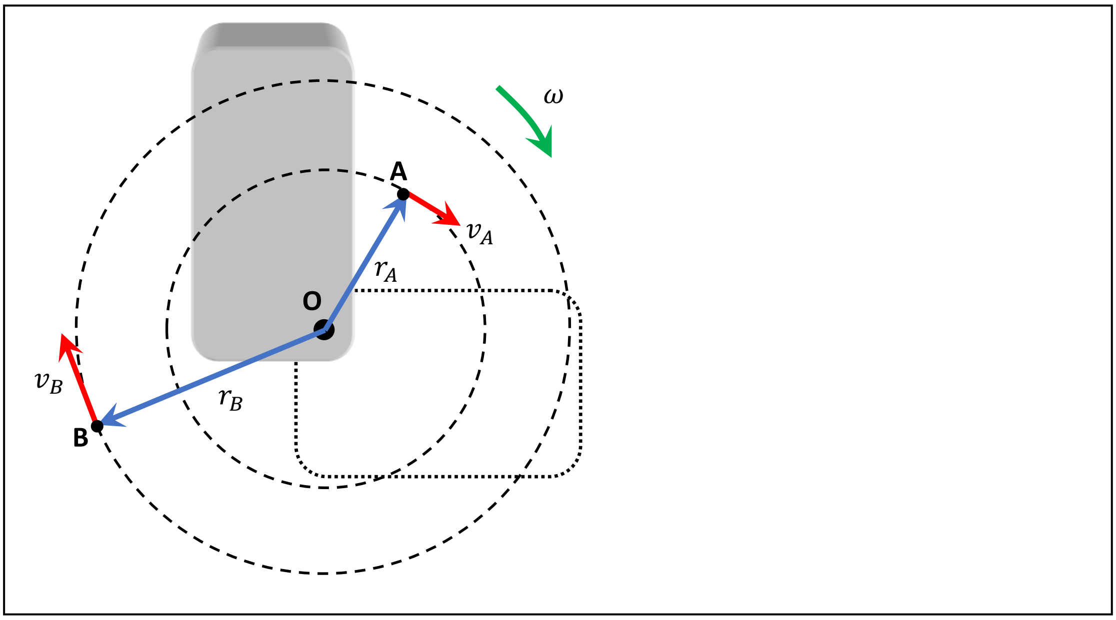
Στροφορμή Στερεού σώματος

Στο παρακάτω Σχήμα 9.2 φαίνεται ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα άξονα στο σημείο Ο. Δυο διαφορετικά σημεία του σώματος όπως τα Α και Β περιστρέφονται με διαφορετικές γραμμικές ταχύτητες v_A και v_B επειδή έχουν γενικά διαφορετικές ακτίνες περιστροφής r_A και r_B. Παρόλα αυτά, και τα δυο περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Εάν m_A και m_B είναι οι αντίστοιχες μάζες των δυο σημείων, τότε σύμφωνα με την Εξ. 9.3 η στροφορμή των δυο σημείων ισούται με

$$L = m_A r_A v_A + m_B r_B v_B$$



Σχήμα 9.2. Ορισμός στροφορμής στερεού σώματος.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τις γραμμικές ταχύτητες ισχύει $v_A = \omega r_A$ και $v_B = \omega r_B$ και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$L = m_A v_A r_A + m_B v_B r_B = \omega(m_A {r_A}^2 + m_B {r_B}^2)$$

Θυμηθείτε όμως από την Εξ. 8.14 ότι ο όρος mr^2 είναι η ροπή αδράνειας I μιας σημειακής μάζας. Έτσι το παραπάνω μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$L = \omega(I_A + I_B)$$

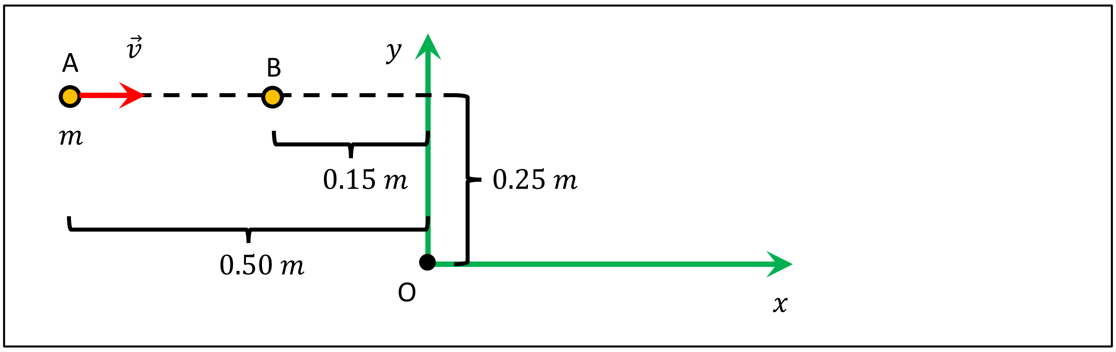
Αυτή όμως είναι η στροφορμή μόνο των δυο σημείων Α και Β. Εάν λάβουμε υπόψιν όλα τα σημεία του σώματος, τότε η παραπάνω σχέση οδηγεί στην $L = \omega(I_A + I_B + I_\Gamma + I_\Delta + \cdots)$ ή συνολικά

$L = I\omega$	ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ	(9.4)

όπου I είναι η ροπή αδράνειας όλου του στερεού σώματος όπως δίνεται από την Εξ. 8.16 και παραδείγματα της οποίας φαίνονται στον Πίνακα 8.1. Από την παραπάνω έκφραση, φαίνεται άμεσα η αναλογία με την ποσότητα *ορμή = μάζα × ταχύτητα* της μεταφορικής κίνησης, εάν θυμηθούμε ότι το ανάλογο της μάζας είναι η ροπή αδράνειας και το ανάλογο της ταχύτητας είναι η γωνιακή ταχύτητα.

Παράδειγμα 9.1

Σημειακή μάζα $0.2\ kg$ κινείται οριζόντια όπως στο παρακάτω σχήμα με ταχύτητα $v = 4\ m/s$. Να βρεθεί η στροφορμή της όταν βρίσκεται στις θέσεις Α και Β.



Λύση: Για τη θέση Α βολεύει περισσότερο ο ορισμός της Εξίσωσης 9.3 αφού είναι εύκολο να δούμε ότι η κάθετη απόσταση (στην ταχύτητα) ισούται με $r_{\perp} = 0.25\ m$. Επομένως η στροφορμή ισούται με

$$L_A = -mvr_{\perp} = -0.2 \times 4 \times 0.25 = -0.2\ kg \cdot m^2/s$$

Χρησιμοποιήσαμε το αρνητικό πρόσημο επειδή η φορά της ταχύτητας σε σχέση με το σημείο Ο τείνει να περιστρέψει σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, π.χ. εάν φανταστούμε ότι ο άξονας y είναι μια κατακόρυφη δοκός, τότε όταν η μάζα m προσπέσει επάνω της θα την στρέψει σύμφωνα με αυτή τη φορά.

Στην θέση Β η κάθετη απόσταση $r_{\perp}$ δεν αλλάζει επομένως και η στροφορμή είναι η ίδια:

$$L_B = -0.2\ kg \cdot m^2/s$$

Παράδειγμα 9.2

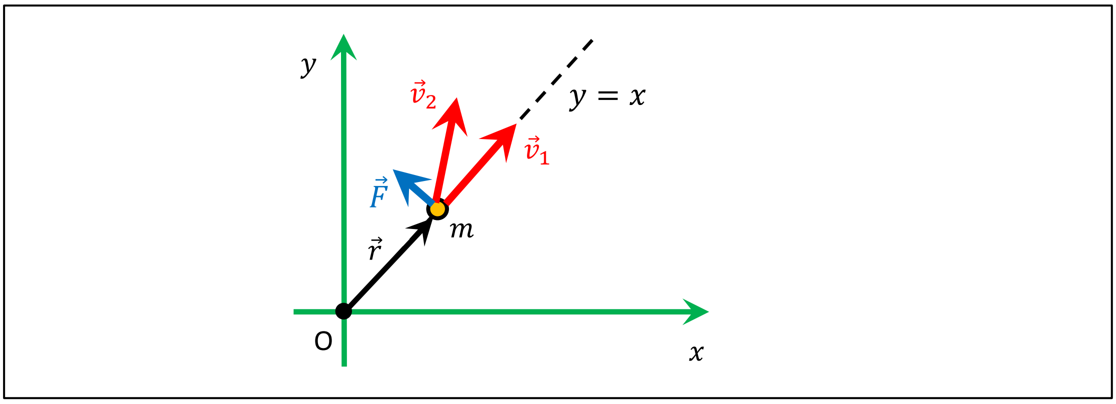
Σημειακή μάζα $0.3\ kg$ κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = x$ όπως στο παρακάτω σχήμα με ταχύτητα $v = 5\ m/s$. Ξαφνικά όταν βρίσκεται στο $x = 2\ m$, μια δύναμη $F = 12\ N$ εφαρμόζεται κάθετα στην ταχύτητα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, εκτρέποντάς την κατά διεύθυνση μόνο, ώστε να σχηματίζει γωνία 60^0 ως προς τον άξονα x (το μέτρο της ταχύτητας παραμένει το ίδιο). Να υπολογισθούν (α) η αρχική και τελική στροφορμή της μάζας αμέσως πριν - αμέσως μετά την εφαρμογή της F και (β) η ροπή που ασκείται επάνω της από την F.

Λύση:

(α) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, όταν η μάζα κινείται επάνω στην ευθεία $y = x$ τότε τόσο το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ όσο και η ταχύτητα $\vec{v}$ βρίσκονται και αυτές επάνω στην ευθεία και επομένως η μεταξύ τους γωνία είναι $\theta = 0$. Αφού $sin\theta = 0$, από την Εξ. 9.1 έχουμε:

$$L_1 = mvrsin\theta = 0$$

Δηλαδή η αρχική στροφορμή είναι μηδέν. Αυτό θα το περίμενε κανείς εφόσον η αρχική τροχιά περνάει από το σημείο O, τότε η μάζα δεν τείνει να περιστραφεί γύρω από αυτό.



Επειδή η F εφαρμόζεται για πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στιγμιαία η μάζα δεν έχει μετακινηθεί πολύ και ότι το διάνυσμα θέσης είναι το ίδιο όπως και λίγο πριν την εφαρμογή της F, βρίσκεται δηλαδή επάνω στην ευθεία $x = y$ και σχηματίζει γωνία 45^0 ως προς τον άξονα x. Αφού $x = 2$, το μέτρο του διανύσματος θέσης ισούται με

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\, m$$

Η νέα ταχύτητα v_2 σχηματίζει γωνία 60^0 ως προς τον άξονα x και έτσι η σχετική γωνία θ μεταξύ r και v ισούται με $60^0 - 45^0 = 15^0$. Από την Εξ. 9.1 έχουμε:

$$L_2 = mvrsin\theta = 0.3 \times 5 \times 2\sqrt{2} \times sin15^0 = 1.1\, kg \cdot m^2/s$$

(β) Η δύναμη F εφαρμόζεται κάθετα στο διάνυσμα θέσης επομένως η σχετική γωνία μεταξύ τους ισούται με 90^0. Από την Εξ. 8.10

$$\tau = Frsin\theta_F = 12 \times 2\sqrt{2} \times sin90^0 = 24\sqrt{2}\, N \cdot m$$

<u>Παράδειγμα 9.3</u>

Σε συμπαγή σφαίρα μάζας 0.25 kg και ακτίνας 0.1 m, η οποία αρχικά περιστρέφεται σαν την υδρόγειο με γωνιακή ταχύτητα 4.0 rad/s, ελεύθερα γύρω από άξονα που περνάει από τους πόλους της, εφαρμόζεται επιφανειακή δύναμη τριβής 0.015 N, εφαπτόμενη στον ισημερινό για 2 δευτερόλεπτα. Να βρεθεί η τελική στροφορμή της σφαίρας, στο πέρας των 2 δευτερολέπτων.

<u>Λύση</u>: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια κάτοψη της σφαίρας που αρχικά περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 4.0\, rad/s$ και η οποία μειώνεται σταδιακά μέχρι μιας τελικής τιμής ω_2 λόγω της εφαρμογής της τριβής, εφόσον η τριβή δημιουργεί αρνητική ροπή ίση με

$$\tau = -TR = -0.015 \times 0.1 = -1.5 \times 10^{-3}\ N \cdot m$$

Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς σφαίρας ισούται με

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5} \times 0.25 \times 0.1^2 = 10^{-3}\ kg \cdot m^2$$

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για περιστροφή, Εξ. 8.18, βλέπουμε ότι αυτή η ροπή δημιουργεί μια σταθερή γωνιακή επιτάχυνση:

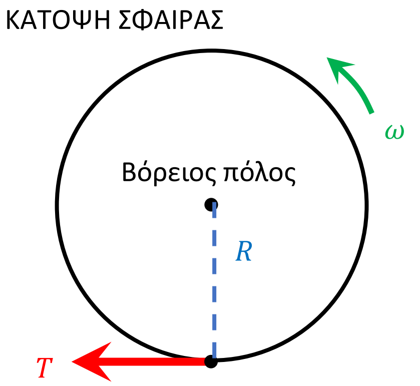
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = -\frac{1.5 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = -1.5\ rad/s^2$$

Εφαρμόζοντας την Εξ. 8.6 για ομαλή γωνιακή επιτάχυνση οδηγεί στην

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t = 4 - 1.5 \times 2 = 1\ rad/s$$

Επομένως η τελική στροφορμή της σφαίρας από την Εξ. 4 ισούται με

$$L_2 = I\omega_2 = 10^{-3} \times 1 = 10^{-3}\ kg \cdot m^2/s^2$$



Διατήρηση της Στροφορμής – Κεντρικές Δυνάμεις

Όπως προαναφέρθηκε, η στροφορμή στην περιστροφή έχει πολλές ομοιότητες με την ορμή στην μεταφορική κίνηση. Έτσι ο εναλλακτικός νόμος του Νεύτωνα $F = dp/dt$ που παρουσιάζεται στην Εξ. 5.6, έχει το ανάλογό του στην περιστροφική κίνηση ο οποίος είναι ο εξής νόμος:

$\tau = \dfrac{dL}{dt}$	2ος ΝΟΜΟΣ του	(9.5)

	ΝΕΥΤΩΝΑ - Περιστροφή	

Στην παραπάνω σχέση, τ είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα και $L = I\omega$ είναι η στροφορμή του. Όπως είδαμε στην μεταφορική κίνηση, όταν δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις σε ένα σύστημα (ή όταν η συνισταμένη τους είναι μηδέν) τότε η ολική ορμή του συστήματος αυτού διατηρείται. Αυτό είναι συνέπεια του προαναφερθέντος νόμου Εξ. 5.6. Εντελώς παρόμοια, όταν δεν υπάρχουν ροπές σε ένα περιστρεφόμενο σώμα, ή όταν η συνισταμένη τους είναι μηδέν, τότε από την Εξ. 9.5 παραπάνω φαίνεται αμέσως ότι η στροφορμή του διατηρείται. Επομένως ισχύει το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

Απουσία ροπών, η στροφορμή ενός περιστρεφόμενου σώματος διατηρείται

Σε μορφή εξίσωσης, το παραπάνω θεώρημα συνήθως γράφεται ως εξής, με τους δείκτες "1" και "2" να σημαίνει "πριν" και "μετά" αντίστοιχα:

$L_1 = L_2 => I_1\omega_1 = I_2\omega_2$	ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ	(9.6)

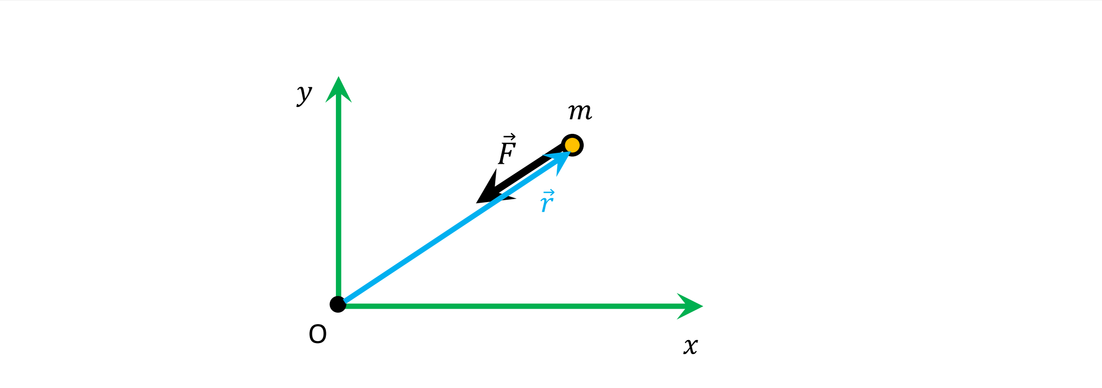
Η ολική ροπή τ στην Εξίσωση 9.5 μπορεί να γίνει μηδέν στις εξής τρεις περιπτώσεις:

α) Όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις

β) Όταν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις αλλά οι ροπές που δημιουργούν αλληλο-εξουδετερώνονται

γ) Όταν οι μόνες δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι **κεντρικές δυνάμεις**.

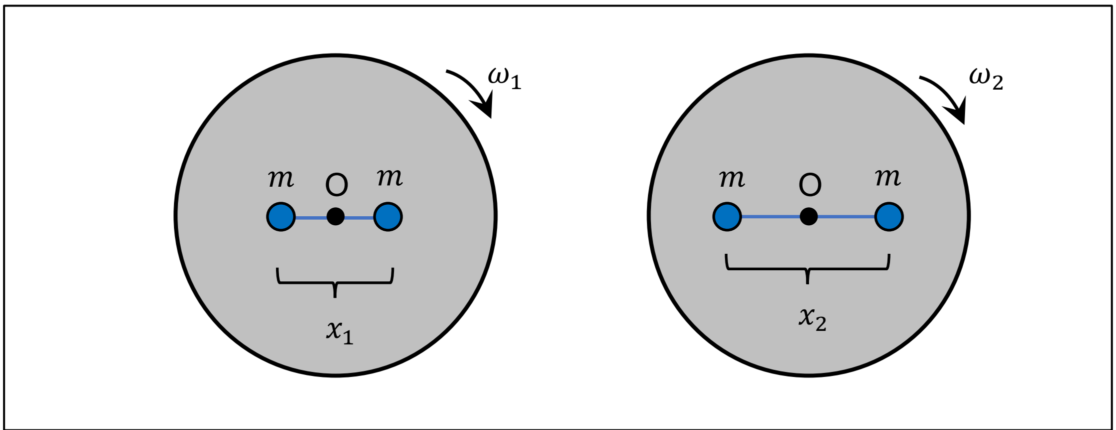
Τι είναι όμως οι κεντρικές δυνάμεις; Από την Εξ. 8.10 έχουμε $\tau = Frsin\theta$ και βλέπουμε ότι η ροπή τ είναι αυτομάτως μηδέν εάν η γωνία θ μεταξύ της δύναμης $\vec{F}$ και του $\vec{r}$ είναι 0 ή 180^0 δηλαδή όταν τα δυο διανύσματα είναι παράλληλα ή αντι-παράλληλα μεταξύ τους. Θυμηθείτε ότι το $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο περιστροφής έως το σημείο εφαρμογής της δύναμης F. Επομένως οι δυνάμεις που κατευθύνονται προς το κέντρο περιστροφής, όπως η $\vec{F}$ στο παρακάτω σχήμα, ή αντίθετα προς το κέντρο, δεν δημιουργούν ροπή και ονομάζονται "**κεντρικές δυνάμεις**". Κλασσικό παράδειγμα αυτού είναι η κεντρομόλος δύναμη η οποία πάντοτε κατευθύνεται προς το κέντρο.



Σχήμα 9.3. Παράδειγμα κεντρικής δύναμης.

Παράδειγμα 9.4

Στο παρακάτω σχήμα ένας φοιτητής έχει προσδέσει δυο ίσες σημειακές μάζες $m = 0.5\ kg$ στις άκρες ενός αβαρούς ελατηρίου το οποίο κρατάει αρχικά συμπιεσμένο σε μήκος $x_1 = 0.8\ m$ με τη βοήθεια νήματος. Ο φοιτητής τοποθετεί συμμετρικά το σύστημα ελατηρίου-μαζών επάνω σε λεπτό οριζόντιο δίσκο μάζας $M = 0.2\ kg$ και ακτίνας $R = 1.4\ m$, ώστε το κέντρο μάζας των μαζών να βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου ο οποίος μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από αυτό. Ακολούθως θέτει τον δίσκο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 15\ rad/s$ και λόγω της τριβής, οι δυο σημειακές μάζες ακολουθούν με την ίδια γωνιακή ταχύτητα τον δίσκο. Κάποια στιγμή ο φοιτητής κόβει το νήμα οπότε το ελατήριο σπρώχνει τις μάζες σε νέα απόσταση $x_2 = 1.2\ m$ μεταξύ τους. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του συστήματος



Λύση: Σύμφωνα με τον Πίνακα 1, η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι (δίσκος + 2 σημειακές μάζες):

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + m\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}0.2 \times 1.4^2 + 2 \times 0.5 \times 0.4^2 = 0.356\ kg \cdot m^2$$

Αφού το νήμα κοπεί, οι δυο μάζες έρχονται σε νέα απόσταση $x_2 = 1.2\ m$ και έτσι η ροπή αδράνειας αλλάζει σε:

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + m\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}0.2 \times 1.4^2 + 2 \times 0.5 \times 0.6^2 = 0.556\, kg \cdot m^2$$

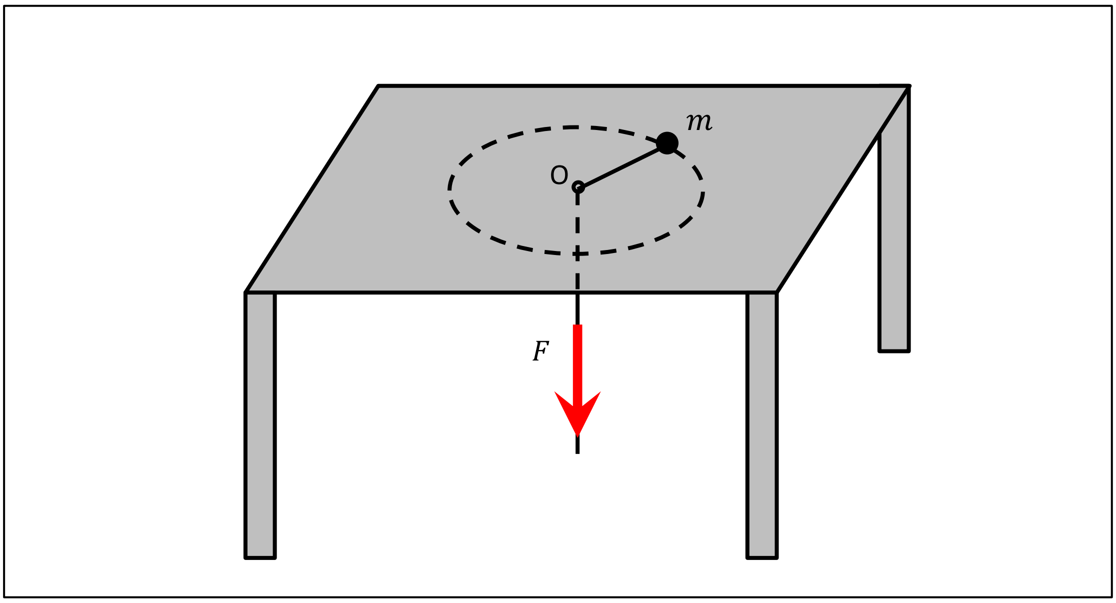
Εάν θεωρήσω το όλο σύστημα δίσκου-μαζών-ελατήριο, τότε δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις σε αυτό το σύστημα. Π.χ. οι τριβές που συγκρατούν τις μάζες επάνω στο δίσκο είναι εσωτερικές δυνάμεις αφού εμφανίζονται σε ζεύγη στο σύστημα. Ομοίως η δύναμη του ελατηρίου είναι μεταξύ των δυο μαζών. Το βάρος θα μπορούσε να είναι μια εξωτερική δύναμη αλλά αφού ο δίσκος είναι τοποθετημένος οριζόντια, οι δυνάμεις βάρους θα αναιρούνται από κάποια κάθετη αντίδραση από τα στηρίγματα του δίσκου. Λαμβάνοντας υπόψη τα βάρη και τις αντιδράσεις τους, οδηγούν σε μηδενική συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων. Επίσης εάν υπήρχε τριβή στον άξονα περιστροφής του δίσκου, τότε αυτή θα ήταν μια κλασσική εξωτερική δύναμη που θα επιβράδυνε το όλο σύστημα αλλά από την εκφώνηση ο δίσκος περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονά του και άρα δεν υπάρχουν τέτοιου είδους τριβές (σε πρακτικές εφαρμογές οι τριβές ελαχιστοποιούνται με κατάλληλη λίπανση στον άξονα περιστροφής όπως π.χ. γράσο). Εφόσον απουσιάζουν οι εξωτερικές δυνάμεις, τότε η ολική στροφορμή διατηρείται. Από την Εξ. 26 έχουμε

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 => \omega_2 = \omega_1\frac{I_1}{I_2} = 15 \times \frac{0.356}{0.556} = 9.6\, rad/s$$

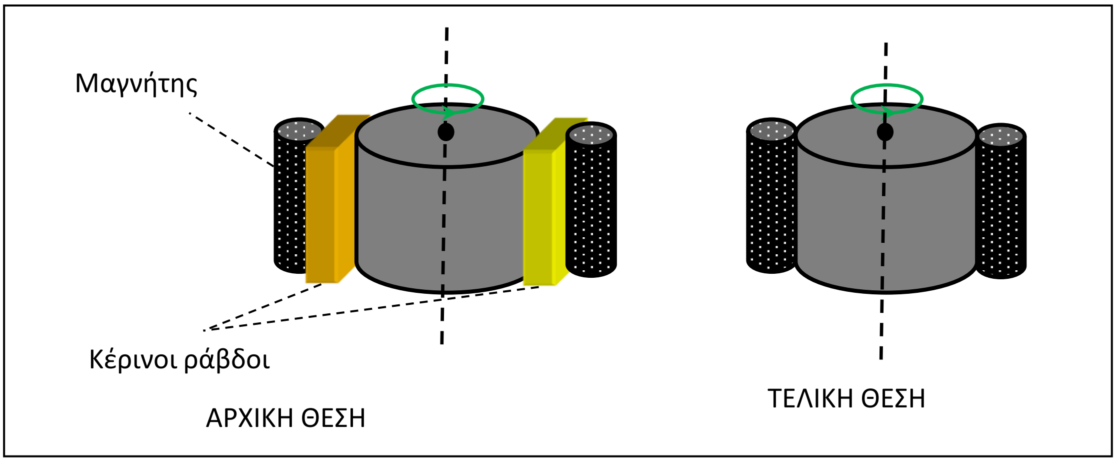
Βλέπουμε ότι επειδή η ροπή αδράνειας αυξάνεται, η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται.

Παράδειγμα 9.5

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, σημειακή μάζα m περιστρέφεται χωρίς τριβή επάνω σε οριζόντιο τραπέζι σε κυκλική τροχιά με αρχική ακτίνα R_1 και γωνιακή ταχύτητα ω_1 επειδή είναι προσδεμένη σε νήμα το οποίο είναι περασμένο από τρύπα Ο του τραπεζιού. Δύναμη F ασκείται στην άλλη άκρη του νήματος προς τα κάτω έτσι ώστε να μαζεύει πολύ αργά το νήμα και να ελαττώνει την διάμετρο της κυκλικής τροχιάς. Να βρεθεί η τελική γωνιακή ταχύτητα ω_2 όταν η τελική ακτίνα είναι ίση με R_2.



9.2 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, δυο μαγνήτες σε σχήμα λεπτού κυλίνδρου ακτίνας $r = 0.1\,m$ και μάζας $m = 1\,kg$ ο καθένας είναι προσκολλημένοι μαγνητικά επάνω σε ένα σιδερένιο συμπαγή κύλινδρο μεγαλύτερης μάζας $M = 2.5\,kg$ και ακτίνας $R = 0.4\,m$ και ίδιου μήκους, αντιδιαμετρικά μεταξύ τους με τη βοήθεια δυο κέρινων ράβδων πάχους $d = 0.1\,m$ η καθεμία ώστε να μην έρχονται σε πλήρη επαφή με τον μεγάλο κύλινδρο. Το όλο σύστημα περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα του μεγάλου κυλίνδρου με γωνιακή ταχύτητα $4\,rad/s$. Ξαφνικά κατά τη διάρκεια της ελεύθερης περιστροφής, εφαρμόζεται θέρμανση στο σύστημα και οι δυο κέρινοι ράβδοι λιώνουν αργά αλλά οι δυο μαγνήτες λόγω της έλξης τους στον σιδερένιο κύλινδρο, δεν χάνουν τις σχετικές τους θέσεις αλλά απλά πλησιάζουν και τελικά έρχονται σε πλήρη επαφή με αυτόν και πάλι αντιδιαμετρικά μεταξύ τους. Να βρεθεί η νέα γωνιακή ταχύτητα του όλου συστήματος εάν η μάζα των κέρινων ράβδων μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.



<u>Λύση</u>:

Εφόσον δεν υπάρχουν ροπές στο όλο σύστημα, η στροφορμή της διατηρείται

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$

όπου $\omega_0 = 4\,rad/s$ η αρχική γωνιακή ταχύτητα και ω_1 η τελική. Η αρχική ροπή αδράνειας I_0 εμπεριέχει τρεις όρους, τους μαγνήτες, τις κέρινες ράβδους και τον σιδερένιο κύλινδρο. Επειδή η μάζα των κέρινων ράβδων είναι αμελητέα, στην ουσία υπάρχουν μόνο δυο όροι. Από αυτούς, μόνο ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από το Κ.Μ. του και άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Steiner για τους μαγνήτες:

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}mr^2 + mx^2\right)$$

όπου $x = R + d + r = 0.40 + 0.1 + 0.1 = 0.6\,m$ η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Έτσι

$$I_0 = \frac{1}{2}2.5 \times 0.4^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}1 \times 0.1^2 + 1 \times 0.6^2\right) = 0.93\,kg\,m^2$$

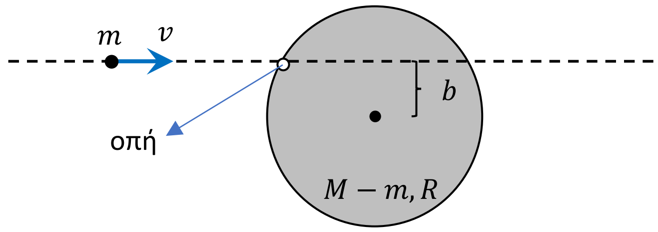
Όταν λιώσουν οι κέρινοι ράβδοι, οι δυο μαγνήτες έρχονται σε μικρότερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής $x = R + d + r = 0.40 + 0 + 0.1 = 0.5\,m$ και έτσι

$$I_1 = \frac{1}{2}2.5 \times 0.4^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}1 \times 0.1^2 + 1 \times 0.5^2\right) = 0.71\, kg\, m^2$$

Επομένως

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = \frac{0.93}{0.71}4 = 5.24\, rad/s$$

9.4 Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μικρή σημειακή μάζα $m = 2\ g$ αποκολλάται από την περιφέρεια κυκλικού δίσκου αμελητέου πάχους, αρχικής μάζας $M = 2.0\ kg$ και ακτίνας $R = 1.4\ m$, ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μικρή οπή. Ακολούθως, η σημειακή μάζα εκτοξεύεται με σταθερή ταχύτητα $v = 16\ m/s$ με ευθύγραμμη τροχιά η οποία βρίσκεται στο επίπεδο της σελίδας με κατεύθυνση προς την οπή, με την προέκταση της τροχιάς της να απέχει απόσταση $b = 0.75\ m$ από το κέντρο του δίσκου. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος αλλά μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από σταθερό άξονα ο οποίος περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στη σελίδα. Η σημειακή μάζα σφηνώνεται στην οπή του δίσκου έτσι ώστε να συμπληρώνει πλήρως το αρχικό σχήμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας και τον αναγκάζει να περιστραφεί. Αμέσως μετά την προσκόλληση, να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου. <u>Σημείωση</u>: Στο πρόβλημα δεν υπάρχει βαρύτητα και οι ροπές της πλαστικής κρούσης είναι εσωτερικές για το σύστημα δίσκου – σημειακής μάζας.



<u>Λύση</u>:

Αρχική στροφορμή

$$L_1 = mvb$$

Τελική στροφορμή

$$L_2 = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

Διατήρηση στροφορμής

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 = mvb => \omega_0 = \frac{2mvb}{MR^2}$$