Φυσική Ι

Ενότητα 8 : Περιστροφική κίνηση

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή και ερμηνεία της περιστροφής στερεού και των σχετιζόμενων μεγεθών
- Ορισμός και περιγραφή της ροπής δύναμης και της ροπής αδράνειας σε στερεό σώμα
- Κατανόηση μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα
- Τροποποίηση του $2^{ου}$ Ν. Νεύτωνα και άλλων μεγεθών για την περιστροφή στερεού

Περιεχόμενα ενότητας

- Εισαγωγή στην περιστροφική κίνηση
- Ροπή δύναμης
  - Παραδείγματα
- Ροπή αδρανείας
- Θεώρημα Steiner
- $2^{ος}$ Ν. Νεύτωνα στην περιστροφή
- Κινητική ενέργεια, έργο και ισχύς στην περιστροφική κίνηση

Περιστροφική κίνηση

Στερεό σώμα

Περιστροφική κίνηση

- Περιστροφή στερεού σώματος με μάζα και όγκο
  - Κυκλική κίνηση άπειρων σημείων
- Γωνιακή ταχύτητα

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

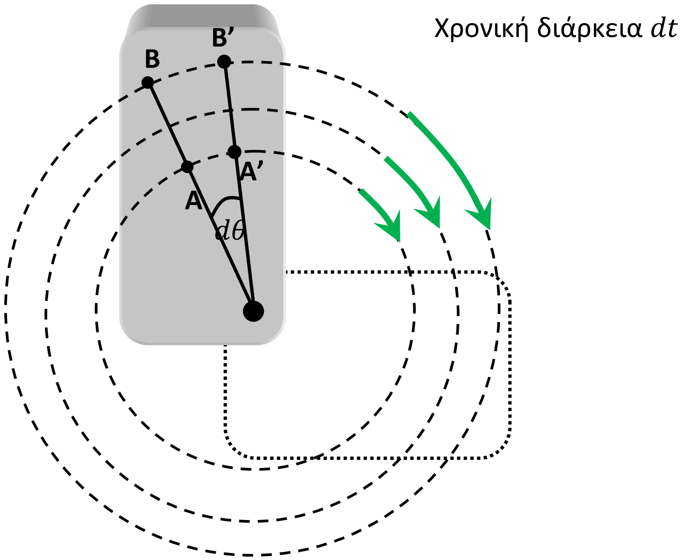
- Γωνιακή επιτάχυνση

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

- Γραμμική ταχύτητα

$$\boxed{v(r) = \omega r}$$

- Ομαλή και ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφή



Ροπή δύναμης

- Αλλαγή κατεύθυνσης – κάθετη δύναμη
- Σημείο εφαρμογής – βραχίονας δύναμης

$$\boxed{\tau = \pm rF}$$

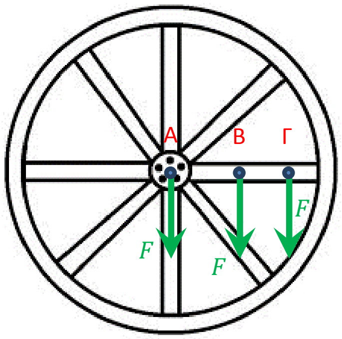
- F: κάθετη του r
- Θετική: φορά του ρολογιού
- Αρνητική: αντίθετα από φορά του ρολογιού
- Οποιαδήποτε γωνία:

$$\boxed{\tau = \pm rFsin\theta}$$

Παραδείγματα

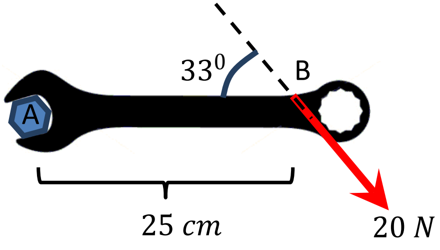
1. Στο ακόλουθο σχήμα η ίδια δύναμη F = 12 N εφαρμόζεται σε τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ ενός τροχού. Υπολογίστε όλους τους βραχίονες και τις ροπές για τα τρία σημεία, δεδομένων των αποστάσεων ΑΒ = 5, ΒΓ = 4 εκατοστά

- $r_Γ=AB+BΓ=5+4=9\ cm=0.09\ m,\ \tau_Γ=-r_Γ F=-0.09\times 12=-1.08\ N\cdot m$
- $r_B=5cm=0.05\ m,\ \tau_B=-r_B F=-0.05\times 12=-0.60\ N\cdot m$
- $r_A=0,\ \tau_A=0$

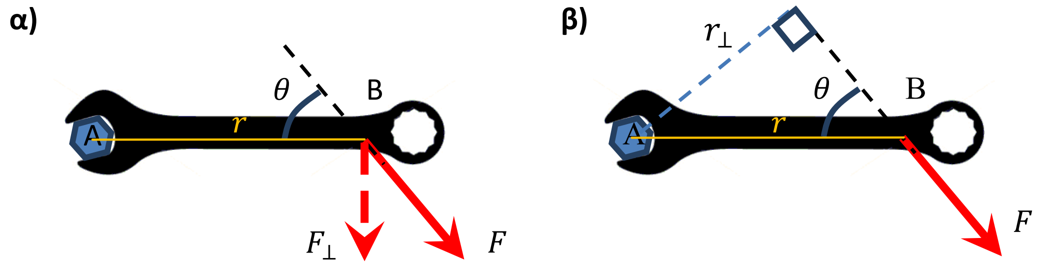


2. Στο ακόλουθο σχήμα μια δύναμη F = 20 N εφαρμόζεται στο σημείο Β ενός γαλλικού κλειδιού όπως δείχνεται, έτσι ώστε να βιδωθεί το μπουλόνι Α. Να υπολογισθεί η ροπή της δύναμης.

- $\tau=-rFsin\theta$
- $r=25\ cm=0.25\ m,\ F=20\ N\ και\ \theta=33^0$
- $\tau=-0.25\times 20\times sin33^o=-2.72\ N\cdot m$



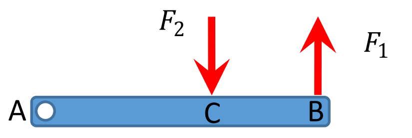
Εναλλακτικοί ορισμοί ροπής



- Κάθετη συνιστώσα δύναμης
  - $\tau = \pm r\, F_{\perp}$
- Κάθετη απόσταση από σημείο περιστροφής
  - $\tau = \pm r_{\perp} F$
- Συνιστάμενη ροπή
  - Αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών
- Ισορροπία
  - Συνιστάμενη Δύναμη = 0, $\Sigma \vec{F} = 0$
  - Συνιστάμενη Ροπή = 0, $\Sigma \tau = 0$

Παραδείγματα

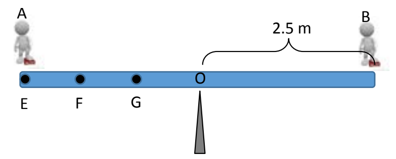
3. Στο παρακάτω σχήμα υπολογίστε την συνιστάμενη ροπή που δρα στην πόρτα γύρω από τον μεντεσέ A δεδομένων των αποστάσεων AC=20 cm, AB=30 cm και τις δυνάμεις F_1=12 N και F_2=10 N



ΚΑΤΟΨΗ πόρτας

- $\tau_1 = r_1 F_1 = 0.30 \times 12 = 3.6\ N \cdot m$, $\tau_2 = -r_2 F_2 = -0.20 \times 10 = -2.0\ N \cdot m$
- $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 3.6 - 2.0 = 1.6\ N \cdot m$

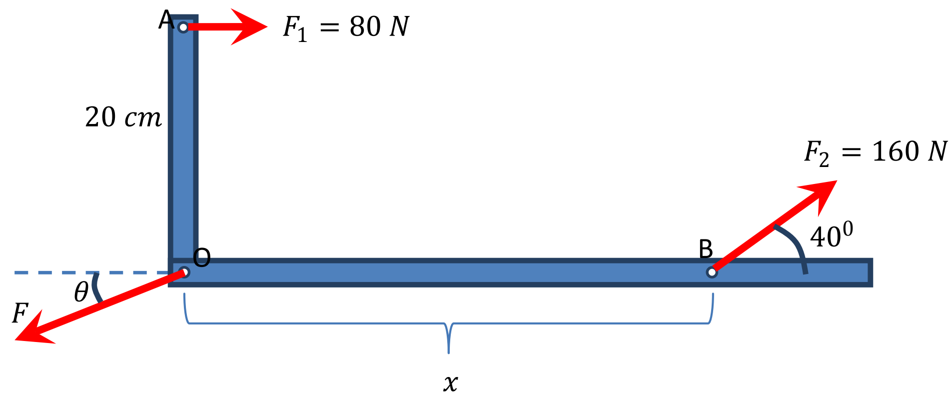
4. Στο παρακάτω σχήμα, τα δυο αγόρια A 50 kg and B 40 kg βρίσκονται επάνω σε αβαρή δοκό. Υπολογίστε την συνιστάμενη ροπή γύρω από το O για τις τρεις θέσεις E,F and G του αγοριού A όπως δείχνεται. Δίνονται οι αποστάσεις EO=2.5m, FO=2.0 m και GO=1.5 m.Προβλέψετε το είδος της κίνησης σε κάθε περίπτωση.



- $F_A = 50 \times 10 = 500\ N$, $F_B = 40 \times 10 = 400\ N$
- E: $\tau_A = r_A F_A = 2.5 \times 500 = 1250\ N \cdot m$, $\tau_B = -r_B F_B = -2.5 \times 400 = -1000\ N \cdot m$, $\tau = \tau_A + \tau_B = 1250 - 1000 = 250\ N \cdot m$
- F: $\tau_A = r_A F_A = 2.0 \times 500 = 1000\ N \cdot m$, $\tau_B = -r_B F_B = -2.5 \times 400 = -1000\ N \cdot m$, $\tau = \tau_A + \tau_B = 1000 - 1000 = 0\ N \cdot m$
- G: $\tau_A = r_A F\_A = 1.5 \times 500 = 750\ N \cdot m$,$\tau\_B = -r_B F_B = -2.5 \times 400 = -1000\ N \cdot m$,$\tau = \tau_A + \tau_B = 750 - 1000 = -250\ N \cdot m$

Παράδειγμα 5

Στο παρακάτω σχήμα στο μηχανικό στέλεχος σχήματος "Γ" δρούνε τρεις δυνάμεις έτσι ώστε αυτό να βρίσκεται σε ισορροπία. Να βρεθούν α) Η δύναμη F και η γωνία της θ και β) η θέση x της δύναμης F_2.



$\Sigma F_x=0 \rightarrow -F_x+80+122=0 \rightarrow F_x=202\ N$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow -F_y+0+103=0 \rightarrow F_y=103\ N$

$\tan\theta=F_x/F_y=103/202 \rightarrow \theta=27^0$

$F\cos 27^0=202 \rightarrow F=227\ N$

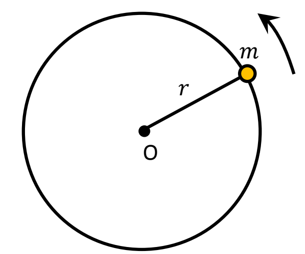
$\tau_1=-r_1\ F_{1x}=-0.20\times 80=-16\ N\cdot m$

$\tau_2=r_2\ F_{2y}=103x$

Για να έχουμε $\Sigma\tau=0 \rightarrow \tau_1+\tau_2=0 \Rightarrow 103x-16=0 \rightarrow x=0.155m=15.5\ cm$

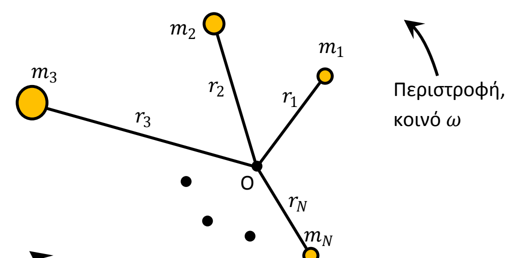
Ροπή αδρανείας

- Αδράνεια: η τάση για αντίσταση στην μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος
- Το άθροισμα στοιχειωδών μαζών επί το τετράγωνο της απόστασης από άξονα περιστροφής
- Υλικό σημείο



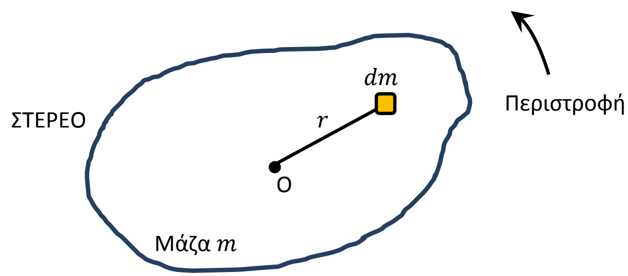
$$I = mr^2$$

- Σύνολο υλικών σημείων



$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

- Στερεό σώμα



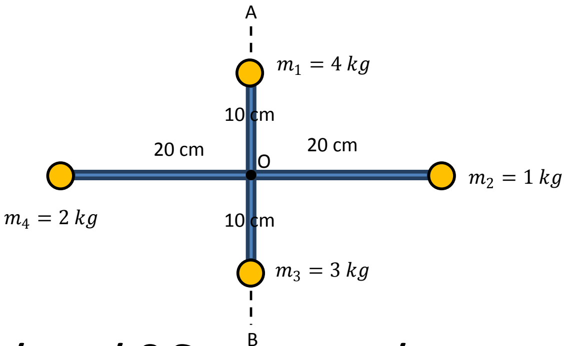
$$I = \int r^2 dm$$

Παραδείγματα

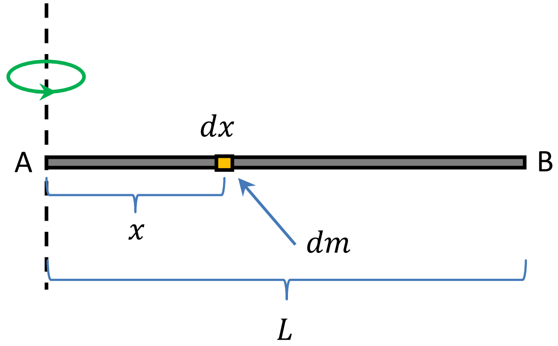
6. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του παρακάτω συστήματος των τεσσάρων μαζών οι οποίες είναι προσδεμένες επάνω σε αβαρές πλαίσιο σχήματος σταυρού εάν περιστρέφονται α) γύρω από άξονα ο οποίος είναι κάθετος στην σελίδα στο σημείο Ο και β) γύρω από τον άξονα ΑΒ.

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2 = 4 \times 0.1^2 + 1 \times 0.2^2 + 3 \times 0.1^2 + 2 \times 0.2^2 = 0.19\ kg \cdot m^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2 = 4 \times 0^2 + 1 \times 0.2^2 + 3 \times 0^2 + 2 \times 0.2^2 = 0.12\ kg \cdot m^2$$



7. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας της παρακάτω λεπτής ράβδου AB μήκους L, μάζας m και αμελητέας διατομής εάν περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος περνάει από το ένα άκρο της A όπως φαίνεται και στο σχήμα.



$$I = \int_{x=0}^{L} x^2 dm$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{m}{L}$$

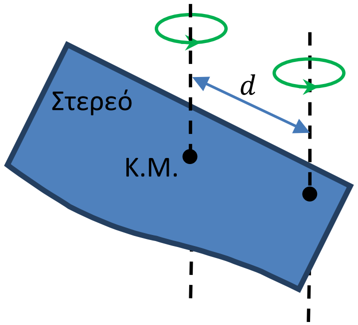
$$I = \int_{x=0}^{L} x^2 dx \frac{dm}{dx}$$

$$I = \frac{m}{L} \int_{x=0}^{L} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{L} = \frac{mL^2}{3}$$

Θεώρημα Steiner

- Για συμμετρικά σώματα υπάρχουν έτοιμοι τύποι και πίνακες
- Για τυχαία σχήματα (Θ. Steiner)
  – Εάν είναι γνωστή η ροπή αδρανείας από το κέντρο μάζας στερεού μάζας *m*, σε τυχαίο παράλληλο άξονα σε απόσταση *d* η ροπή αδρανείας είναι:

$$\boxed{I = I_{KM} + md^2}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER

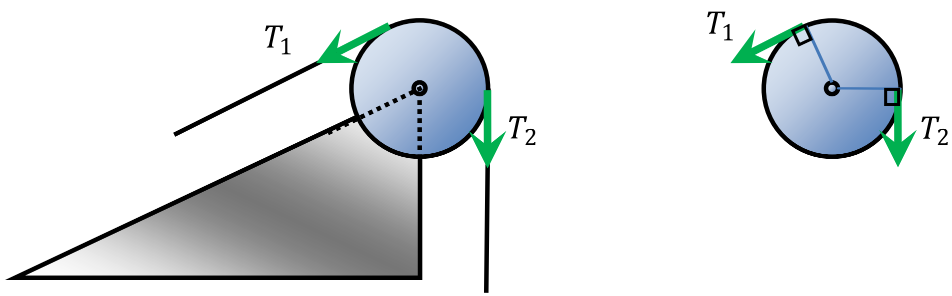
2ος Ν. Νεύτωνα στην περιστροφή

- Αντί για δύναμη → ροπή
- Αντί για μάζα → ροπή αδρανείας
- Αντί για γραμμική επιτάχυνση → γωνιακή

$$\boxed{\Sigma\tau = I\alpha}$$

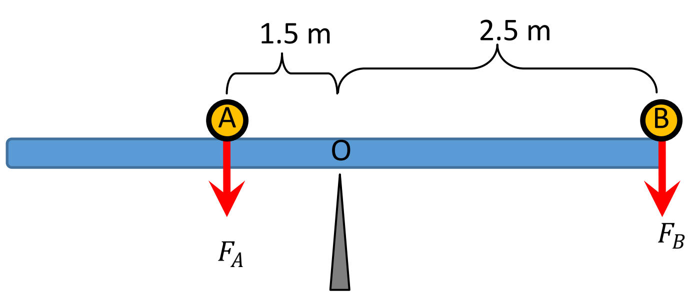
Παραδείγματα

8. Στο κεφάλαιο " ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ " είχαμε θεωρήσει τις τροχαλίες ως αβαρείς για ευκολία. Εδώ θα άρουμε αυτόν τον περιορισμό. Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει =25 N, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.



- $\tau_1=T_1\ R=35\times0.30=10.5\ N\cdot m$
- $\tau_2=-T_2\ R=-25\times0.30=-7.5\ N\cdot m$
- $\Sigma\tau=\tau_1+\tau_2=10.5-7.5=3.0\ N\cdot m$
- $I=1/2\ MR\text{^}2=1/2\ 2\times0.30^2=0.09\ kg\cdot m^2$
- $\Sigma\tau=I\alpha\rightarrow\alpha=\Sigma\tau/I=3.0/0.09=33.3\ rad/s^2$

9. Στο παρακάτω σχήμα οι δυο σημειακές $m_A=50$ kg και $m_B=40$ kg είναι αναρτημένες επάνω στη αβαρή δοκό και το όλο σύστημα δεν ισορροπεί περιστροφικά γύρω από το Ο. Όταν η δοκός είναι ακόμα οριζόντια να βρεθούν οι εξής αρχικές ποσότητες: α) η γωνιακή επιτάχυνση του όλου συστήματος και β) οι γραμμικές επιταχύνσεις των σημειακών μαζών.



$\tau_A=r_A\ F_A=1.5\times500=750\ N\cdot m$, $\tau_B=-r_B\ F_B=-2.5\times400=-1000\ N\cdot m$

$\Sigma_\tau=\tau_A+\tau_B=750-1000=-250\ N\cdot m$

$I=m_A\ r_A{}^2+m_B\ r_B{}^2=50\times1.5^2+40\times2.52=362.5\ kg\cdot m^2$

$\Sigma\tau=I\alpha\rightarrow\alpha=\Sigma\tau/I=(-250)/(362.5\ )=-0.690\ rad/s^2$

$R_A=1.5$ m , $R_B=2.5$ m, $a_A=R_A\ \alpha=-1.5\times0.69=-1.035\ m/s^2$,

$a_B=R_B\ \alpha=-2.5\times0.69=-1.725\ m/s^2$

Κινητική ενέργεια, έργο και ισχύς στην περιστροφική κίνηση

- Κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Έργο

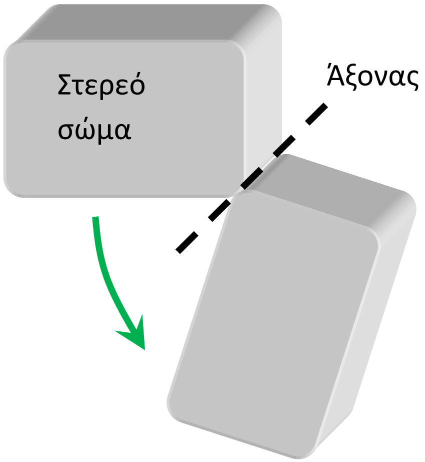
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

- Ισχύς

$$P = \tau \omega$$

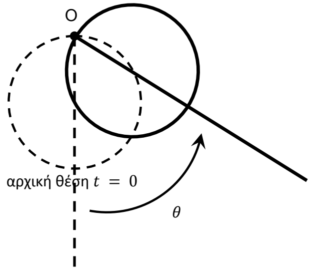
- Θεώρημα έργου – ενέργειας

$$W = K_B - K_A$$



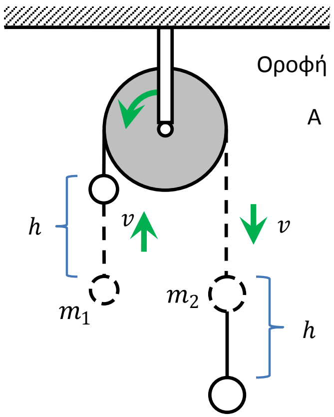
Παραδείγματα

10. Στο παρακάτω σχήμα ο λεπτός δακτύλιος μάζας M και ακτίνας R βρίσκεται επάνω σε δάπεδο και μπορεί και περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές γύρω από το σταθερό σημείο O. Τη χρονική στιγμή t = 0 και ενώ ο δακτύλιος ηρεμεί, εφαρμόζεται μια σταθερή ροπή τ γύρω από το O. Να δοθεί μια έκφραση για τη γωνία θ σε κάθε χρονική στιγμή t > 0.



- $I_{KM}=MR^2$, $I=I_{KM}+Md^2=2\ MR^2$
- $\tau=I\alpha \rightarrow \alpha=\tau/I=\tau/(2\ MR^2\ )$
- $\Delta\theta=\omega_0\ t+1/2\ \alpha t^2$, $\Delta\theta=1/2\ \alpha t^2=\tau/(4\ MR^2\ )\ t^2$

11. Σε τροχαλία μάζας M και ακτίνας R αναρτούνται δυο μάζες m1 και m2 μέσω ιδανικού νήματος. Αρχικά η τροχαλία κρατιέται ακίνητη μέσω ενός μηχανισμού πέδησης. Κατόπι αφήνεται ελεύθερη και επειδή m2>m1,η m2 κατέρχεται κατά ύψος h. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα v της m2.



- $K_A=0$, $K_B=1/2\ m_1\ v^2+1/2\ m_2\ v^2+1/2\ I\omega^2$
- $I=1/2MR^2$
- $K_B=1/2\ m_1\ v^2+1/2\ m_2\ v^2+1/4\ Mv^2$
- $U_B=m_1\ gh-m_2\ gh, U_A=0$
- $K_A+U_A=K_B+U_B \rightarrow (2m_1+2m_2+M)\ v^2=4(m_2-m_1\ )gh$
- $v=2(gh\ ((m_2-m_1\ ))/(2(m_1+m_2\ )+M))^{1/2}$

Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα*, Κλειδάριθμος, Αθήνα
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική*, Gutenberg, Αθήνα
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική* , $8^{η}$ έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική,* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science*, McGraw - Hill Book Company, New York

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/

Σημείωμα Αδειοδότησης