



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 11: Ταλαντώσεις

Κουζούδης Δημήτρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή και ερμηνεία των ταλαντώσεων
- Διαφορική εξίσωση κι η λύση της στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή
- Αρχή διατήρησης της ενέργειας τον απλό αρμονικό ταλαντωτή
- Περιγραφή και μαθηματική ερμηνεία των φαινομένων της απόσβεσης, των μικρών ταλαντώσεων και του διακροτήματος
- Κατανόηση μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα



Περιεχόμενα ενότητας

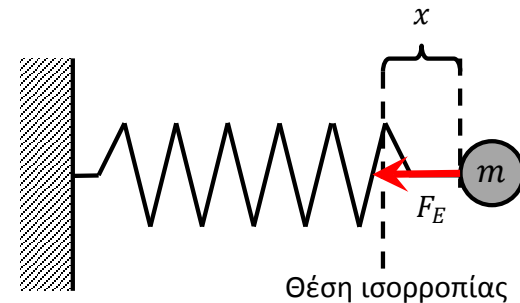
- Ταλαντώσεις
- Απλός αρμονικός ταλαντωτής
- Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή
 - Παράδειγμα
- Απόσβεση
 - Παράδειγμα
- Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις –Συντονισμός
- Μικρές ταλαντώσεις και Διακρότημα
 - Παραδείγματα



Ταλαντώσεις

Ταλαντώσεις

- Περιοδικά φαινόμενα
- Σε μια διάσταση
- Απλός αρμονικός ταλαντωτής
 - Ελατήριο σταθεράς k
 - Σημειακή μάζα, m
 - Δύναμη επαναφοράς
- Διαφορική εξίσωση ταλαντωτή



$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$



Απλός αρμονικός ταλαντωτής

- Πλάτος ταλάντωσης, A
 - Φάση ταλάντωσης, ϕ
 - Απομάκρυνση
- λύση διαφορικής εξ. Ταλαντωτή

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- Κυκλική συχνότητα, ω

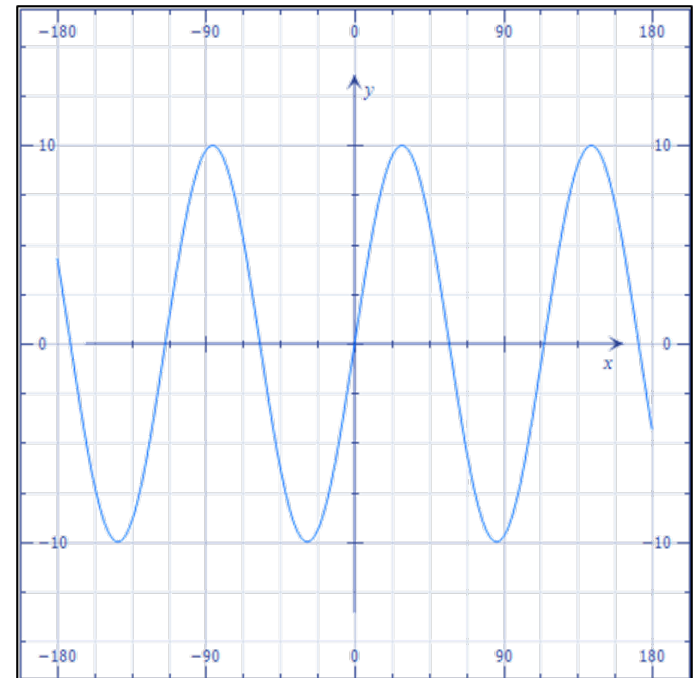
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = 2\pi f$$

- Περίοδος ταλάντωσης, T

$$T = 1/f$$

- Ταχύτητα

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$



Ενέργεια αρμονικού ταλαντωτή

- Δυναμική (συντηρητική δύναμη ελατηρίου)

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

- Κινητική

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- Ολική

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

– Σε $t=0$, $\varphi=0$, $v=0$ και $x=A$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

→

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$



Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί η ταχύτητα v ενός αρμονικού ταλαντωτή μάζας 0.1 kg και σταθεράς ελατηρίου 2 N/m όταν η απομάκρυνσή του ισούται με $x=0.2 \text{ m}$, εάν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0)=0.5 \text{ m}$ και $v(0)=0$.

$$A = 0.5 \text{ m}, \varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.1}} = 4.47 \text{ rad/s}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) \Rightarrow 0.2 = 0.5 \cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = 0.4$$

$$\omega t = \cos^{-1} 0.4 = \pm 1.1593 + 2n\pi$$

$$\omega t = \pm 1.1593$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t) = -4.47 \times 0.5 \sin(\pm 1.1593) = \pm 2.05 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 0.1 \times v^2 + \frac{1}{2} 2 \times 0.2^2 = \frac{1}{2} 2 \times 0.5^2 \Rightarrow v = \pm 2.05 \text{ m/s}$$



Απόσβεση

- Κίνηση μεταξύ $\pm A$
- Μη ιδανική – τριβές
- Μείωση πλάτους με το χρόνο
- Διαφορική εξίσωση απόσβεσης

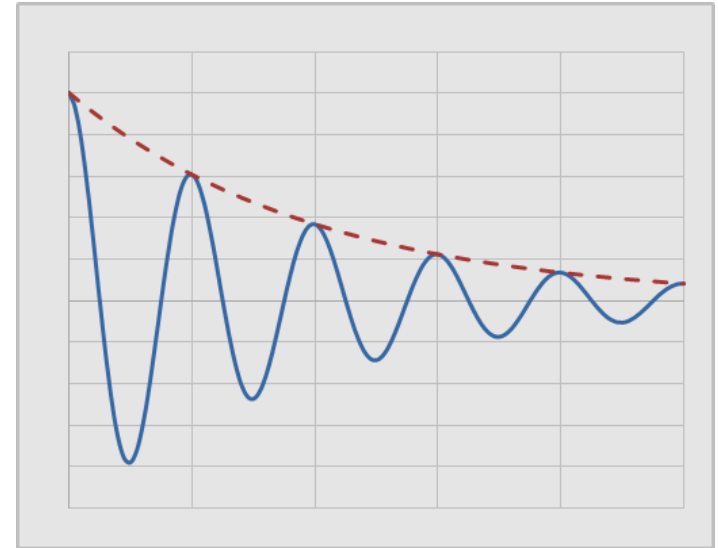
$$mx''(t) = -kx(t) - bx'(t)$$

- Λύση διαφορικής – απομάκρυνση

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

- Σταθερά απόσβεσης, $b=2m\beta$
- Περιβάλλουσα, $Ae^{-\beta t}$
- Κυκλική συχνότητα (ω_0 : ιδιοσυχνότητα)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Παράδειγμα 2

Ένας φοιτητής μελετάει έναν ταλαντωτή μάζας 0.25 kg και παρατηρεί ότι κατά την διάρκεια μιας περιόδου διάρκειας 0.4 s το πλάτος μειώνεται κατά 10%. Να βρεθεί η σταθερά απόσβεσης β καθώς και η σταθερά ελατηρίου k .

πλάτος σε χρόνο t : $Ae^{-\beta t}$

μετά από 1 περίοδο: $Ae^{-\beta(t+T)}$

$$10\% = \frac{Ae^{-\beta(t+T)}}{Ae^{-\beta t}} \Rightarrow 0.1 = \frac{e^{-\beta t} e^{-\beta T}}{e^{-\beta t}} \Rightarrow e^{-\beta T} = 0.1$$

$$T = 0.4 \text{ s}$$

$$-0.4\beta = \ln(0.1) \Rightarrow \beta = 5.76 \text{ s}^{-1}$$

$$k = m(\omega^2 + \beta^2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = 0.25(15.7^2 + 5.76^2) = 69.9 \text{ N/m}$$



Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις – Συντονισμός

- Εξωτερική περιοδική διέγερση, $F(t) = F_0 \cos \omega_F t$
 - Διαφορετική ή ίση κυκλική συχνότητα
 - Αποσβεννύουσα ή όχι

- Διαφορική εξίσωση με εξαναγκασμό

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + b\dot{x}(t) = F_0 \cos \omega_F t$$

- Λύση χωρίς τον μεταβατικό όρο

$$x(t) \approx A_F \cos(\omega_F t + \varphi)$$

- Φάση και πλάτος στον εξαναγκασμό

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{b\omega_F}{m(\omega_0^2 - \omega_F^2)} \quad A_F = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (b\omega_F)^2}}$$

- Μέγιστο πλάτος για $\omega = \omega_0 \rightarrow$ Συντονισμός

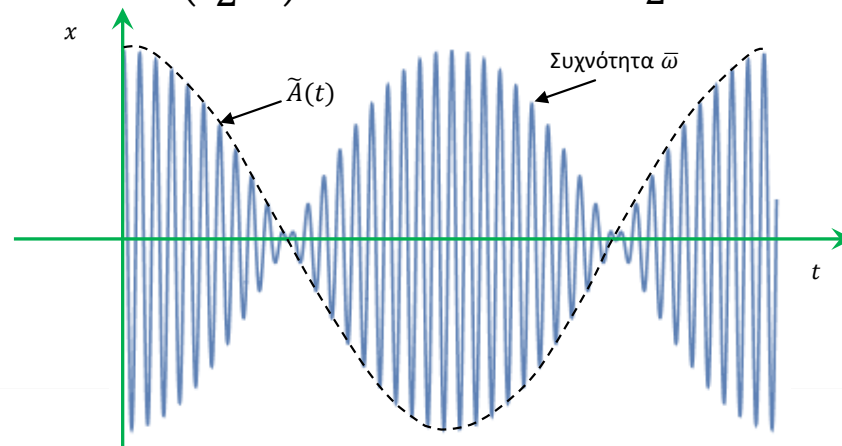


Μικρές ταλαντώσεις και Διακρότημα

- Σύστημα σε περιοδικότητα μικρής κλίμακας
 - Προσέγγιση με αρμονικό ταλαντωτή
 - Κυκλική συχνότητα: $x'' = -\omega^2 x$
- Μικρή διαφορά συχνότητας \rightarrow διακρότημα
 - Νέα μικρότερη συχνότητα αυξομοιούμενης έντασης

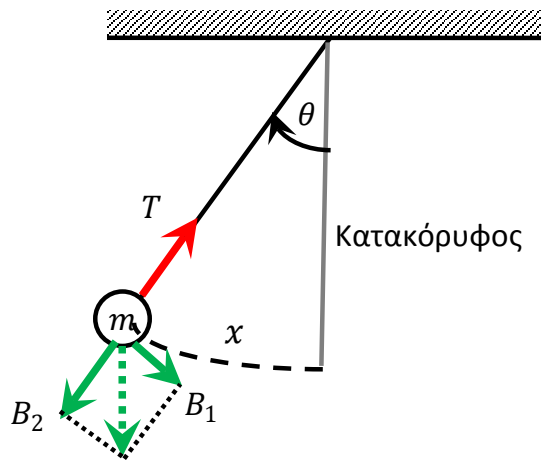
$$x = \tilde{A}(t) \cos(\bar{\omega}t)$$

– Όπου $\tilde{A}(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ και $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$



Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η περίοδος ταλάντωσης ενός εκκρεμούς το οποίο αποτελείται από μια μάζα m προσδεμένη στο ένα άκρο ιδανικού νήματος μήκους L το οποίο είναι αναρτημένο σε οροφή εάν το νήμα εκτρέπεται αρχικά κατά μια μικρή γωνία θ_A και ακολούθως αφήνεται ελεύθερο.



Οροφή

$$B_1 = mg \sin \theta$$

$$mx'' = -mg \sin \theta$$

$$x = L\theta$$

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\theta'' \approx -\frac{g}{L} \theta$$

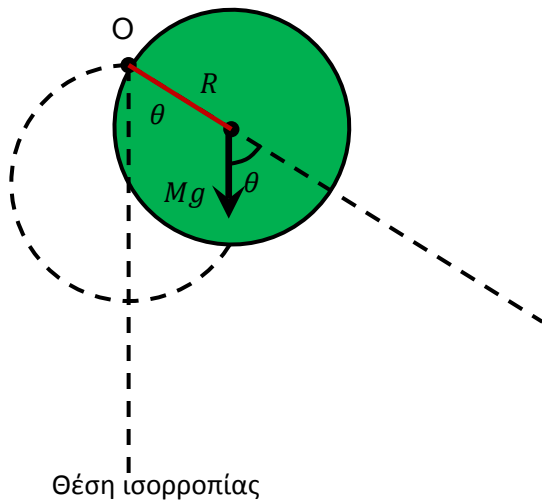
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Παράδειγμα 4

Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός δίσκος μάζας M και ακτίνας R αναρτάται με τη βοήθεια καρφιού στο σημείο O της περιφέρειάς του από κατακόρυφο τοίχο. Εάν ο δίσκος μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές γύρω από το καρφί, να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης λόγω βαρύτητας εάν ο δίσκος εκτρέπεται αρχικά κατά μια μικρή γωνία θ_A από τη θέση ισορροπίας του και ακολούθως αφήνεται ελεύθερος.



$$\tau = -MgR\sin\theta$$

$$I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = I_{KM} + Md^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{-2MRg}{3MR^2}\sin\theta$$

$$\theta'' = -\frac{2g}{3R}\sin\theta$$

$$\theta'' \approx -\frac{2g}{3R}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.