Α΄ Πρόοδος Φυσικής ΙΙ

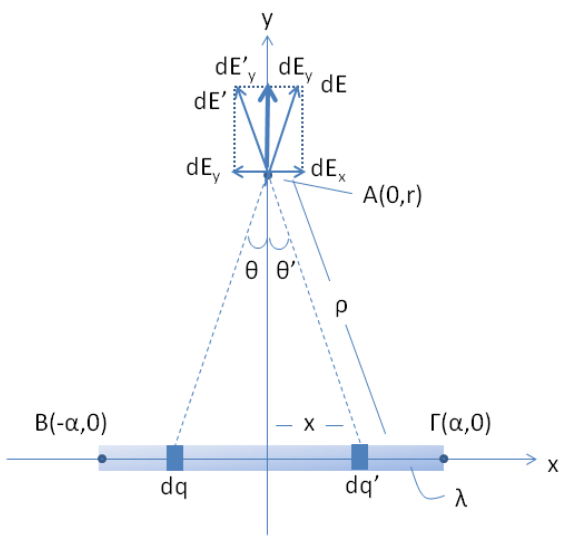
Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πολυτεχνική Σχολή
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διδάσκων:	Μπαλής Νικόλαος
Διάρκεια Εξέτασης:	2 ώρες
Ημερομηνία Εξέτασης:	Τρίτη 7 Μαΐου 2019
Ονοματεπώνυμο:	
Εξάμηνο:	
ΑΜ:	

Θέματα Α

1. α) Να υπολογισθεί με τη μέθοδο της ολοκληρώσεως το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο Α (0,r), που οφείλεται σε μια ομοιόμορφα φορτισμένη λεπτή ράβδο. Θεωρείστε ότι η ράβδος βρίσκεται επί του άξονα x με άκρα Β(-α,0) και Γ(α,0). Η ράβδος έχει θετική γραμμική πυκνότητα φορτίου ίση με λ.
β) Να γραφεί ο τύπος που αποδίδει το πεδίο στο σημείο Α αν θεωρήσουμε α>>r.
γ) Στην περίπτωση α>>r, να υπολογιστεί το πεδίο με χρήση του νόμου του Gauss. Γιατί είναι «βολικός» ο υπολογισμός στην περίπτωση αυτή;

Λύση:



α) Με βάση το σχήμα επιλέγω στοιχειώδες φορτίο dq' στο θετικό τμήμα του άξονα x και συμμετρικά ένα στοιχειώδες dq στον αρνητικό ημιάξονα. Τα δυο στοιχειώδη φορτία ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων, έστω απόσταση x>0. Τα δυο αυτά φορτία συνεισφέρουν κατά ισοδύναμο τρόπο στη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α. Έστω ότι οι στοιχειώδεις αυτές συνεισφορές είναι dE και dE’ για το φορτίο dq και dq’ αντίστοιχα. Αναλύοντας κάθε στοιχειώδη συνεισφορά στους άξονες x και y παρατηρούμε ότι εν τέλει το ηλεκτρικό πεδίο καθορίζεται μόνο από τις συνεισφορές κατά τον άξονα y, καθώς οι συνιστώσες dEx αλληλοαναιρούνται.

$$dE_y = dEcos\theta$$

$$E = \int dE_{y=} \int dEcos\theta = \int k\frac{dq}{\rho^2}cos\theta = \kappa\lambda\int_{-\alpha}^{'+\alpha}\frac{dx}{\rho^2}\ cos\theta$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώ τις εξής τριγωνομετρικές σχέσεις για να εκφράσω όλα τα μεγέθη συναρτήσει μίας μεταβλητής, έστω της γωνίας θ:

$$cos\theta = \frac{r}{\rho} \text{ ή } \rho = \frac{r}{cos\theta}$$

$$tan\theta = \frac{x}{r} \text{ ή } dx = \frac{r}{(\cos\theta)^2}d\theta$$

Τελικά έχω:

$$E = \kappa\lambda\int_{-\theta_\alpha}^{+\theta\alpha}\frac{r}{(\cos\theta)^2}\ d\theta\frac{(\cos\theta)^2}{r^2}\ cos\theta = \kappa\lambda\ \int_{-\theta\alpha}^{+\theta\alpha}\frac{cos\theta}{r}\ d\theta =$$

$$= \frac{\kappa\lambda}{r}\ [sin\theta]_{-\theta\alpha}^{+\theta\alpha} = \frac{\kappa\lambda}{r}\ 2sin\theta\alpha,$$

$$\text{όπου } sin\theta\alpha = \frac{\alpha}{\rho}\text{και } \rho = \sqrt{\alpha^2 + r^2}$$

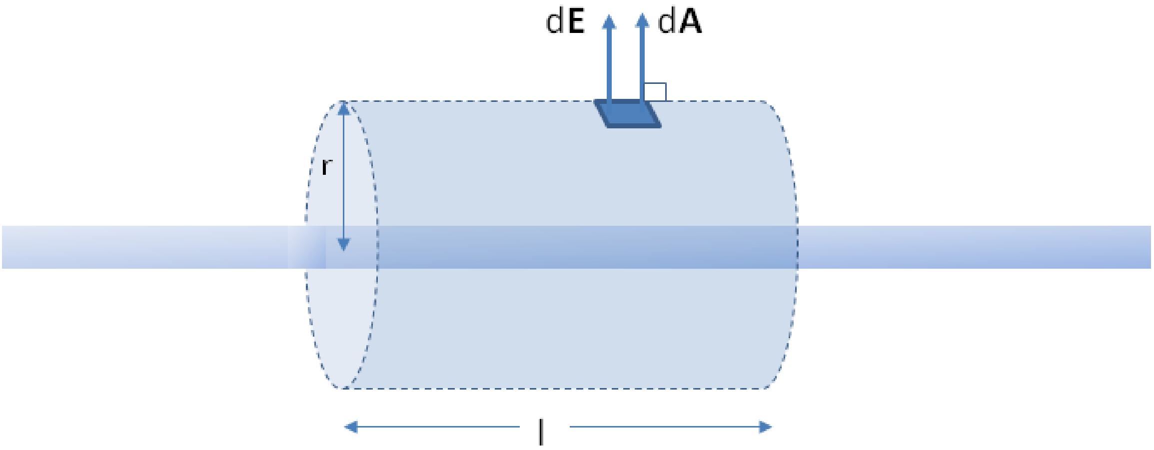
$$\text{άρα } E = \frac{\kappa\lambda}{r}\ 2\ \frac{a}{\rho}$$

$$\text{δηλαδη}, E = \frac{2\kappa\lambda}{r}\frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + r^2}}$$

β) Όταν α>>r, ο όρος $\sqrt{\alpha^2 + r^2}$ τείνει στο α, επομένως με τις σχετικές απλοποιήσεις το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται:

$$E = \frac{2\kappa\lambda}{r} \text{ ή } E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

γ)



Έστω κυλινδρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r και μήκους l. Η επιφάνεια αυτή «αγκαλιάζει» τμήμα l της άπειρης γραμμής φορτίου, συνεπώς το ολικό φορτίο που εμπεριέχεται σε αυτή είναι $Q_{enc}=\lambda l$.

$$\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \text{ ή } E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Δηλαδή:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Η εφαρμογή του ν. Gauss είναι εδώ «βολική» καθώς λόγω της άπειρης κατανομής φορτίου, υπάρχει η απαραίτητη συμμετρία στην συνεισφορά των στοιχειωδών φορτίων που καθιστά πρακτικά σταθερό το **E** στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

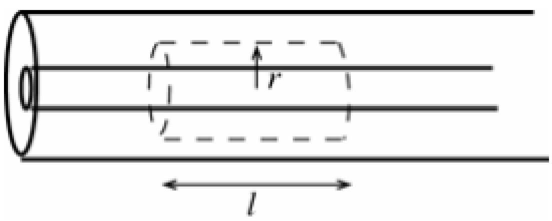
(3 μονάδες)

2. Ένα μακρύ ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από κυλινδρικό αγωγό με ακτίνα a και έναν εξωτερικό ομοαξονικό κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c. Ο εξωτερικός κύλινδρος στηρίζεται σε μονωτικά στηρίγματα και δεν έχει καθόλου φορτία. Ο εσωτερικός κύλινδρος είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένος. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι λ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο α) σε οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των κυλίνδρων σε απόσταση r από τον άξονα, β) σε οποιοδήποτε σημείο έξω από τον εξωτερικό κύλινδρο, γ) σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης r από r=0 μέχρι r=2c. δ) Βρείτε το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην εσωτερική επιφάνεια και στην εξωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου.

(4 μονάδες)

Λύση:

α) Εφαρμόζω τον νόμο Gauss σε ένα Gaussian κύλινδρο μήκους l and ακτίνας r, όπου a<r<b και υπολογίζω την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου **E** στην επιφάνεια του κυλίνδρου



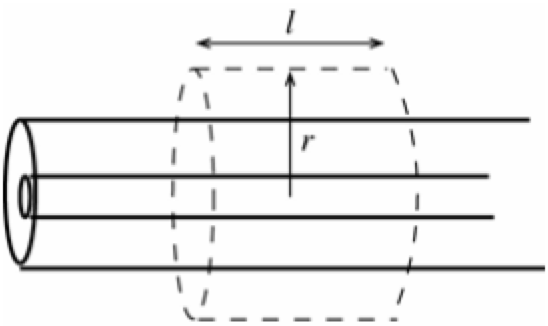
Φ_E=E(2πrl) και Q_{enc} = λl (το περικλειόμενο φορτίο που αντιστοιχεί στο μήκος l του εσωτερικού αγωγού μέσα στην Gaussian επιφάνεια)

$$\int \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \text{ ή } \mathrm{E}(2\pi \mathrm{rl}) = \frac{\lambda \mathrm{l}}{\varepsilon_0}$$

Άρα
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Το περικλειόμενο φορτίο είναι θετικό και η κατεύθυνση του **E** είναι ακτινικά προς τα έξω.

β) Εφαρμόζω τον νόμο Gauss σε ένα Gaussian κύλινδρο μήκους l and ακτίνας r, όπου, r>c και υπολογίζω την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου **E** στην επιφάνεια του κυλίνδρου



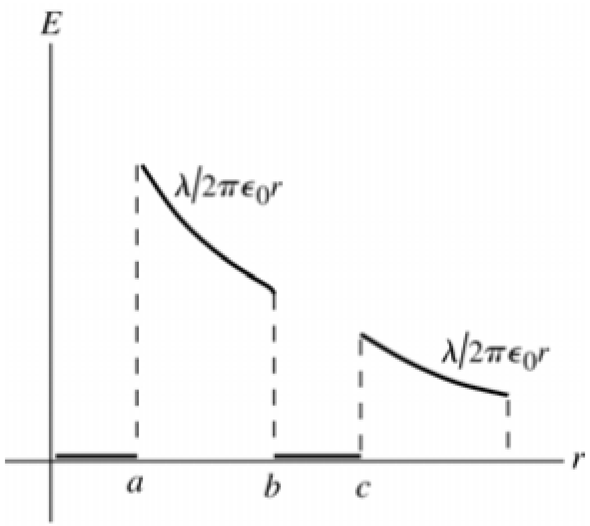
Φ_E=E(2πrl) και Q_{enc} = λl (το περικλειόμενο φορτίο που αντιστοιχεί στο μήκος l του εσωτερικού αγωγού μέσα στην Gaussian επιφάνεια)

$$\int \boldsymbol{E}d\boldsymbol{A}=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \text{ ή } \mathrm{E}(2\pi \mathrm{rl}) = \frac{\lambda \mathrm{l}}{\varepsilon_0}$$

Άρα $$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

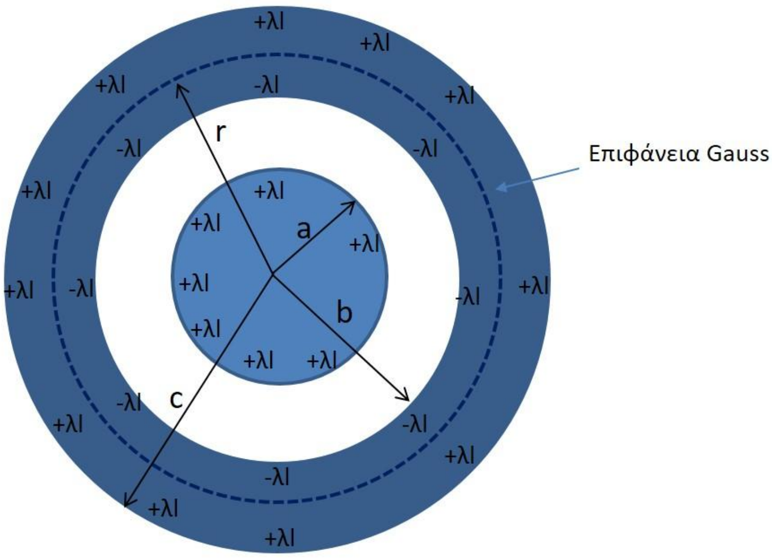
γ) Μέσα σε έναν αγωγό: E=0 (r<a και b<r<c).

$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$. στην περιοχή a<r<b κα r>c



δ) **Εσωτερική επιφάνεια:** Αν θεωρήσω ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο ακτίνας r όπου b< r< c τότε, καθώς αυτή η επιφάνεια κείται μέσα στον αγώγιμο εξωτερικό κύλινδρο, όπου E=0 και Φ_E=0, αυτό συνεπάγεται ότι το ολικό Q_{encl}=0. Καθώς η επιφάνεια περιλαμβάνει το φορτίο +λl του εσωτερικού κυλίνδρου θα πρέπει να περιλαμβάνει και ένα φορτίο -λl στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου. Το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην επιφάνεια αυτή, θα πρέπει λοιπόν να είναι -λ.

Εξωτερική επιφάνεια: Ο εξωτερικός κύλινδρος έχει συνολικό φορτίο μηδέν, επομένως αφού φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους -λ στην εσωτερική του επιφάνεια θα πρέπει να φέρει ένα αντίθετο +λ στην εξωτερική επιφάνεια.



3. Σε κάποια περιοχή του χώρου, οι σφαιρικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσες με

$$E_r = \frac{2bcos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{bsin\theta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

όπου b είναι μια σταθερά σε $Volts \cdot m^2$. Να βρεθεί το δυναμικό σε αυτό το χώρο εάν γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων.

(3 μονάδες)

Λύση:

Αφού $E\varphi = 0$ τότε $\partial V/\partial\varphi = 0$ που σημαίνει ότι το V δεν εξαρτάται από το φ. Από την $Er = -\partial V/\partial r$ με ολοκλήρωση ως προς r παίρνουμε:

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u(\theta)$$

Από την θ-συνιστώσα του πεδίου παίρνουμε:

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} => \frac{bsin\theta}{r^3} = \frac{bsin\theta}{r^3} - \frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}$$

Επομένως

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

και άρα η u είναι μια αριθμητική σταθερά και όχι μια συνάρτηση του θ. Έτσι

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} + u$$

Για να βρούμε τη u χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη ότι V=0 σε ένα σημείο στον άξονα z που απέχει απόσταση R από την αρχή των συντεταγμένων. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, ο άξονας z αντιστοιχεί σε θ=0 και το σημείο αυτό βρίσκεται σε r=R και έτσι

$$0 = \frac{bcos0}{R^2} + u$$

Οπότε

$$u = -\frac{b}{R^2}$$

και τελικά:

$$V = \frac{bcos\theta}{r^2} - \frac{b}{R^2}$$

Καλή Επιτυχία!