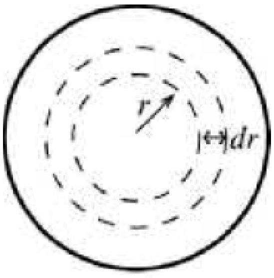
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Η χωρική πυκνότητα φορτίου μιας συμπαγούς μη αγώγιμης σφαίρας ακτίνας R =5.60 cm μεταβάλλεται με την ακτινική απόσταση από το κέντρο της σύμφωνα με τη σχέση *$\rho = (14.1\ pC/m^3) r/R$.*
Να βρεθεί:
(α) Πόσο είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας **(1,5 μονάδες)**, και
να υπολογιστεί το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση:
(β) *r*= 0, **(0,5 μονάδες)**
(γ) *r= R/2,* και **(2 μονάδες)**
(δ) *r = R ,* **(1 μονάδα)**
από το κέντρο της σφαίρας.

ΛΥΣΗ:



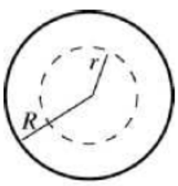
α) Η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με την ακτίνα r εντός της σφαίρας. Χωρίζουμε τον όγκο της σφαίρας σε λεπτούς ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς και ολοκληρώνουμε σε όλο τον όγκο προκειμένου να βρούμε το ολικό φορτίο. Ο όγκος ενός στοιχειώδους φλοιού είναι $dV=4\pi r^2 dr$. Το φορτίο που περιέχει είναι $dq=\rho(r)\, dV=\rho_0\, r/R$, όπου ρ_0=*14.1 pC/m^3*

Το ολικό φορτίο Q βρίσκεται ολοκληρώνοντας:

$$Q = \int dq = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0 \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}} \mathrm{dr} = 4\pi\rho_0 \int_0^R \frac{r^3}{R} dr = 4\pi\rho_0 \frac{R^4}{4R} = \pi\rho_0 R^3$$
$$= \pi \cdot 14.1 \frac{pC}{m^3} \cdot (0.056\mathrm{m})^{\,3} = 7.78 \times 10^{-15} C$$

β) Στο r=0 το πεδίο είναι E=0 καθώς το περικλειόμενο φορτίο είναι μηδενικό.

γ) Σε μια τυχαία επιφάνεια σε απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας το πεδίο υπολογίζεται με χρήση του ν.Gauss, ενώ το περικλειόμενο φορτίο θα είναι:



$$Q_{enc} = \int dq = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 \frac{\mathrm{r}'}{\mathrm{R}} \mathrm{dr}' = 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{r'^3}{R} dr' = 4\pi\rho_0 \frac{r^4}{4R}$$

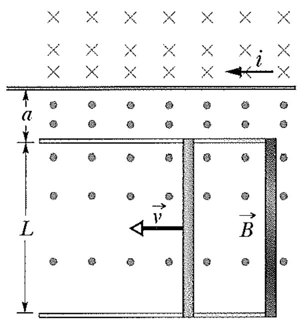
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\pi\rho_0 \frac{r^4}{R}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\pi\rho_0 r^2}{R}$$

Για r=R/2 με R=5.60cm το πεδιο είναι

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi\rho_0 r^2}{R} = \frac{\left(8.99\ \times 10^9\ N \cdot \frac{m^2}{C^2}\right)\pi\left(14.1 \times 10^{-12}\frac{C}{m^3}\right)(0.056\ m)}{4}$$
$$= 5.58 \times 10^{-3}\ \frac{N}{C}$$

δ) Ομοίως για r=R κανω τις αναλογες πράξεις και λαμβάνω E= $2.23 \times 10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

ΘΕΜΑ 2



Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται μια ράβδος μήκους L = 10.0 cm η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα v = 5.00 εφαπτόμενη σε οριζόντιες ράγες. Η ράβδος , οι ράγες και ο συνδετικός αγωγός στα δεξιά αποτελούν έναν αγώγιμο βρόχο. Η ράβδος έχει ωμική αντίσταση 0,4 Ohm ενώ ο υπόλοιπος βρόχος έχει αμελητέα αντίσταση. Σε απόσταση α =10.0mm από το βρόχο βρίσκεται μακρύ σύρμα το οποίο διαρρέεται από ρεύμα i = 100 A με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου στη περιοχή του βρόχου. Βρείτε:

α) Την επαγομένη ΗΕΔ στο βρόχο. **(2,5 μονάδες)**
β) Την ένταση του ρεύματος **(1 μονάδα)**
γ) Το ρυθμό παραγωγής θερμότητας στη ράβδο **(1,5 μονάδα)**

Σημ. Για τους υπολογισμούς σας, θεωρείστε εντός του βρόχου απειροστή οριζόντια λωρίδα μήκους x και πάχους dr σε απόσταση r από το σύρμα.

ΛΥΣΗ:

*α)*Εστω x η απόσταση από τον δεξιό συνδετικό αγωγό μέχρι την κινούμενη ράβδο. Θέλουμε να βρούμε μια έκφραση για τη μαγνητική ροή δια μέσου της επιφάνειας που περικλείεται από τη ράβδο και τις ράγες. Το πεδίο που παράγει το σύρμα είναι:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

όπου r η απόσταση από το σύρμα.
Θεωρούμε μία απειροστή οριζόντια λωρίδα μήκους x και πάχους dr, παράλληλη με το σύρμα και σε απόσταση r από αυτό. Μια τέτοια λωρίδα έχει εμβαδόν A=xdr και η ροή είναι: $d\Phi_B = BdA\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\ xdr.$

Η ολική ροή διαμέσου της περιοχής που περικλείουν η ράβδος και οι ράγες είναι

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 ix}{2\pi}\int_a^{a+L}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 ix}{2\pi}\ \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

και σύμφωνα με το ν. Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{dx}{x}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\, v \ln\left(\frac{a+L}{a}\right) =$$

$$= \left(2\times 10^{-7} T\cdot\frac{m}{A}\right)(100A)(5m/s)\ln\left(\frac{1.00cm + 10.0cm}{1.00cm}\right) = 2.40\times 10^{-4}V$$

β) $i_l = \frac{\varepsilon}{R} = (2.40\times 10^{-4}V)/(0.400\Omega)$= *6.00*$\times 10^{-4}A$

γ) $P = i_l^2 R = (6.00\times 10^{-4}A)^2(0.400\Omega)$= *1.44*$\times 10^{-7}W$.