ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Ένας σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής ακτίνας b είναι φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ(r) = k/r (για α<r<b), όπου r η απόσταση από το κέντρο και k σταθερά. Στο κέντρο του φλοιού υπάρχει σημειακό φορτίο Q.

α) Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται στον σφαιρικό φλοιό. (1,5 μονάδες)

β) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή από $r \leq a$.
(0,5 μονάδες)

γ) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή α<r<b. (2 μονάδες)

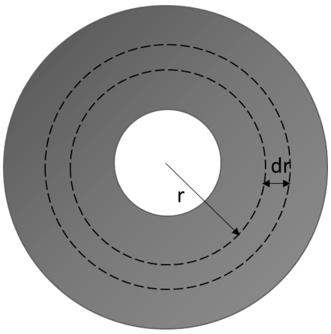
δ) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή r≥b. (1 μονάδα)

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α) Η πυκνότητα φορτίου μεταβάλλεται με την ακτίνα **r** εντός του φλοιού. Χωρίζουμε το φλοιό σε στοιχειώδεις ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς και ολοκληρώνουμε σε όλο τον όγκο προκειμένου να βρούμε το ολικό φορτίο.

Ο όγκος ενός στοιχειώδους φλοιού είναι $dV=4\pi r^2 dr$. Το φορτίο που περιέχει είναι $dq=\rho(r)\, dV=4\pi r^2 (k/r)dr$.

Το ολικό φορτίο Q βρίσκεται ολοκληρώνοντας:



$$Q_{enc} = \int dq = \int \rho(r)\mathrm{dV} = \int_a^b 4\pi r^2 \frac{k}{r}\mathrm{dr}$$
$$= 4\pi k \int_a^b r dr = 2\pi k(b^2 - a^2)$$

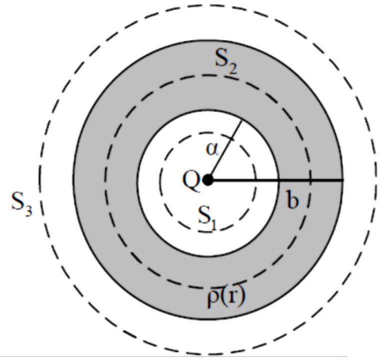
β) Για την επίλυση και των τριών ερωτημάτων θα πρέπει να εφαρμόσω το ν. Gauss στις τρεις περιοχές λαμβάνοντας τις αντίστοιχες επιφάνειες Gauss S_1, S_2, S_3 (σχήμα).

Για r<α έχω

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

γ) Για α<r<b

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



Το περικλειόμενο φορτίο ισούται με το άθροισμα του σημειακού φορτίου και του φορτίου του φλοιού που περιέχεται μέχρι την περιοχή με ακτίνα r.

Άρα

$$Q_{enc} = Q + \int dq =$$
$$= Q + \int \rho(r')dV = Q + \int_a^r 4\pi r'^2 \frac{k}{r'} dr$$
$$= Q + 4\pi k \int_a^r r' dr$$
$$= Q + 2\pi k(r^2 - a^2)$$

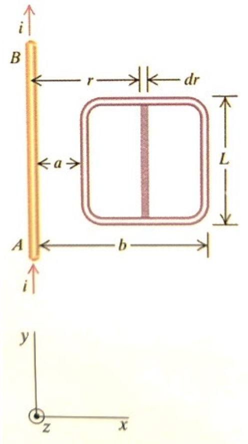
και το πεδίο δίδεται από την έκφραση:

$$E = \frac{Q + 2\pi k(r^2 - a^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

δ) Σε αυτή την περιπτωση ισχυουν τα ίδια με την **περίπτωση** α<r<b, με τη διαφορά ότι το περικλειόμενο φορτίο ισούται με το άθροισμα του σημειακού φορτίου και του φορτίου του φλοιού που περιέχεται μέχρι την περιοχή με ακτίνα b.

$$E = \frac{Q + 2\pi k(b^2 - a^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

ΘΕΜΑ 2



Το ρεύμα που διαρρέει ένα άπειρο σύρμα ΑΒ (βλ. σχήμα) έχει φορά προς τα πάνω και αυξάνει με σταθερό ρυθμό **di/dt**.

α) Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του πεδίου Β σε απόσταση **r** από το σύρμα όταν το ρεύμα που το διαρρέει είναι **i**. **(0,5 μονάδα)**

β) Πόση ροή **dΦ_B** διαπερνά τη στενή σκιασμένη λωρίδα; **(2 μονάδες)**

γ) Πόση είναι η ολική ροή που διαπερνά το βρόχο; **(1 μονάδα)**

δ) Βρείτε την επαγομένη ΗΕΔ στο βρόχο. **(1,5 μονάδα)**

<u>ΛΥΣΗ:</u>

α) Για να βρούμε το **Β** χρησιμοποιούμε το ν.Ampere.

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

Άρα στη δεξιά πλευρά του σύρματος σε απόσταση r από αυτό, το μαγνητικό πεδίο είναι

$$B(r) = -\frac{\mu_0 \cdot I_{enc}}{2\pi r}\,\hat{z}$$

b) Η σκιασμένη λωρίδα έχει επιφάνεια da=Ldr$\hat{z}$ και την διαπερνά ροή:

$$d\Phi_B = \boldsymbol{B}(r)d\boldsymbol{a} = B(r)L\,dr = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi}L\frac{dr}{r}$$

γ) Για να βρούμε την ολική ροή που διαπερνά το βρόχο ολοκληρώνουμε τη $d\Phi_B$ από r=a έως r=b.

$$\Phi_B = \int_{\alpha}^{b} B(r)L\,dr = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi}L\int_{\alpha}^{b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot L}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

δ)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 \cdot L}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{di}{dt}$$