη μέγιστη γωνία που αντιστοιχεί στα όρια $x = \pm a$ της ράβδου. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E = k\lambda \int_{\theta=-\theta_\alpha}^{\theta_\alpha} \frac{\rho}{cos^2\theta} d\theta \frac{cos^2\theta}{\rho^2} cos\theta = \frac{k\lambda}{\rho} [cos\theta]_{\theta=-\theta_\alpha}^{\theta_\alpha} = \frac{2k\lambda}{\rho} cos\theta_\alpha$$

Από απλή τριγωνομετρία μπορούμε να δούμε ότι

$$cos\theta_\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

Τελικά

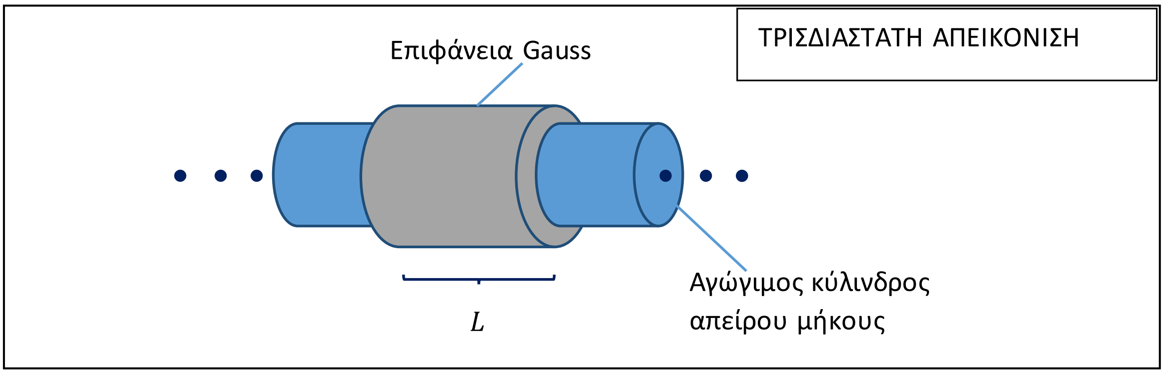
$$E = \frac{2k\lambda}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

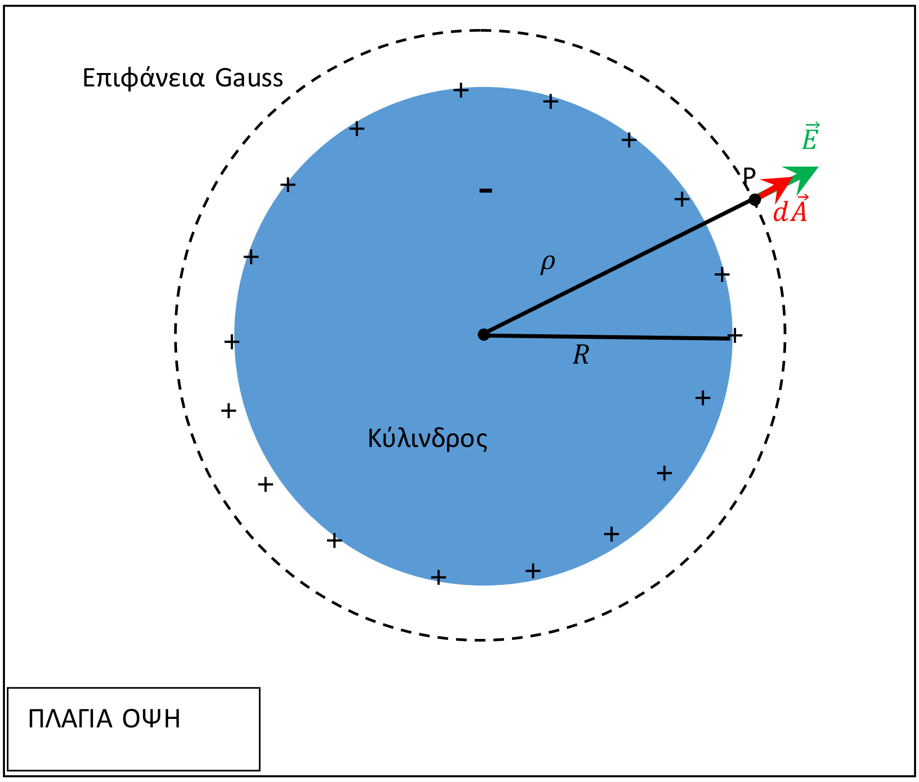
(προσέξτε ότι αφού το λ είναι φορτίο ανά μονάδα μήκους, το παραπάνω E έχει τις σωστές μονάδες).

3) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον χώρο ενός μονωτικού κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας R ο οποίος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με χωρική πυκνότητα φορτίου η (φορτίο/όγκος)

Λύση:

Θα εργαστούμε πρώτα στο εξωτερικό του κυλίνδρου. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω δυο σχήματα, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, επιλέγουμε για επιφάνεια Gauss ένα κλειστό κύλινδρο ακτίνας $\rho > R$ και μήκους L, ομοαξονικό με τον δεδομένο κύλινδρο.





Οι δυναμικές γραμμές είναι παρόμοιες με αυτές που είδαμε στο υπο-εδάφιο "Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων", δηλαδή δισδιάστατες ακτινικές από την επιφάνεια του κυλίνδρου προς το άπειρο (σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου). Ακριβώς όπως δουλέψαμε με την γραμμή φορτίου, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και + B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi} E dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ ($βάση \times ύψος$). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε το περικλειόμενο φορτίο Q. Αφού αυτό εγκλωβίζεται μέσα σε μήκος L του αγώγιμου κυλίνδρου, ο αντίστοιχος περικλειόμενος όγκος του αγωγού ισούται με

$$V = \pi R^2 L$$

Δεδομένου ότι η πυκνότητα φορτίου η είναι εξ' ορισμού φορτίο ανά όγκο, το περικλειόμενο φορτίο ισούται με $Q = \eta V = \eta\pi R^2 L$ και έτσι

$$2E\pi\rho L = \frac{\eta\pi R^2 L}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{\eta R^2}{2\varepsilon_0 \rho}$$

Στο εσωτερικό του αγωγού, η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η ίδια ακριβώς, με τη διαφορά τώρα ότι η επιφάνεια Gauss περικλείει λιγότερο φορτίο και στον υπολογισμό του περικλειόμενου όγκου V' πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα ρ της επιφάνειας Gauss και όχι του αγωγού R, αφού η επιφάνεια αυτή είναι εξ' ολοκλήρου μέσα στον αγωγό. Έτσι

$$V' = \pi\rho^2 L$$

Το αντίστοιχο περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q' = \eta V' = \eta\pi\rho^2 L$$

Έτσι από την

$$E \int_{\Pi} dA = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

παίρνουμε

$$2E\pi\rho L = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\eta\pi\rho^2 L}{\varepsilon_0}$$

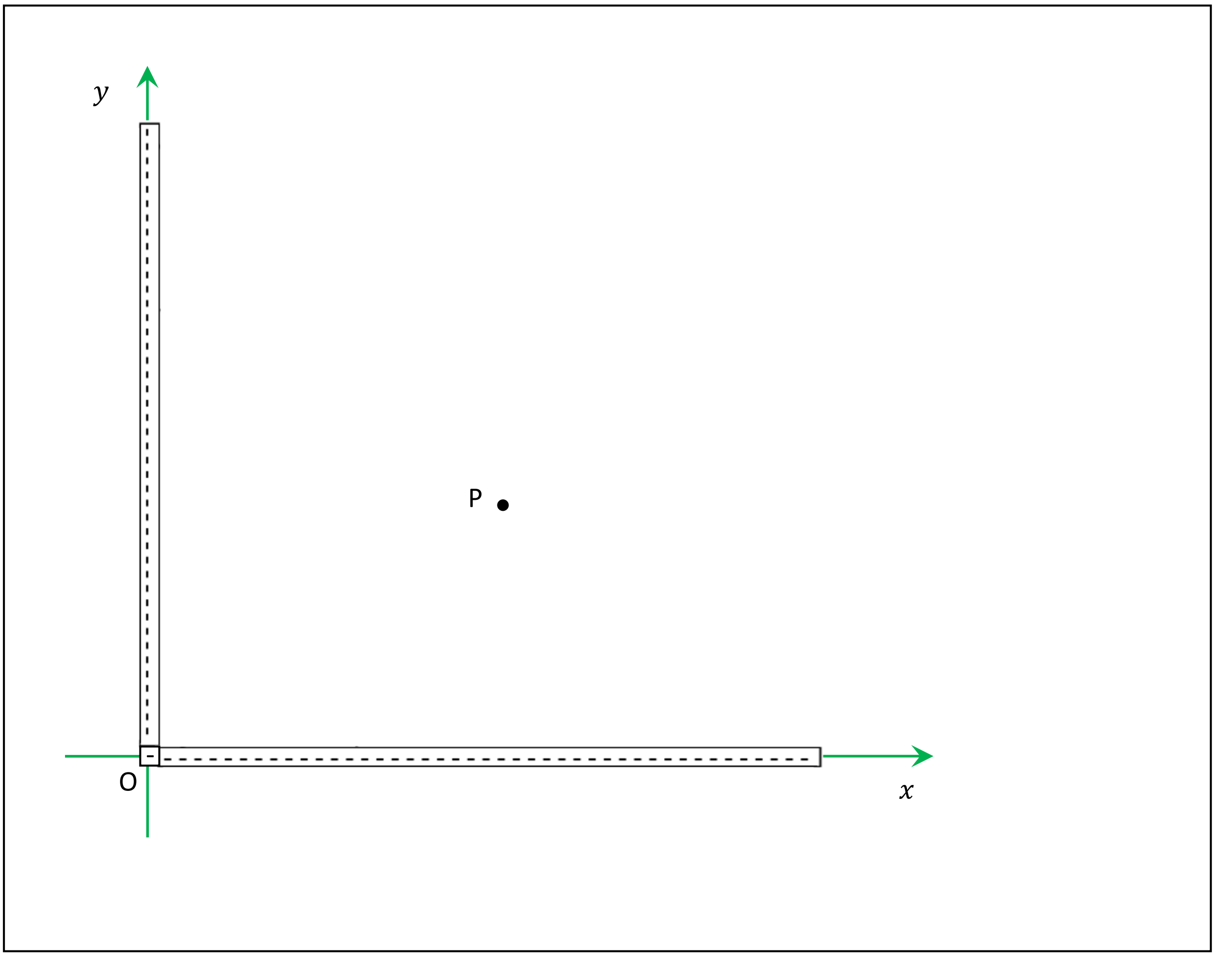
οπότε

$$E = \frac{\eta\rho}{2\varepsilon_0}$$

4)

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μια διάταξη που αποτελείται από δυο ομοιόμορφα φορτισμένα μη-αγώγιμα λεπτά φύλλα, τοποθετημένα κάθετα μεταξύ τους σε μια κοινή ακμή η οποία περιέχει την αρχή των συντεταγμένων O και έτσι προσανατολισμένα ώστε το ένα να περιέχει τον άξονα x και το άλλο τον άξονα y. Το κατακόρυφο φύλλο φέρει αρνητικό φορτίο $-Q_y$ και έχει εμβαδό A_y ενώ το οριζόντιο φύλλο φέρει αρνητικό φορτίο $-Q_x$ και έχει εμβαδό A_x αντίστοιχα. Σε τυχαίο σημείο P με συντεταγμένες (x, y) τοποθετούμε ένα μικρό σημειακό θετικό φορτίο q. Θεωρώντας ότι οι συντεταγμένες του P είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις των φύλλων, μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα φύλλα είναι απείρων διαστάσεων και να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Πόση είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου q (η αρχή της επαλληλίας μπορεί να σας βοηθήσει);
β) Πόσο είναι το δυναμικό στο σημείο P;
γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του ηλεκτρικού πεδίου στο P;
δ) Να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες παντού στο χώρο (οι τομές τους με τη σελίδα).
ε) Να σχολιασθεί εάν η απάντηση σας στο υποερώτημα δ είναι σε συμφωνία με το υποερώτημα γ παραπάνω.



<u>Λύση</u>:

α) Εάν είχαμε μόνο το φύλλο που περιέχει τον άξονα x, τότε σύμφωνα με την Εξ. 4.3 η δυναμική ενέργεια του φορτίου q θα ήταν ίση με

$$U_x = q|E|y$$

όπου y είναι η απόσταση του φορτίου από το φύλλο και E_x είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το φύλλο το οποίο από την Εξ. 2.7 ισούται με

$$|E| = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x}$$

και έτσι

$$U_x = \frac{qQ_x}{\varepsilon_0 A_x} y$$

Ομοίως εάν υπήρχε μόνο το άλλο φύλλο, θα είχαμε

$$U_y = \frac{qQ_y}{\varepsilon_0 A_y} x$$

όπου τώρα η απόσταση του φορτίου από αυτό το φύλλο είναι ίση με x. Από την αρχή της επαλληλίας η δυναμική ενέργεια του φορτίου είναι ίση με

$$U = U_x + U_y = \frac{qQ_x}{\varepsilon_0 A_x} y + \frac{qQ_y}{\varepsilon_0 A_y} x$$

β) Θεωρώντας το q ως το δοκιμαστικό φορτίο, έχουμε εξ' ορισμού

$$V = \frac{U}{q} = \frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x} y + \frac{Q_y}{\varepsilon_0 A_y} x$$

γ) Από τις Εξ. 5.2

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q_y}{\varepsilon_0 A_y}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x}$$

Εναλλακτικά είδαμε παραπάνω ότι

$$|E| = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x}$$

για το πεδίο που δημιουργεί το φύλλο που περιέχει τον άξονα x. Επειδή το φορτίο Q_x είναι αρνητικό, αυτό το πεδίο είναι προς τον αρνητικό άξονα y και έτσι μπορούμε να του προσδώσουμε τον δείκτη "y" και να γράψουμε

$$E_y = -\frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x}$$

ομοίως και για το άλλο φύλλο.

δ) Ισοδυναμικές επιφάνειες σημαίνει $V = c$ όπου $c =$ σταθ, δηλαδή

$$\frac{Q_x}{\varepsilon_0 A_x} y + \frac{Q_y}{\varepsilon_0 A_y} x = c$$

Αυτή είναι μια εξίσωση ενός επιπέδου. Στο επίπεδο $x - y$ οι τομές αυτών των επιπέδων είναι ευθείες. Λύνοντας ως προς y έχουμε

$$y = -\frac{A_x Q_y}{A_y Q_x} x + c'$$

όπου c' μια άλλη σταθερά. Η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και ίση με

$$\lambda_1 = -\frac{A_x Q_y}{A_y Q_x}$$

ε) Όπως είδαμε στο ερώτημα γ, το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερές συνιστώσες και η γωνία του θ έχει κλίση

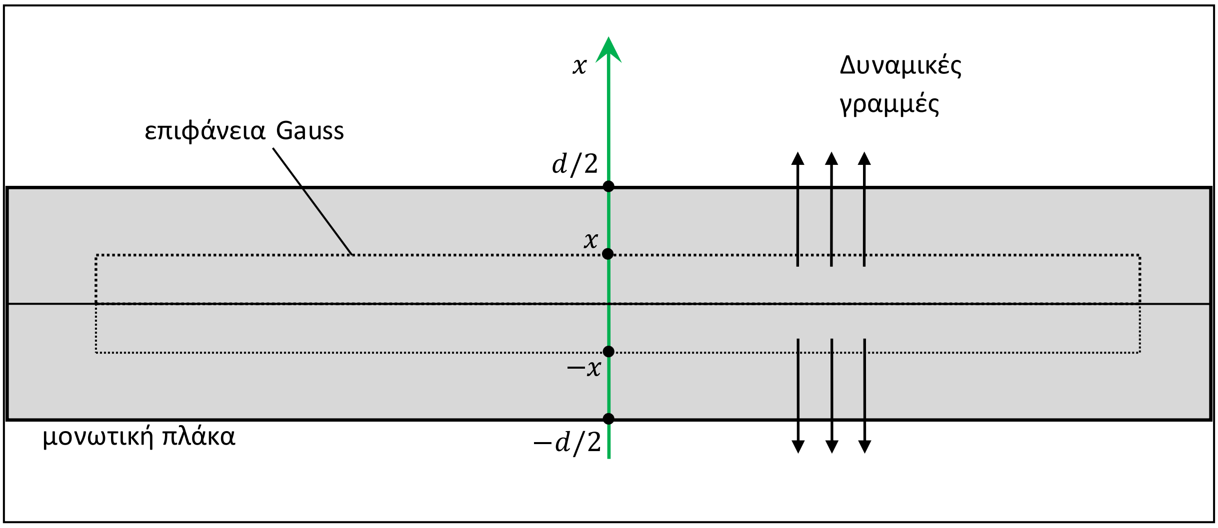
$$\lambda_2 = tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y Q_x}{A_x Q_y}$$

Το γινόμενο των δυο κλίσεων $\lambda_1 \lambda_2$ είναι ίσο με -1 και άρα το $\vec{E}$ είναι κάθετο στις ισοδυναμικές επιφάνειες όπως πρέπει.

5)

Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στον εσωτερικό χώρο μιας επίπεδης μονωτικής πλάκας απείρου επιφάνειας και πεπερασμένου πάχους d (<u>μη λεπτή</u> πλάκα) με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου η. Πάρτε για ευκολία τον άξονα x κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας, με το $x = 0$ στο κεντρικό επίπεδο της πλάκας (έτσι ώστε οι επιφάνειες της πλάκας να είναι στο $x = \pm d/2$) και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι υπάρχει συμμετρία ως προς $\pm x$. Επίσης υποθέστε ότι η κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών είναι παρόμοια με αυτή μιας λεπτής πλάκας με τον ίδιο προσανατολισμό. Πόσο είναι το δυναμικό στο εσωτερικό της πλάκας σε τυχαίο σημείο;

<u>Λύση</u>: Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο εσωτερικό της πλάκας, με τις δυο επιφάνειές του να έχουν σταθερή συντεταγμένη $\pm x$. Έστω ότι οι άλλες δυο διαστάσεις αυτής της επιφάνειας είναι μήκος L κατά μήκος της σελίδας και βάθος w κάθετα στη σελίδα.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Η επιφάνεια Gauss περικλείει όγκο $V = 2xLw$ και έτσι από την πυκνότητα φορτίου το περικλειόμενο φορτίο είναι ίσο με

$$Q = \eta V = 2\eta xLw$$

Από τα δεδομένα, οι δυναμικές γραμμές είναι κατά μήκος του άξονα x και έτσι στο παραπάνω ολοκλήρωμα συνεισφέρουν μόνο οι δυο επιφάνειες που είναι κάθετες στον άξονα x με εμβαδό $A = Lw$ η καθεμία. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με το κάθετο της κάθε επιφάνειας και έτσι:

$$E(x)Lw + E(-x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\varepsilon_0}$$

Λόγω συμμετρίας περιμένουμε $E(x) = E(-x)$ οπότε

$$2E(x)Lw = \frac{2\eta xLw}{\varepsilon_0} => E(x) = \frac{\eta}{\varepsilon_0}x$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα έχει το σωστό πρόσημο αφού προβλέπει θετικό E για $x > 0$ και αρνητικό για $x < 0$ σε συμφωνία με τις δυναμικές γραμμές. Το δυναμικό μπορούμε να το βρούμε με ολοκλήρωση από τη σχέση:

$$E = -\frac{dV}{dx} => V = -\frac{\eta}{\varepsilon_0}\int x dx + c$$

ή

$$V(x) = -\frac{\eta}{2\varepsilon_0}x^2 + c$$

Η σταθερά c είναι η τιμη του δυναμικού στο $x = 0$ που μπορούμε αυθαίρετα να τη λάβουμε ως μηδέν.

6) Ένας πυκνωτής αποτελείται από έναν σφαιρικό εσωτερικό οπλισμό ακτίνας R_1 ο οποίος περιβάλλεται από εξωτερικό λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομόκεντρο με τον εσωτερικό οπλισμό. Να υπολογισθεί η χωρητικότητά του θεωρώντας ότι το θετικό φορτίο είναι κατανεμημένο στον εσωτερικό οπλισμό (Σημείωση: Πρώτα πρέπει να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο και ακολούθως το δυναμικό στο εσωτερικό του πυκνωτή).

Λύση:

Στην εσωτερικό χώρο μεταξύ της σφαίρας και του κελύφους θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια Gauss, ομόκεντρη με τη σφαίρα και με ακτίνα $R_2 > r > R_1$. Το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία, η κατανομή των Δ.Γ. είναι ακτινική και το $\vec{E}$ τέμνει κάθετα τη σφαίρα Gauss. Το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο στο $\vec{E}$ και έτσι το εσωτερικό τους γινόμενο γίνεται

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdAcos0^0 = EdA$$

Ο νόμος του Gauss γίνεται

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \oint EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Η ολοκλήρωση γίνεται επάνω στην σφαίρα Gauss όπου το E είναι σταθερό. Το περικλειόμενο φορτίο είναι μόνο το θετικό φορτίο $+Q$. Επομένως

$$E \oint dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} => E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} => E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

Το δυναμικό προκύπτει με ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} => V = -\int Edr = -\frac{kQ}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr$$

ή

$$V = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r} + c$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο οπλισμών είναι ίση με

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

έχουμε τελικά

$$C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

7) Μια άπειρη ακολουθία πυκνωτών $C_1, C_2, C_3 \ldots$ με χωρητικότητες που δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$C_{n+1} = 2C_n$$

εκτός από τον πρώτο ο οποίος έχει μια γνωστή χωρητικότητα $C_1 = C$, συνδέονται σε σειρά μεταξύ τους σε μπαταρία που παρέχει τάση V, με τον πρώτο πυκνωτή να είναι ο πλησιέστερος προς τον θετικό πόλο της πηγής και τους άλλους να ακολουθούν διαδοχικά. Να βρεθούν α) Το φορτίο του κάθε πυκνωτή και β) Η ενέργεια του κάθε πυκνωτή. Σημείωση: Η γνωστή γεωμετρική σειρά $A = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ μπορεί να υπολογισθεί εύκολα εάν γραφτεί ως $A = 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + xA$

Λύση:

α) Η ολική χωρητικότητα $C_{ΟΛ}$ δίνεται από την

$$\frac{1}{C_{ΟΛ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

Από την αναδρομική σχέση έχουμε

$$C_1 = C$$

$$C_2 = 2C_1 = 2C$$

$$C_3 = 2C_2 = 2 \cdot 2C = 2^2 C$$

$$C_4 = 2C_3 = 2 \cdot 2^2 C = 2^3 C$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία είναι η εξής

$$C_{\nu+1} = 2^{\nu} C$$

Επομένως Η ολική χωρητικότητα $C_{ΟΛ}$ δίνεται από την

$$\frac{1}{C_{ΟΛ}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{2^2 C} + \cdots = \frac{1}{C}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είναι η γεωμετρική σειρά με $x = 1/2$. Από την εκφώνηση, αυτή η σειρά A ικανοποιεί την εξίσωση $A = 1 + xA$ οπότε λύνοντας παίρνουμε $A = 1/(1 - x)$. Επομένως

$$\frac{1}{C_{ΟΛ}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} => C_{ΟΛ} = \frac{C}{2}$$

Αφού η συστοιχία συνδέεται σε μπαταρία τάσης V τότε ο ισοδύναμος πυκνωτής θα αποκτήσει φορτίο

$$Q = C_{ΟΛ} V = \frac{CV}{2}$$

Όταν οι πυκνωτές βρίσκονται σε σειρά, το φορτίο τους είναι το ίδιο και είναι ίσο με το φορτίο του ισοδύναμου πυκνωτή (δείτε τη συζήτηση για δυο πυκνωτές σε σειρά στις σημειώσεις του μαθήματος). Επομένως

$$Q_n = \frac{CV}{2}$$

β) Ο τύπος της ενέργειας είναι

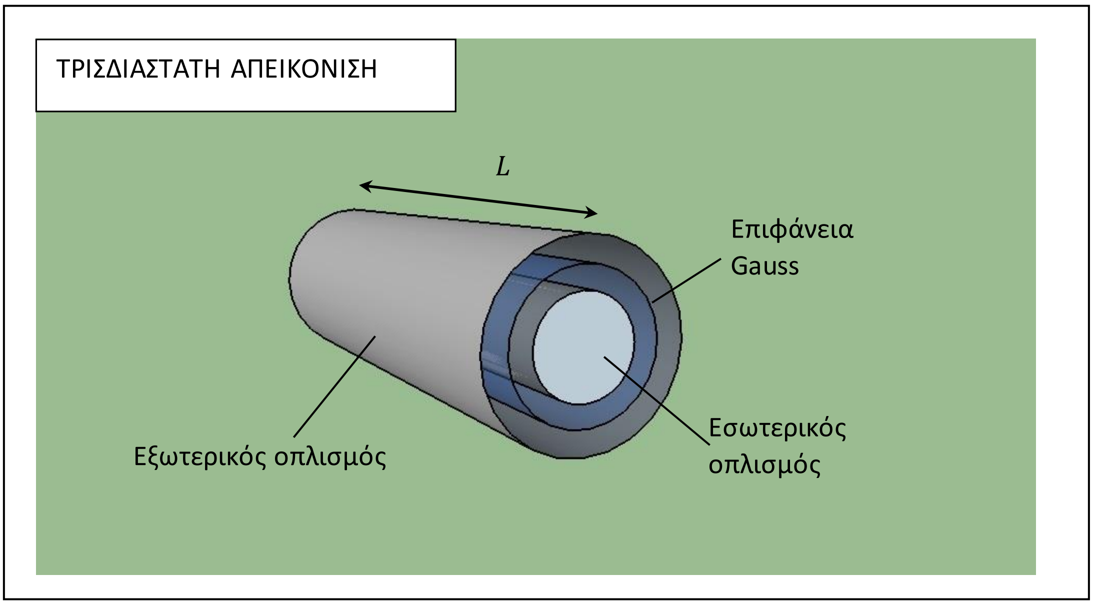
$$U_n = \frac{1}{2C_n}{Q_n}^2 = \frac{1}{2\cdot 2^{n-1}C}\left(\frac{CV}{2}\right)^2 = \frac{CV^2}{2^{n+2}}$$

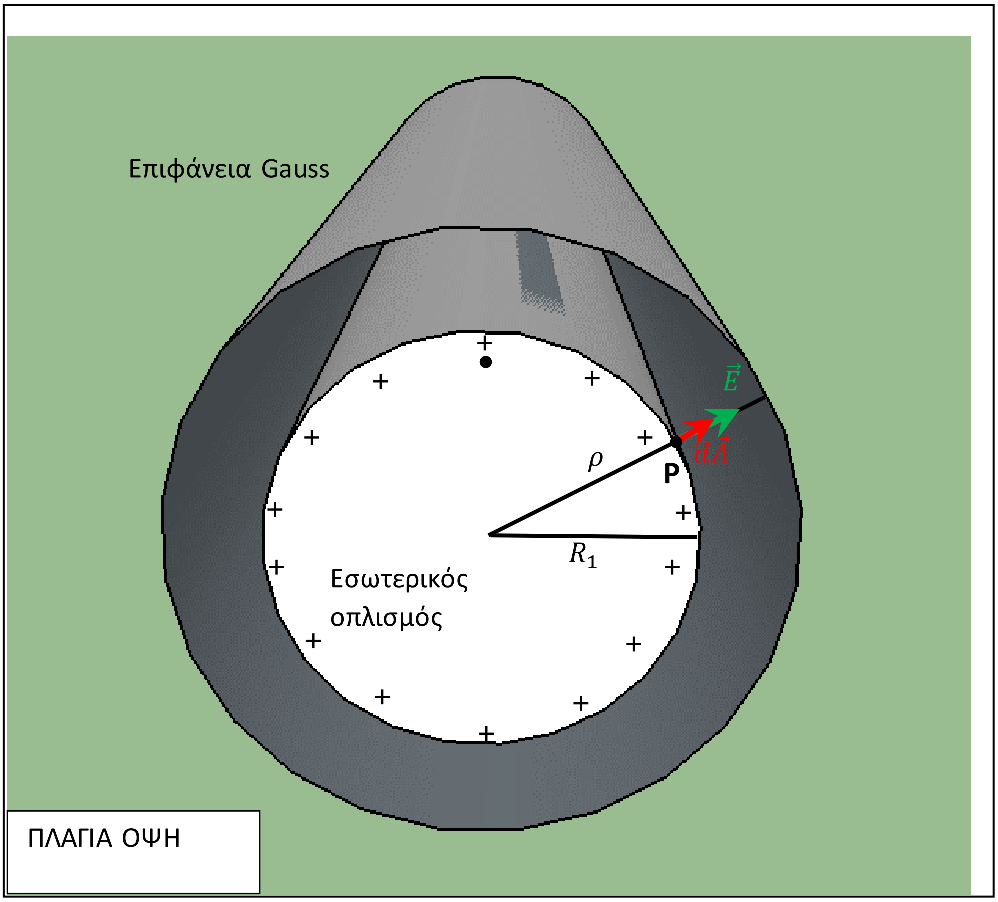
Αυτή η σχέση ισχύει μόνο για $n \geq 2$. Για $n = 1$ έχουμε

$$U_1 = \frac{1}{2C}Q_1^2 = \frac{1}{2C}\left(\frac{CV}{2}\right)^2 = \frac{CV^2}{2^3}$$

8) Έστω ένας πυκνωτής ο οποίος αποτελείται από έναν εσωτερικό οπλισμό σχήματος κυλίνδρου ακτίνας R_1 και μήκους L μαζί με ένα εξωτερικό λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ακτίνας $R_2 > R_1$, ομοαξονικό με τον εσωτερικό οπλισμό και ίσου μήκους L. Να βρεθεί η μαθηματική εξίσωση των ισοδυναμικών επιφανειών στο εσωτερικό αυτού του πυκνωτή θεωρώντας ότι οι δυο οπλισμοί φέρουν φορτίο $\pm Q$, με τον εσωτερικό οπλισμό να είναι ο θετικός και ότι το μήκος L είναι πολύ μεγάλο (Σημείωση: Πρώτα πρέπει να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο και ακολούθως το δυναμικό στο εσωτερικό του πυκνωτή).

Λύση: Όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα κύλινδρο μήκους L, ομοαξονικό με τους οπλισμούς και με ακτίνα ρ τέτοια ώστε η επιφάνεια Gauss να βρίσκεται στο εσωτερικό του πυκνωτή, δηλαδή $R_2 > \rho > R_1$





Εφόσον ο κύλινδρος είναι αγώγιμος, όλο το φορτίο κατανέμεται στην επιφάνειά του και $E = 0$ στο εσωτερικό του. Στον εξωτερικό χώρο, οι δυναμικές γραμμές είναι παρόμοιες με αυτές που είδαμε στο υπο-εδάφιο "Φορτισμένη γραμμή απείρων διαστάσεων", δηλαδή δισδιάστατες ακτινικές από την επιφάνεια του κυλίνδρου προς το άπειρο (σαν τις ακτίνες της ρόδας του ποδηλάτου). Ακριβώς όπως δουλέψαμε με την γραμμή φορτίου, το $d\vec{A}$ στις δυο βάσεις B_1 και + B_2 του κυλίνδρου Gauss είναι κάθετο στο $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ εκεί και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Στην παράπλευρη επιφάνεια Π βλέπουμε από την πλάγια όψη ότι το $d\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{E}$ και έτσι $\vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA$. Επομένως

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{\Pi} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} => \int_{\Pi} EdA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q είναι το περικλειόμενο φορτίο από τον κύλινδρο Gauss το οποίο είναι όλο το φορτίο του θετικού οπλισμού. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το E είναι σταθερό επάνω στην Π και έτσι μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος:

$$E\int_{\Pi} dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου Gauss είναι ίσο με $2\pi\rho L$ (*βάση×ύψος*). Επομένως

$$2E\pi\rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ή

$$E = \frac{Q}{2\pi\rho L\varepsilon_0}$$

Το δυναμικό προκύπτει με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες από τη σχέση

$$E = -\frac{\partial V}{\partial \rho} => V = -\int E d\rho = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\int \frac{1}{\rho} d\rho$$

ή

$$V = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0} ln\rho + c$$

Ισοδυναμικές επιφάνειες είναι οι επιφάνειες στις οποίες V: σταθερό. Από την παραπάνω σχέση αυτό σημαίνει ρ: σταθερό. Από τον ορισμό του ρ στις κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c_1$$

όπου c_1: σταθερά. Έτσι

$$x^2 + y^2 = {c_1}^2$$

που είναι η εξίσωση κύκλου στο επίπεδο και κυλίνδρου στις 3 διαστάσεις

9)

Ένας φοιτητής συνδέει παράλληλα δυο συρμάτινους κυλινδρικούς αγωγούς του ίδιου μήκους L αλλά διαφορετικού υλικού, έστω υ1 και υ2 και με διαφορετικές ακτίνες α_1 και $\alpha_2 = 2\alpha_1$ αντίστοιχα και μετράει την αντίστασή τους ίση με R_π. Όταν τους συνδέει σε σειρά βρίσκει αντίσταση R_σ. Να βρεθεί η ειδική αντίσταση του κάθε αγωγού. (Σημείωση: Θα πρέπει να καταλήξετε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Δεν χρειάζεται να τη λύσετε, απλά αναφέρετε ότι από τη λύση αυτής της δευτεροβάθμιας προκύπτει η ειδική αγωγιμότητα του τάδε αγωγού).

<u>Λύση</u>:

Από την παράλληλη σύνδεση έχουμε

$$\frac{1}{R_\pi} = \frac{A_1}{\rho_1 L} + \frac{A_2}{\rho_2 L}$$

όπου ρ_1 και ρ_2 είναι η ειδική αντίσταση του κάθε αγωγού, L το μήκος τους και A το εμβαδό της διατομής τους. Από τα δεδομένα, τα εμβαδά των δυο αγωγών είναι ίσα με

$$A_1 = \pi {\alpha_1}^2$$

και

$$A_2 = \pi {\alpha_2}^2 = \pi(2\alpha_1)^2 = 4A_1$$

Έτσι

$$\frac{1}{R_\pi} = \frac{A_1}{\rho_1 L} + \frac{4A_1}{\rho_2 L} => \frac{1}{\rho_1} + \frac{4}{\rho_2} = \frac{L}{A_1 R_\pi} => \frac{1}{\rho_1} + \frac{4}{\rho_2} = \kappa$$

όπου $\kappa = L/A_1 R_\pi$. Από την σύνδεση σε σειρά έχουμε

$$R_\sigma = \rho_1 \frac{L}{A_1} + \rho_2 \frac{L}{A_2} = \rho_1 \frac{L}{A_1} + \rho_2 \frac{L}{4A_1} => \rho_1 = \frac{R_\sigma}{L} A - \frac{\rho_2}{4} = \lambda - \frac{\rho_2}{4}$$

όπου $\lambda = R_\sigma A/L$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση

$$\frac{1}{\lambda - \rho_2/4} + \frac{4}{\rho_2} = \kappa => \frac{4}{4\lambda - \rho_2} + \frac{4}{\rho_2} = \kappa =>$$

$$\frac{1}{4\lambda - \rho_2} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{4} => \frac{\rho_2 + 4\lambda - \rho_2}{(4\lambda - \rho_2)\rho_2} = \frac{\kappa}{4} => \frac{4\lambda}{(4\lambda - \rho_2)\rho_2} = \frac{\kappa}{4}$$

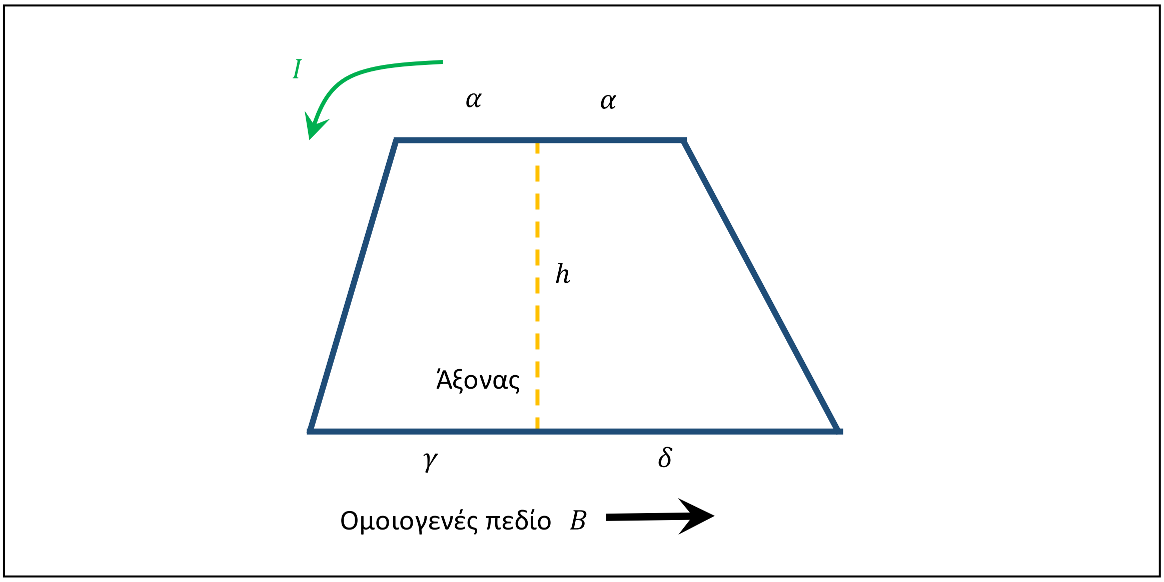
ή

$$\kappa(4\lambda - \rho_2)\rho_2 = 16\lambda$$

$$\kappa {\rho_2}^2 - 4\kappa\lambda\rho_2 + 16\lambda = 0$$

10)

Στο παρακάτω σχήμα ένας κλειστός αγωγός σχήματος τραπεζίου διαρρέεται από ρεύμα I, με τις δυο παράλληλες πλευρές του να έχουν μήκος 2α και $\gamma + \delta$ αντίστοιχα και να απέχουν απόσταση h μεταξύ τους. Ο αγωγός τοποθετείται μέσα σε περιοχή με ομοιογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο είναι παράλληλο με τις δυο παράλληλες πλευρές του αγωγού. α) Να υπολογισθεί η μαγνητική δύναμη και η ροπή που δρα στην κάθε πλευρά του αγωγού ξεχωριστά. β) Να υπολογισθεί η συνολική μαγνητική δύναμη και η συνολική ροπή που δράνε στον αγωγό. Όλες οι ροπές να υπολογισθούν γύρω από τον άξονα που τέμνει την πάνω πλευρά κάθετα στο μέσο της, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Λύση:

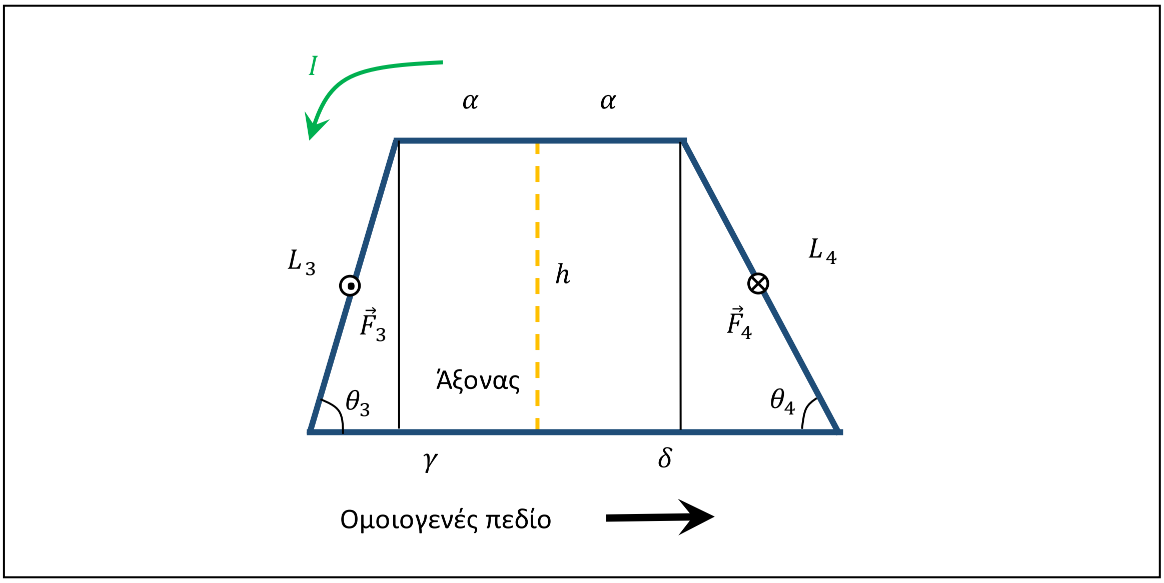
Η μαγνητική δύναμη είναι ίση κατά μέτρο με

$$F = BILsin\theta$$

όπουB, I, L και θ είναι αντίστοιχα το μαγνητικό πεδιο, το ρεύμα, το μήκος και η γωνία θ μεταξύ του αγωγού και του πεδίου. Έτσι στις πάνω και κάτω πλευρές $F_1 = F_2 = 0$ επειδή το πεδίο B είναι παράλληλο με τον αγωγό. Στην αριστερή πλευρά έχουμε

$$F_3 = IL_3Bsin\theta_3$$

όπου L_3 είναι το μήκος της όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και η θ_3 η γωνία στην κάτω αριστερή γωνία:



Από το τρίγωνο στα αριστερά

$$sin\theta_3 = \frac{h}{L_3} => L_3sin\theta_3 = h$$

οπότε

$$F_3 = BIh$$

Η φορά αυτής της δύναμης είναι προς τα έξω της σελίδας. Εάν θεωρήσουμε ότι δρα στο κέντρο τα αριστερής πλευράς του τραπεζίου (κέντρο μάζας της πλευράς) τότε η απόστασή της από τον δεδομένο άξονα (διακεκομμένη γραμμή) είναι ίση με $r_3 = (\alpha + \gamma)/2$ η οποία είναι η μέση τιμή των α και γ. Επομένως η ροπή αυτής της δύναμης είναι ίση με

$$\tau_3 = F_3r_3 = BIh\frac{(\alpha + \gamma)}{2}$$

Ομοίως στη δεξιά πλευρά, η δύναμη ισούται με

$$F_4 = IL_4Bsin\theta_4 = BIh$$

με φορά προς τα μέσα της σελίδας και η αντίστοιχη ροπή ισούται με

$$\tau_4 = F_4r_4 = BIh\frac{(\alpha + \delta)}{2}$$

όπου $r_3 = (\alpha + \gamma)/2$ είναι η μέση τιμή των α και γ. Βλέπουμε ότι οι δυο δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και έτσι η συνιστάμενη δύναμη είναι μηδέν. Οι δυο ροπές όμως τείνουν να περιστρέψουν προς την ίδια περιστροφική φορά ως προς τον δεδομένο άξονα και έτσι αθροίζονται. Η συνιστάμενη ροπή λοιπόν ισούται με

$$\Sigma\tau = \tau_3 + \tau_4 = BIh\frac{\alpha + \gamma + \alpha + \delta}{2} = BIh\frac{2\alpha + (\gamma + \delta)}{2}$$

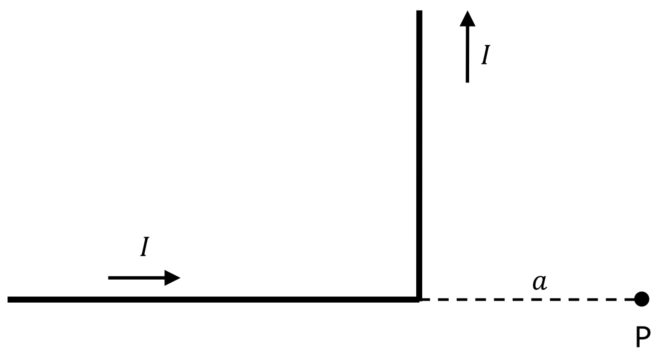
Το κλάσμα στα δεξιά είναι το ημι-άθροισμα των δυο βάσεων του τραπεζίου το οποίο επί το ύψος του h μας δίνει το εμβαδό A του τραπεζίου (δείτε γεωμετρία). Έτσι η συνολική ροπή γίνεται

$$\Sigma\tau = BIA$$

που είναι ο ίδιος ακριβώς τύπος με τα ορθογώνιο πλαίσιο και άρα αυτός ο τύπος ισχύει για πλαίσιο οποιουδήποτε γεωμετρικού σχήματος αρκεί να μπορούμε να υπολογίσουμε την επιφάνειά του.

11)

Το σύρμα του παρακάτω σχήματος έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα I. Υπολογίστε με τη βοήθεια του νόμου του Biot-Savart με ολοκλήρωση το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα στο σημείο P. (Σημείωση: Οι τελικοί υπολογισμοί απλουστεύονται εάν εκφραστούν όλες οι μεταβλητές μήκους συναρτήσει μιας γωνίας).



Λύση:

Ο νόμος των Biot-Savart στην Εξ. 8.13 μας δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ που παράγει το στοιχειώδες μήκος $d\vec{l}$ ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I σε απόσταση $\vec{r}$ από το στοιχειώδες μήκος:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Θα χωρίσουμε τον δεδομένο αγωγό στα δυο κάθετα κομμάτια και θα ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτά για να βρούμε το ολικό πεδίο $\vec{B}$. Για τον αγωγό στα αριστερά ισχύει

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

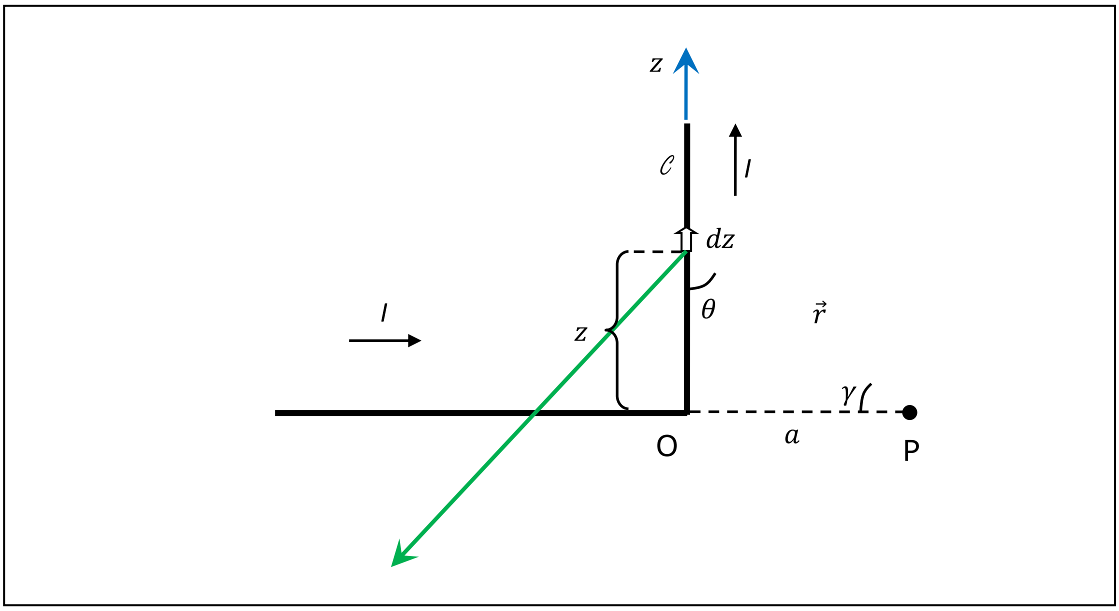
αφού τόσο το $d\vec{l}$ είναι οριζόντιο όσο και το διάνυσμα $\vec{r}$ που το συνδέει με το σημείο παρατήρησης P. Επομένως το οριζόντιο τμήμα του αγωγού δεν συνεισφέρει κάτι στον υπολογισμό και έτσι θα ολοκληρώσουμε μόνο στο κατακόρυφο τμήμα. Η ολοκλήρωση ακολουθεί την ολοκλήρωση που έχουμε στις σημειώσεις για ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους με τη διαφορά ότι ο αγωγός είναι ημι-άπειρος.

Έτσι παίρνουμε σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα τον άξονα z κατά μήκος του αγωγός $\mathcal{C}$ και αναζητούμε το μαγνητικό πεδίο στη δεδομένη απόσταση a από τον αγωγό. Για το λόγο αυτό "τεμαχίζουμε" τον αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dz το καθένα και επιλέγουμε ως την αρχή των συντεταγμένων O στο κάτω άκρο του αγωγού. Το διάνυσμα $d\vec{l}$ που εμφανίζεται στην Εξ. 8.13 είναι το $d\vec{l} = dz\vec{e}_z$ ενώ το $\vec{r}$ είναι αυτό που ενώνει το $d\vec{l}$ με το σημείο παρατήρησης P. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $d\vec{l} \times \vec{r}$ στην Εξ. 8.13 ισούται με

$$\left|d\vec{l} \times \vec{r}\right| = rdzsin\theta$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η φορά του είναι προς τα μέσα της σελίδας (δηλαδή κατά μήκος του άξονα-y ο οποίος είναι κάθετος στην σελίδα με φορά προς τα μέσα). Ολοκληρώνοντας την Εξ. 8.13 σε όλο τον αγωγό οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_y \int_C \frac{rdzsin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_y \int_C \frac{sin\theta}{r^2}dz$$



Στο παραπάνω ολοκλήρωμα εμφανίζονται τρεις μεταβλητές, οι θ, r και z. Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας μπορούμε να τις εκφράσουμε όλες συναρτήσει της γωνίας γ που είναι η συμπληρωματική της θ. Έτσι από το παραπάνω σχήμα έχουμε

$$sin\theta = cos\gamma$$

$$cos\gamma = \frac{a}{r} => \frac{1}{r} = \frac{cos\gamma}{a}$$

$$tan\gamma = \frac{z}{a} => dz = \frac{a}{cos^2\gamma}d\gamma$$

Τα όρια του αγωγού είναι τα $z = 0$ έως ∞ που αντιστοιχούν σε $\gamma = 0$ έως $\pi/2$. Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\frac{\pi}{2}} cos\gamma \frac{cos^2\gamma}{\rho^2}\frac{\rho}{cos^2\gamma}d\gamma = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\vec{e}_y \int_{\gamma=0}^{\frac{\pi}{2}} cos\gamma d\gamma$$

Τελικά

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi\rho}\vec{e}_y$$

12)

Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος αγωγός πεπερασμένου μήκους L που διαρρέεται από ρεύμα I σε σημείο P επάνω στη μεσοκάθετο του αγωγού και που απέχει απόσταση ρ από αυτόν.

Λύση:

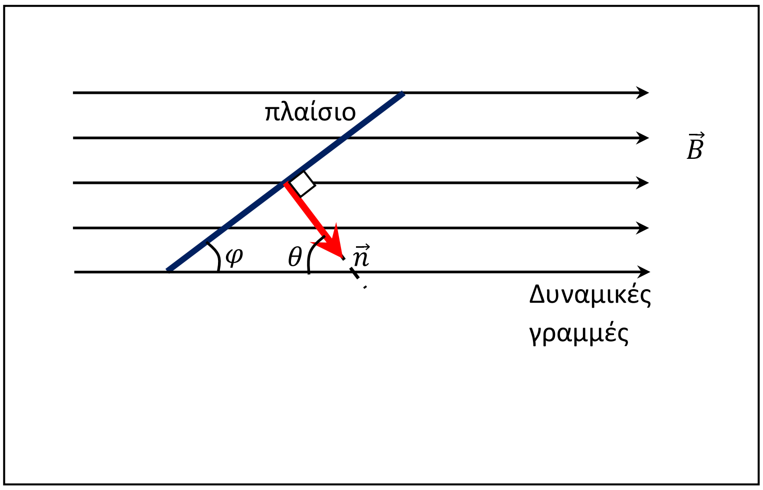
Η λύση είναι παρόμοια με αυτή του προηγούμενου προβλήματος με τη διαφορά ότι τώρα αντί για ημι-άπειρο αγωγό, έχουμε αγωγό απείρου μήκους L οπότε μπορούμε να πάρουμε συμμετρικά όρια για το $z = \pm L/2$ που αντιστοιχούν σε όρια $\pm\gamma_0$ της γωνίας γ όπου $tan\gamma_0 = z/\rho = L/2\rho$. Έτσι η ολοκλήρωση γίνεται

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\vec{e}_y \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} cos\gamma d\gamma = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} sin\gamma_0 \vec{e}_y$$

13)

Ένα τετραγωνικό αγώγιμο πλαίσιο με $N = 10$ σπείρες κολλητά η μια με την άλλη, με εμβαδό $A = 0.25\, mm^2$ η καθεμία, περιστρέφεται ελεύθερα ώστε το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει το επίπεδο του πλαισίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $B = 0.2\, T$ να μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1. Σε χρόνο $t = 2\, s$ το πλαίσιο έχει καλύψει γωνία $\Delta\varphi = \pi/4\, rad$ (σε σχέση με την αρχική του θέση). Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ κατ' απόλυτη τιμή σε $Volts$ σε αυτή τη θέση του πηνίου (θεωρώντας ότι η κίνηση συνεχίζεται και μετά από αυτή τη θέση);

Λύση:



<u>Λύση</u>:

Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του *Faraday.* Η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου ισούται με

$$\Phi_M = NBAcos\theta$$

Όμως χρειάζεται προσοχή, η γωνία θ σε αυτό το νόμο είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο $\vec{n}$ του πλαισίου με το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ενώ η δεδομένη γωνία φ είναι η γωνία που σχηματίζει το πλαίσιο με το μαγνητικό πεδίο. Οι δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\theta + \varphi = \pi/2$ και έτσι $cos\theta = sin\varphi$. Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBAsin\varphi$$

Μας δίνεται πληροφορία για το συνημίτονο και έτσι γράφουμε αυτή τη σχέση με τη βοήθεια της βασικής τριγωνομετρικής σχέσης $cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$ ως

$$\Phi_M = \pm NBA\sqrt{1 - cos^2\varphi}$$

Αφού μας δίνεται ότι αρχικά $co\varphi = 0$ τότε η αρχική της τιμή της γωνίας είναι $\varphi = 0$ ενώ το πλαίσιο έρχεται σε τελική θέση με $\Delta\varphi = \pi/4\, rad$ και έτσι εκεί $\varphi = \pi/4\, rad$. Αυτό σημαίνει ότι η φ παραμένει στο 1^o τεταρτημόριο όπου $cos\varphi > 0$ και έτσι δεν χρειάζεται η αρνητική τιμή της ρίζας παραπάνω. Από τα δεδομένα το συνημίτονο της γωνίας μειώνεται γραμμικά με το χρόνο με αρχική τιμή 1 και επομένως θα είναι της μορφής

$$cos\varphi = 1 - \lambda t$$

όπου λ η κλίση της παραπάνω γραμμικής σχέσης. Αφού στο χρόνο $t = 2\ s$ έχουμε $\varphi = \pi/4$ τότε

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\lambda => \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.146$$

Η μαγνητική ροή γίνεται

$$\Phi_M = NBA\sqrt{1 - (1 - \lambda t)^2}$$

Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

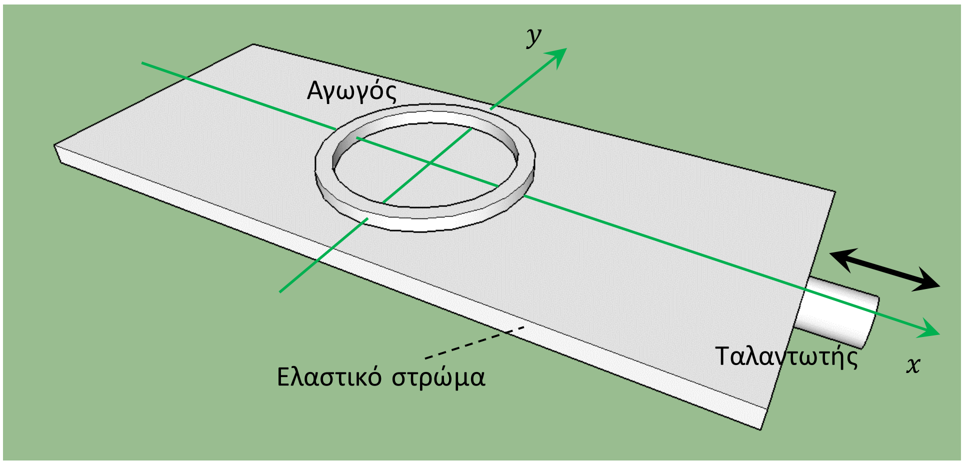
$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left(NBA\sqrt{1-(1-\lambda t)^2}\right) = NBA\frac{\lambda(1-\lambda t)}{\sqrt{1-(1-\lambda t)^2}}$$

Μας ζητείται η ΗΕΔ τη στιγμή $t = 2\,s$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$V = 10 \times 0.2 \times 0.25\frac{0.146(1-0.146\times 2)}{\sqrt{1-(1-0.146\times 2)^2}} = 73.2\,mV$$

14)

Ο παρακάτω αγωγός σχήματος κύκλου με ακτίνα $a = 2.0\,cm$ βρίσκεται στερεωμένος επάνω σε ένα ελαστικό στρώμα. Ένας ταλαντωτής παραμορφώνει το στρώμα ημιτονικά κατά μήκος του άξονα x με πλάτος $x_0 = 0.05a$ και κυκλική συχνότητα $\omega = 100\,rad/s$. Θεωρείστε ότι ο αγωγός είναι από ελαστικό υλικό (όπως το κράμα κασσίτερου που χρησιμοποιείται στις ηλεκτρο-κολλήσεις κυκλωμάτων, γνωστό ως "καλάι") και έτσι ακολουθεί το στρώμα στις ταλαντώσεις και θεωρήστε επίσης ότι παραμορφώνεται μόνο ως προς τον άξονα x. Εάν το σύστημα αυτό τοποθετηθεί μέσα σε χώρο όπου υπάρχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 0.2\,T$ κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, να βρεθεί κατά μέτρο η επαγόμενη ΗΕΔ που αναπτύσσεται στον αγωγό. (Σημείωση. Κάποια γεωμετρικά αποτελέσματα που μπορεί να σας φανούν χρήσιμα: Εμβαδό κύκλου πR^2, περίμετρος κύκλου $2\pi R$, εμβαδό έλλειψης πab, περίμετρος έλλειψης: $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$, εξίσωση έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$)



Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα τον νόμο του *Faraday.* Η μαγνητική ροή διαμέσου του αγωγού ισούται με

$$\Phi_M = NBAcos\theta = BA$$

όπου $cos\theta = 1$ αφού το μαγνητικό πεδίο τέμνει κάθετα την επιφάνειά του και $N = 1$ αφού δεν υπάρχει άλλη σπείρα. Πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζει ο αγωγός. Εάν δεν υπήρχε ο ταλαντωτής, το σχήμα του αγωγού θα ήταν κυκλικό με εμβαδό $A_0 = \pi a^2$. Ο ταλαντωτής όμως εισάγει μια ημιτονοειδή παραμόρφωση $x_0 sin\omega t$ και έτσι ο κύκλος γίνεται έλλειψη με ημιάξονα κατά τον άξονα-y ίσο με a (όσο και η ακτίνα του κύκλου αφού σε αυτή τη διεύθυνση δεν υπάρχει παραμόρφωση) και με ημιάξονα κατά τον άξονα-x ίσο με

$$b = a + x_0 sin\omega t$$

Δηλαδή στην αρχική ακτίνα a προσθέτουμε και την παραμόρφωση λόγω της ταλάντωσης. Το εμβαδό της έλλειψης δίνεται από την

$$A = \pi ab = \pi a(a + x_0 sin\omega t)$$

Σύμφωνα τον νόμο του *Faraday* η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται κατά μέτρο με

$$V = \frac{d\Phi_M}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi a(a + x_0 sin\omega t)) = B\pi a\omega x_0 cos\omega t$$

Επομένως η ΗΕΔ είναι εναλλασσόμενη με συχνότητα ω ίση με του ταλαντωτή και μέτρο ίσο με

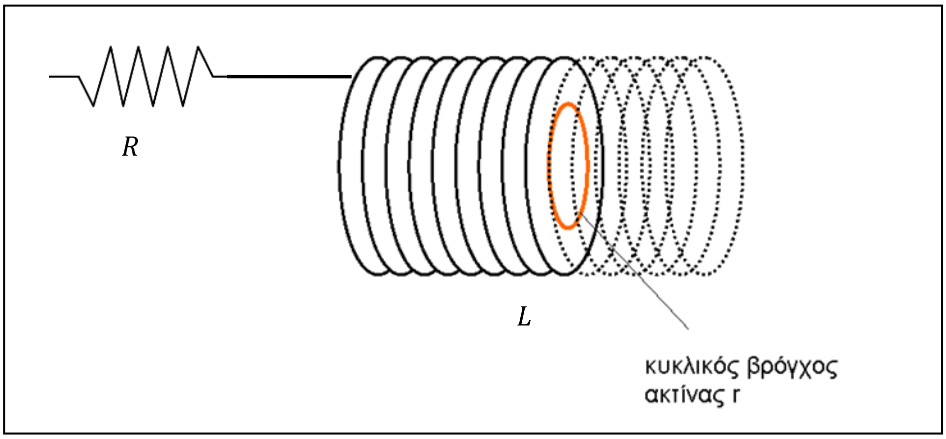
$$V_0 = B\pi a\omega x_0 = 0.05B\pi a^2\omega$$

όπου αντικαταστήσαμε $x_0 = 0.05a$ από τα δεδομένα Αντικαθιστώντας όλες τις αριθμητικές τιμές οδηγεί στο αποτέλεσμα:

$$V_0 = 0.05B\pi a^2\omega = 0.05 \times 0.2 \times 3.14 \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 100 = 1.26\, mV$$

15)

Κύκλωμα RL σειράς έχει $R = 2\,\Omega$, $L = 0.5\,H$ και τροφοδοτείται με πηγή πλάτους $V_0 = 3\sqrt{2}\,Volts$ και κυκλικής συχνότητας $\omega = 4\,rad/s$. Το πηνίο είναι κατασκευασμένο με ν σπείρες/m και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο εσωτερικό του έχει τοποθετηθεί μικρότερο πηνίο N σπειρών και εμβαδού A, με τους άξονες των δυο πηνίων να συμπίπτουν και το μικρό να εμπεριέχεται πλήρως μέσα στο μεγαλύτερο πηνίο κατά μήκος. Να βρεθεί το πλάτος της επαγόμενης ΗΕΔ στο μικρό πηνίο.



<u>Λύση</u>:

Από τα δεδομένα

$$\omega = 4\,rad/s$$

Η επαγωγική εμπέδηση ισούται με

$$Z_L = L\omega = 0.5 \times 4 = 2\,\Omega$$

Ολική εμπέδηση

$$Z = \sqrt{R^2 + {Z_L}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,\Omega$$

Η γωνία ισούται με

$$\theta = ata\,n\left(\frac{Z_L}{R}\right) = atan\left(\frac{2}{2}\right) = \pi/4\,rad$$

Πλάτος ρεύματος

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1.5\,A$$

Στιγμιαία τιμή:

$$I = I_0\,sin(\omega t - \theta) = 1.5\,sin(4t - \pi/4) = 1.5cos(4t)$$

Αυτό το ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου ίσο με:

$$B = \mu_0 \nu I = 4\pi \times 10^{-7}\nu \times 1.5\,cos(4t) = 6\pi \times 10^{-7}\nu\,cos(4t)$$

Από τον νόμο του Faraday, η επαγόμενη ΗΕΔ στο μικρότερο πηνίο ισούται με (κατ' απόλυτη τιμή):

$$V = \frac{d(NBAsin\theta)}{dt} = \frac{d(NBA)}{dt} = NA\frac{dB}{dt}$$

Η γωνία θ είναι 90^0 αφού το παραγόμενο πεδίο είναι κατά μήκος του κοινού άξονα των δυο πηνίων και η σπείρες του μικρού είναι κάθετες στον άξονα (δες εικόνα)

$$V = NA\frac{dB}{dt} = 24\pi \times 10^{-7}\nu NAsin(4t)$$

Η μέγιστη τιμή αυτής της τάσης είναι

$$V_0 = 24\pi \times 10^{-7}\nu NA$$

16)

Κύκλωμα RLC σειράς έχει $R = 4\Omega$, $Z_L = 9\Omega$, $Z_C = 5\Omega$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι $\sqrt{2}A$. Ο πυκνωτής του κυκλώματος έχει παράλληλους οπλισμούς οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 0.9\pi\ \mu m$ και έχουν εμβαδό $A = 3/5\ m^2$ ο καθένας. Ζητούνται: α) το πλάτος της τάσης της πηγής V_0, β) Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων V_R, V_L και V_C τη χρονική στιγμή $t = 10\ \mu s$ (θεωρώντας ότι στο $t = 0$ η στιγμιαία τιμή της πηγής τάσης είναι μηδέν). Σημείωση: Πάρτε για απλότητα τη σταθερά $\varepsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12}$ σε μονάδες $S.I.$

Λύση:

α) Η εμπέδηση Z του κυκλώματος δίνεται από την

$$Z^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 16 + 16 = 2 \times 16 => Z = 4\sqrt{2}\,\Omega$$

Η τιμή του αμπερόμετρου είναι η ενεργός τιμή

$$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} => \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} => I_0 = 2$$

Το πλάτος της τάσης της πηγής V_0 ισούται με

$$V_0 = I_0 Z = 2 \times 5 = 10\, V$$

β) Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς δίνεται από την

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{9 \times 10^{-12} \times 3}{0.9\pi \times 10^{-6} \times 5} = \frac{30}{5\pi}\ \mu F$$

Από την χωρητική εμπέδηση, μπορούμε να βρούμε το ω

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} => \omega = \frac{1}{C Z_C} = \frac{5\pi}{30 \times 10^{-6} \times 5} = \frac{\pi}{30} \times 10^6\ rad/s$$

Η γωνία θ δίνεται από την

$$tan\theta = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1 => \theta = \pi/4\ rad = 45^0$$

Η στιγμιαία τιμή του ρεύματος ισούται με

$$I = I_0 sin(\omega t - \theta)$$

οπότε

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\omega I_0 cos(\omega t - \theta) = I_0 Z_L cos(\omega t - \theta)$$

$$V_R = IR = I_0 R sin(\omega t - \theta)$$

ενώ η τάση της πηγής είναι

$$V_s = V_0 sin\omega t$$

Στο $t = 10 \times 10^{-6}\ s$ έχουμε

$$V_L = I_0 Z_L cos(\omega t - \theta) = 2 \times 9 \times cos(\pi/30 \times 10 - \pi/4\,) = 18 sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9\sqrt{3}\,V$$

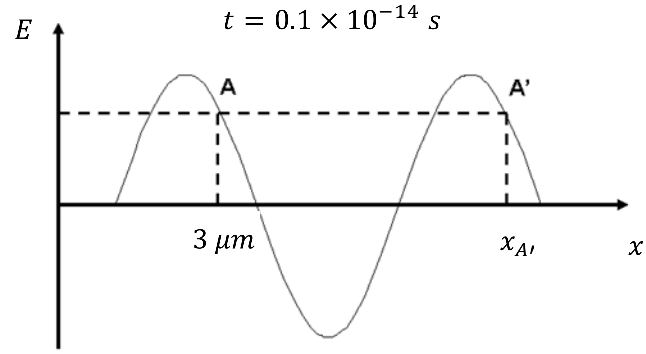
$$V_R = IR = I_0 R sin(\omega t - \theta) = 2 \times 4 \times sin(\pi/30 \times 10 - \pi/4) = 8 cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\,V$$

$$V_s = V_0 sin\omega t = 10\ \times sin(\pi/30 \times 10) = 5\sqrt{3}\,V$$

17)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του ηλεκτρικού πεδίου ενός Η/Μ κύματος σε χρόνο $t = 0.1 \times 10^{-14} s$ το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα $+x$ με συχνότητα $f = 6/\pi \times 10^{14} Hz$

και περιγράφεται από την εξίσωση $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y sin(kx - \omega t)$ με $E_0 = 3 \times 10^6 N/C$. Να βρεθούν: α) Η απομάκρυνση $x_{A'}$ του σημείου Α' σε m, β) Το κυματάνυσμα $\vec{k}$ και γ) Το μέτρο και η φορά του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο Γ με συντεταγμένη $x_\Gamma = 1.2\ \mu m$ (στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο).



Λύση:

α) Προφανώς το Α' διαφέρει κατά απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος από το σημείο Α δηλαδή:

$$x_{A'} = x_A + \lambda$$

Τα Η/Μ κύματα ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός $v = c = 3 \times 10^8 m/s$ και έτσι από την σχέση των κυματικών μεγεθών $c = \lambda f$ παίρνουμε:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6/\pi \times 10^{14}} = \frac{\pi}{2} \times 10^{-6}\ m$$

δηλαδή $\lambda = \pi/2 = 1.57\ \mu m$. Από τη δεδομένη γραφική παράσταση $x_A = 3\ \mu m$ και έτσι

$$x_{A'} = x_A + \lambda = 3 + 1.57 = 4.57\ \mu m$$

β) Το μέτρο του κυματανύσματος είναι ίσο με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\pi/2 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^6\ rad/m$$

Η φορά του είναι αυτή της διάδοσης του κύματος που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο άξονας x και έτσι διανυσματικώς μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{k} = 4 \times 10^6\ \vec{e}_x\ rad/m$$

γ) Το μαγνητικό πεδίο έχει την ίδια φάση όπως και το ηλεκτρικό πεδίο δηλαδή τον ίδιο ημιτονοειδή όρο $sin(kx - \omega t)$ όμως για να βρούμε τη φορά του σκεφτόμαστε ότι τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και $\vec{k}$ αποτελούν ένα τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς (δείτε Σχήμα 12.1) και έτσι το $\vec{B}$ πρέπει να είναι κατά τον άξονα z. Το μέτρο του ισούται με

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 0.01\ T$$

Άρα διανυσματικώς μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_z sin(kx - \omega t)$$

Η κυκλική συχνότητα ισούται με

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{6}{\pi} \times 10^{14} = 12 \times 10^{14}\, rad/s$$

Στο σημείο Γ με συντεταγμένη $x_\Gamma = 1.2\,\mu m$ στο παραπάνω στιγμιότυπο με $t = 0.1 \times 10^{-14}\, s$ η φάση ισούται με

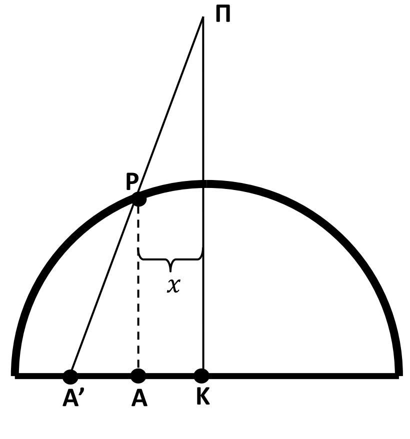
$$kx - \omega t = 1.57 \times 10^6 \times 1.2 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{14} \times 0.1 \times 10^{-14} = 0.684$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με :

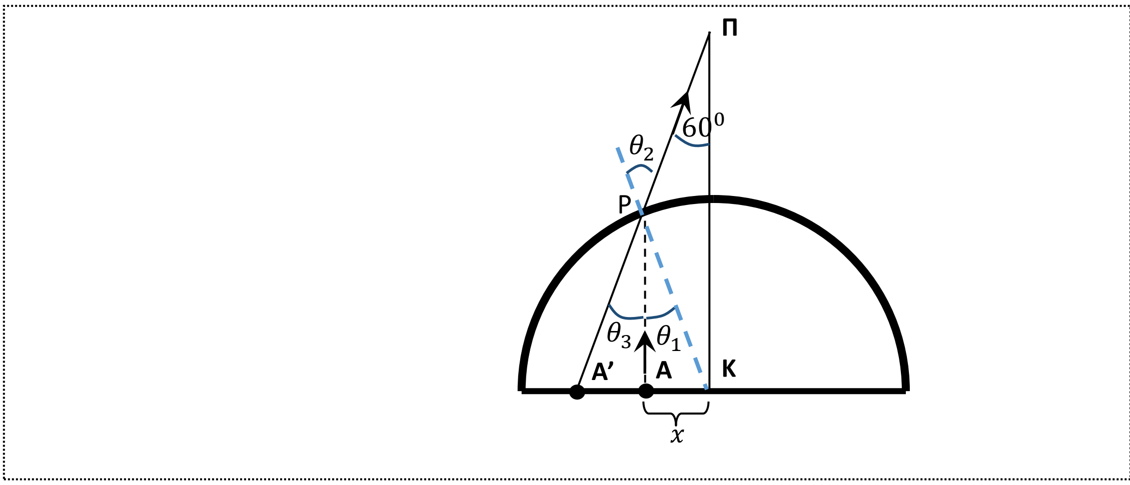
$$\vec{B} = 0.01\vec{e}_z sin(0.684) = 0.00632\vec{e}_z\, T$$

18)

Σημειακή ατέλεια A βρίσκεται επάνω στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρικού φακού με δείκτη διάθλασης $n = 3/2$, σε απόσταση x από το κέντρο καμπυλότητας K του φακού (βλέπε σχήμα). Ένας παρατηρητής που ο οφθαλμός του βρίσκεται στο σημείο Π, έχει την εντύπωση ότι το A βρίσκεται στην θέση A' της επίπεδης επιφάνειας. Εάν η γωνία ΚΠΑ' είναι ίση με 60^0 και η φωτεινή ακτίνα από το A χρειάζεται χρόνο t για φτάσει στο σημείο P, να βρεθεί το x.



Λύση. Φέρουμε στο σημείο P την ακτίνα PK η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης θ_1 και διάθλασης θ_2 ορίζονται ως προς αυτήν.



Η γωνία θ_3 εντός εναλλάξ με την δεδομένη και άρα είναι ίσες

$$\theta_3 = 60^0$$

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ οπότε

$$n_1 sin\theta_1 = sin\theta_2$$

Όμως $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3 = \theta_1 + 60^0$ οπότε:

$$n_1 sin\theta_1 = sin(\theta_1 + 60^0)$$

$$n_1 sin\theta_1 = sin\theta_1 cos60^0 + cos\theta_1 sin60^0$$

$$\frac{3}{2} sin\theta_1 = \frac{1}{2} sin\theta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} cos\theta_1$$

$$sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} cos\theta_1 => tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Έστω y η απόσταση PA. Αφού απαιτείται χρόνος t για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{y}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n_1 = \frac{c}{v} = \frac{ct}{y} => y = \frac{ct}{n_1}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο PAK

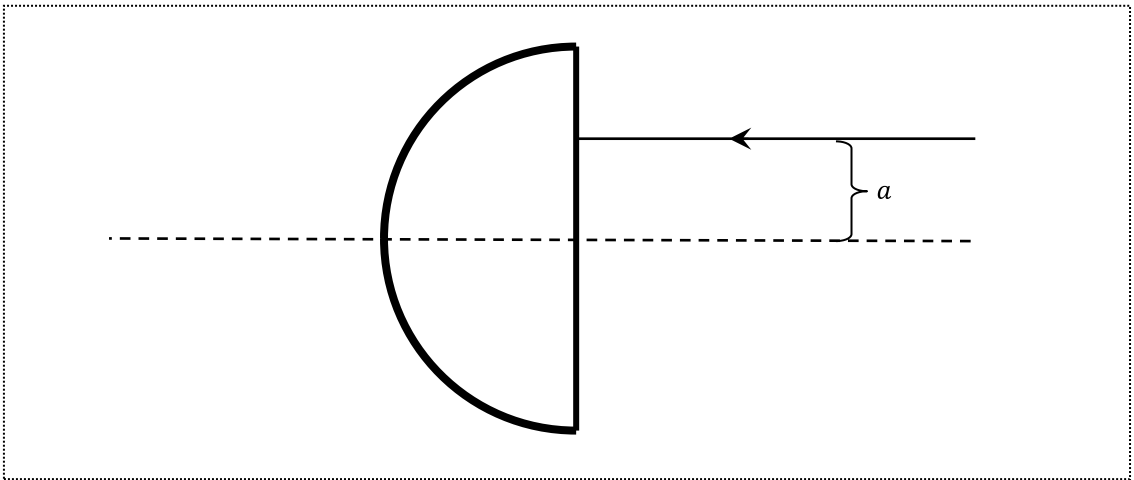
$$tan\theta_1 = \frac{x}{y}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

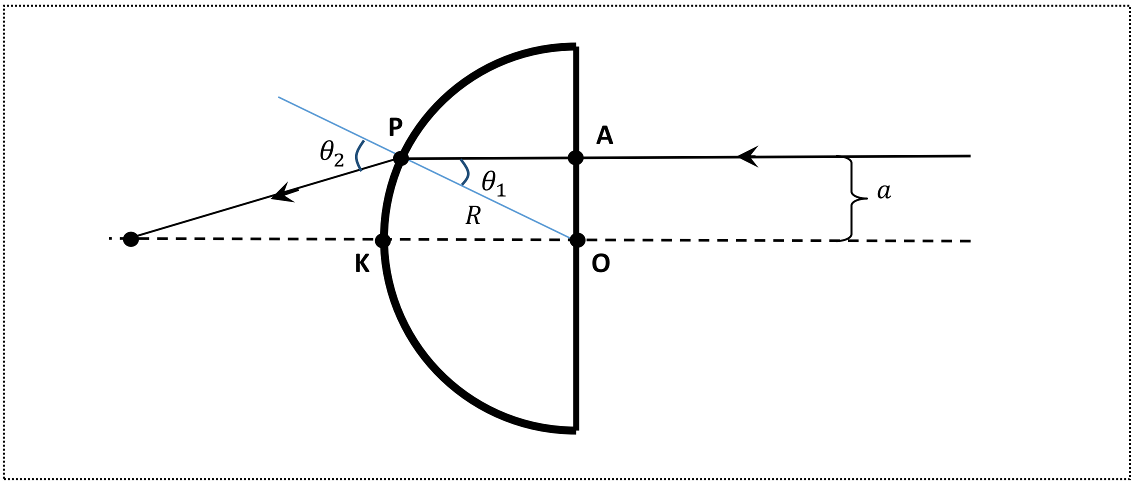
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{xn_1}{ct} => x = \frac{\sqrt{3}ct}{2n_1}$$

19)

(10 μονάδες) Λεπτή φωτεινή δέσμη προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ενός γυάλινου ημισφαιρίου με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας του ημισφαιρίου και σε απόσταση a από αυτόν. Η γωνία διάθλασης επάνω στην σφαιρική επιφάνεια κατά την έξοδο της δέσμης είναι ίση με θ. Όταν η δέσμη κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, απαιτείται χρόνος t για να διαπεράσει η δέσμη το ημισφαίριο. Να βρεθεί η εστιακή απόσταση του ημισφαιρίου.



Λύση. Φέρουμε στο σημείο P την ακτίνα PK η οποία είναι και η τοπική κάθετος. Οι γωνίες πρόσπτωσης θ_1 και διάθλασης θ_2 ορίζονται ως προς αυτήν.



Στην επίπεδη επιφάνεια έχουμε κάθετη πρόσπτωση οπότε η δέσμη συνεχίζει ανενόχλητη.

Από τον νόμο του Snell

$$n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$$

Για τον αέρα $n_2 = 1$ και η $\theta_2 = \theta$ δεδομένη. Θέτοντας $n_1 = n$ έχουμε

$$nsin\theta_1 = sin\theta$$

Από το τρίγωνο PAO

$$sin\theta_1 = \frac{a}{R}$$

Η απόσταση OK που καλύπτει η δέσμη όταν κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας είναι η ακτίνα R του ημισφαιρίου. Αφού απαιτείται χρόνος t για να καλύψει το φως αυτή την απόσταση, τότε η ταχύτητά του είναι ίση με

$$v = \frac{R}{t}$$

Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ct}{R} => R = \frac{ct}{n}$$

Επομένως

$$sin\theta_1 = \frac{a}{R} = \frac{an}{ct}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω

$$nsin\theta_1 = sin\theta => \frac{an^2}{ct} = sin\theta => n = \sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}}$$

Η εστιακή απόσταση δίνεται από την

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Αφού η πίσω επιφάνεια είναι επίπεδη, έχει άπειρη ακτίνα καμπυλότητας $R_2 \to \infty$. Θέτοντας $R_1 = R$ έχουμε:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R} => f = \frac{R}{n-1} = \frac{ct}{n(n-1)} = \frac{ct}{\sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}}\left(\sqrt{\frac{ctsin\theta}{a}} - 1\right)}$$

20)

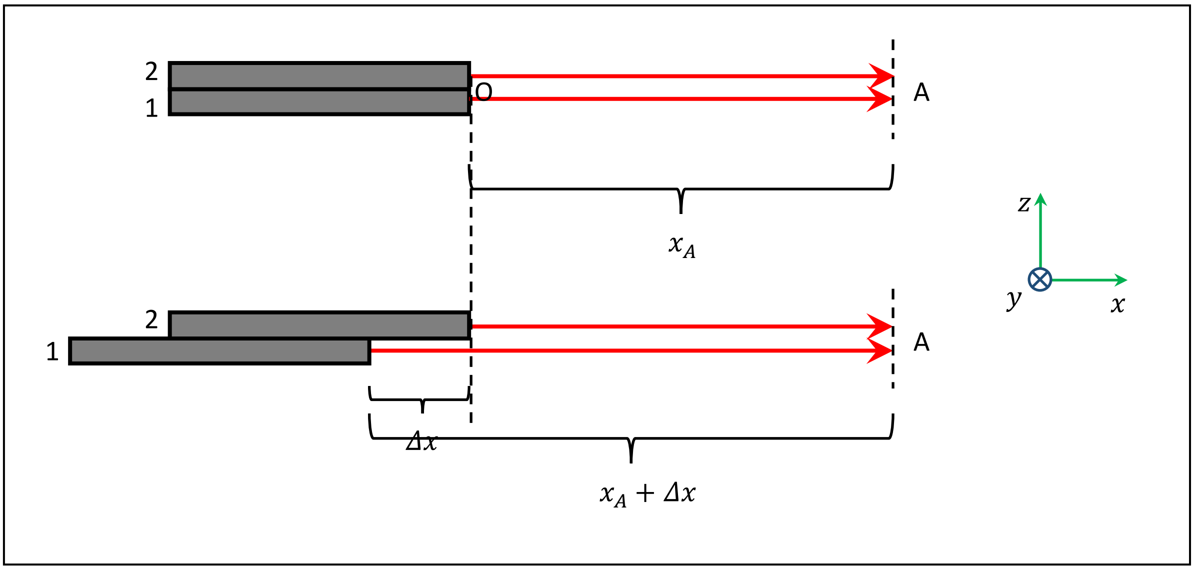
Δυο οπτικές ίνες 1 και 2 παράλληλες στον άξονα x που εκπέμπουν δέσμες με φως διαφορετικής συχνότητας f_1 και f_2 αντίστοιχα, με ίσο πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0 πολωμένο κάθετα και έξω από τη σελίδα (και για τις δυο συχνότητες), τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους στο σημείο Ο που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν το σημείο Α στο $x = x_A$. Στο σημείο Ο όπου εκπέμπουν οι δυο ίνες, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή των συντεταγμένων, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν την χρονική στιγμή $t = 0$.

α) Να δοθεί η πλήρης μαθηματική έκφραση (διανυσματική μορφή) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α της κάθε δέσμης για κάθε χρόνο t (επάνω σχήμα)

β) Να βρεθεί η πυκνότητα ενέργειας της κάθε δέσμης στο σημείο Α (επάνω σχήμα)

γ) Έστω ότι η ίνα 1 μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x (κάτω σχήμα). Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και το μέτρο του συνιστάμενου ηλεκτρικού πεδίου στο Α θεωρώντας ότι οι δυο συχνότητες είναι πολύ κοντά η μια στην άλλη (αλλά όχι ίσες) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $f_1 - f_2 \approx 0$.

<u>Σημείωση</u>. Προσέξτε οι απαντήσεις σας να είναι συναρτήσει των δεδομένων f_1, f_2, E_0, x_A και Δx αλλιώς <u>δεν θα θεωρηθούν σωστές</u>.



Λύση:

α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν κύματα που δίνονται από τα ηλεκτρικά πεδία

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

(δεν υπάρχει αρχική φάση αφού στο $x = 0, t = 0$ μας δίνεται ότι $B = 0$). Οι κυκλικές συχνότητες είναι ίσες με $\omega_1 = 2\pi f_1$ και $\omega_2 = 2\pi f_2$, τα μήκη κύματος $\lambda_1 = c/f_1$ και $\lambda_2 = c/f_2$, ενώ οι κυματάριθμοι $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = 2\pi f_1/c$ και $k_2 = 2\pi f_2/c$. Επομένως στο σημείο Α με $x = x_A$ έχουμε:

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι ίσο με

$$B_0 = E_0/c$$

Τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ και η διεύθυνση διάδοσης (ο άξονας x) αποτελούν τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς επομένως το $\vec{B}$ είναι κατά μήκος του άξονα $-z$. Επίσης το $\vec{B}$ είναι σε πλήρη φάση με το $\vec{E}$ (έχουν το ίδιο ημίτονο) και έτσι:

$$\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \vec{e}_z sin \frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)$$

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την $u = \varepsilon_0 E^2$ επομένως:

$$u_1 = \varepsilon_0 {E_0}^2 sin^2 \left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right]$$

$$u_2 = \varepsilon_0 {E_0}^2 sin^2 \left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A - ct)\right]$$

β)

Λόγω του επιπλέον Δx, τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο Α είναι ίσα με

$$\vec{E}_1 = -E_0 \vec{e}_y sin \left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right]$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y sin \left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)\right]$$

Το συνιστάμενο πεδίο ισούται με

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -E_0 \vec{e}_y \left\{sin\left[\frac{2\pi f_1}{c}(x_A - ct)\right] + sin\left[\frac{2\pi f_2}{c}(x_A + \Delta x - ct)\right]\right\}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$sina + sinb = 2sin(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2})$$

οδηγεί στο

$$\vec{E} = -2E_0 \vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi \bar{f}}{c}(x_A - ct) + \pi f_2 \frac{\Delta x}{c}\right] cos\left[\frac{2\pi \delta f}{c}(x_A - ct) + \pi f_2 \frac{\Delta x}{c}\right]$$

όπου $\bar{f}$ η μέση τιμή των f_1, f_2 και δf η ημιδιαφορά τους. Για κοντινές συχνότητες $\delta f \approx 0$ και

$$\vec{E} = -2E_0 \vec{e}_y sin\left[\frac{2\pi \bar{f}}{c}(x_A - ct) + \pi f_2 \frac{\Delta x}{c}\right] cos\left[\pi f_2 \frac{\Delta x}{c}\right]$$

Το παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο έχει συχνότητα

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

και άρα μήκος κύματος

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\bar{f}} = \frac{2c}{f_1 + f_2}$$

Το μέτρο αυτού του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με

$$E_0{}' = 2E_0 cos\left[\pi f_2 \frac{\Delta x}{c}\right]$$