



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 7: Κυκλική κίνηση

Κουζούδης Δημήτρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγή στην κυκλική κίνηση
- Παρουσίαση και επεξήγηση γωνιακών μεγεθών
 - ακτίνα, ταχύτητα, επιτάχυνση
- Ορισμός και παραδείγματα ομαλής κυκλικής κίνησης
- Ορισμός και παραδείγματα ομαλά επιταχυνόμενης κυκλικής κίνησης
- Εξοικείωση με τις έννοιες της κεντρομόλου δύναμης και επιτάχυνσης



Περιεχόμενα ενότητας

- Κυκλική κίνηση
 - Ακτίνια – μοίρες
- Γωνιακή ταχύτητα
- Γωνιακή επιτάχυνση
- Ομαλή κυκλική κίνηση
 - Παραδείγματα
- Κεντρομόλος δύναμη
- Κεντρομόλος επιτάχυνση
- Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση
 - Παραδείγματα
- Μοναδιαία διανύσματα στη κυκλική κίνηση

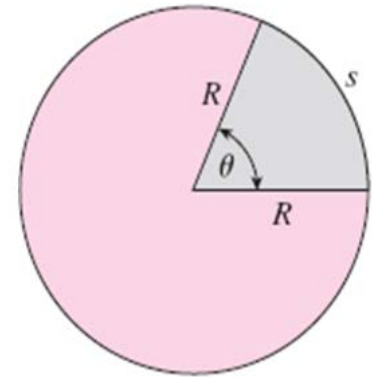


Κυκλική κίνηση

Υλικό σημείο

Κυκλική κίνηση

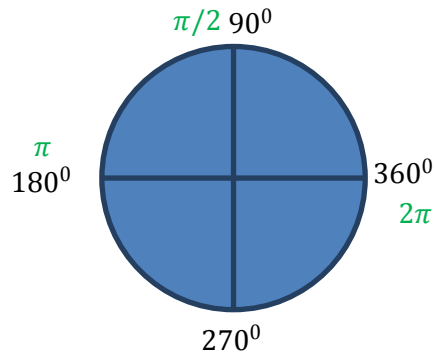
- Κίνηση σε κύκλο
 - Ομαλή
 - Επιταχυνόμενη
- Ακτίνια (rad) αντί για μοίρες ($^{\circ}$)
- Σχέση τόξου – ακτίνας
 - Σύνδεση γραμμικών – γωνιακών μεγεθών



$$x = R\theta$$



Ακτίνια ↔ μοίρες



$$\theta^0 = \frac{180}{\pi} \theta_{rad}$$
$$\theta_{rad} = \frac{\pi}{180} \theta^0$$

- **Παράδειγμα 1:** Σε κύκλο ακτίνας 2.5 m ένα τόξο έχει μήκος 0.1 m. Ποια είναι η αντίστοιχη γωνία σε ακτίνια και σε μοίρες;

$$\theta_{rad} = \frac{x}{R} = \frac{0.1}{2.5} = 0.04 \text{ rad}$$

$$\theta^0 = \frac{180}{\pi} \theta_{rad} = \frac{180}{3.14} 0.04 = 2.29^0$$

- **Παράδειγμα 2:** Σε κύκλο ακτίνας 2.5 cm ποια είναι η γωνία σε ακτίνια ενός τόξου με μήκος ίσο με το 1/10 της περιφέρειας του κύκλου;

$$x = \frac{1}{10} 2\pi R = 1.57 \text{ cm}$$

$$\theta = x/R = 1.57/2.5 = 0.628 \text{ rad}$$



Γωνιακή ταχύτητα

- Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα (rad/s)

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Το $\omega > 0$ όταν η περιστροφή είναι αντίθετη από τη φορά του ρολογιού
- Το $\omega < 0$ όταν η περιστροφή είναι σύμφωνη με τη φορά του ρολογιού



Γωνιακή επιτάχυνση

- Στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση (rad/s^2)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

- Ομαλή κυκλική κίνηση: $\alpha=0$
 - $\omega = \text{σταθερό}$
- Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση: $\alpha = \text{σταθερό}$



Ομαλή κυκλική κίνηση

- Γραμμική αύξηση γωνίας με το χρόνο

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Περίοδος, T : ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής, $\Delta\theta = \pm 2\pi$
- Συχνότητα, f : επαναλήψεις στη μονάδα του χρόνου

$$f = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$$

– Μονάδα : Hertz, Hz = 1/s ή *rpm* (rounds per minute), 1Hz = 60rpm

- Γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \pm \frac{2\pi}{T} = \pm 2\pi f$$

- Γραμμική ταχύτητα στην κυκλική κίνηση

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm \frac{2\pi R}{T} = \pm 2\pi R f = \omega R$$



Παραδείγματα

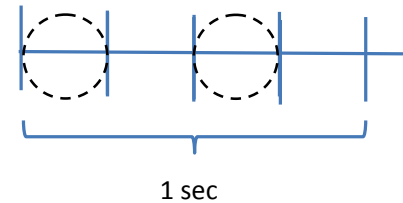
3. Βρείτε την περίοδο και την συχνότητα των δυο μακρύτερων δεικτών ενός ρολογιού τοίχου.

– Λεπτός: $T=60 \text{ s}$, $f=1/T=1/60=0.0167 \text{ Hz}$

– Μεσαίος: $T=60 \times 60=3600 \text{ s}$, $f=1/T=1/3600=2.78 \times 10^{-4} \text{ Hz}$

4. Ένας δίσκος περιστρέφεται 4 φορές το δευτερόλεπτο. Να βρεθεί η περίοδος περιστροφής και η συχνότητα.

– $T=1/4 \text{ s}$, $f=1/T=4 \text{ Hz}$



5. Ένα υλικό σημείο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας 1.5 m έτσι ώστε να συμπληρώνει 5 περιστροφές κάθε 10 s . Βρείτε την περίοδο, την συχνότητα, την γωνιακή και τη γραμμική ταχύτητα του κινητού.

– $n=5$, $t=10 \text{ s}$ και $R=1.5 \text{ m} \rightarrow f=n/t=0.5 \text{ Hz}$

– $T=1/f=2 \text{ s}$

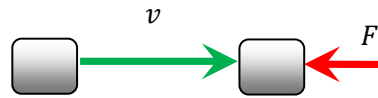
– $\omega=2\pi/T=2\pi/2=\pi=3.14 \text{ rad/s}$

– $v=2\pi R/T=4.71 \text{ m/s}$

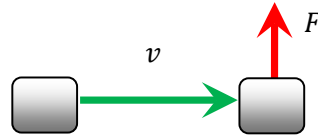


Κεντρομόλος δύναμη

- Εφαρμογή δύναμης \rightarrow αντίστοιχη επιτάχυνση με ίδια κατεύθυνση
- Αλλαγή κατεύθυνσης \rightarrow εφαρμογή δύναμης κάθετα στην κίνηση

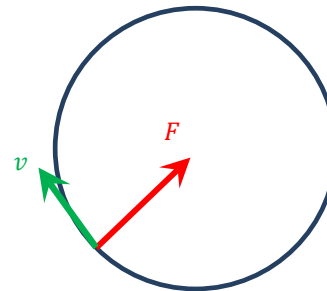
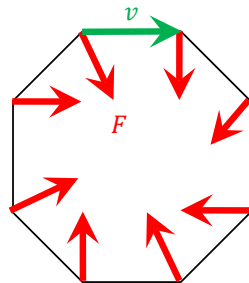


Δύναμη προς $-x$: επιβράδυνση



Δύναμη προς $+y$: στρίψιμο

- Κεντρομόλος δύναμη: Στην κυκλική κίνηση \rightarrow εφαρμογή δύναμης κάθετα στην ταχύτητα με κατεύθυνση προς το κέντρο κύκλου



Κεντρομόλος επιτάχυνση

- Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

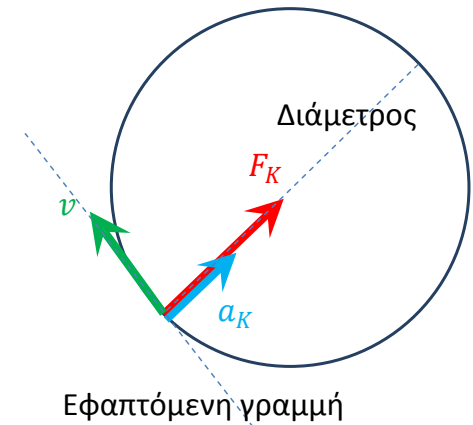
$$a_K = \omega^2 R$$

- Σύνδεση με γραμμικά μεγέθη

$$a_K = v^2 / R$$

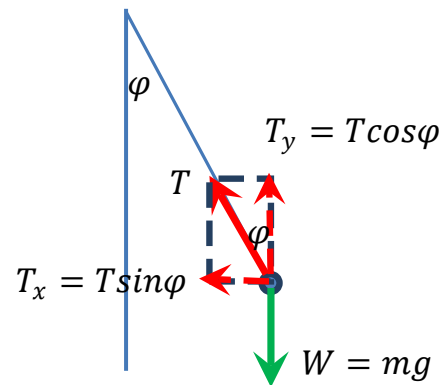
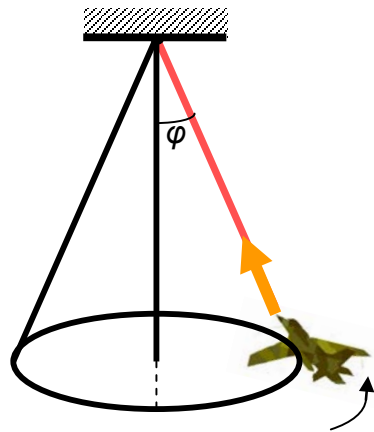
- Από 2^ο Ν. Νεύτωνα → κεντρομόλος δύναμη

$$F_K = ma_K = m\omega^2 R = \frac{mv^2}{R}$$



Παράδειγμα 6

Αεροπλανάκι σε νήμα εκτελεί κυκλική κίνηση. Το νήμα με την περιστροφή αυτή σχηματίζει ένα κώνο γωνίας ϕ . Εάν ο κύκλος έχει ακτίνα 30 cm, ποια είναι η γωνία ϕ εάν η γραμμική ταχύτητα του παιχνιδιού είναι 12 m/s?



- $R=30 \text{ cm}=0.3 \text{ m}$ και $v=12 \text{ m/s}$
- $\Sigma F_x=0 \rightarrow T \cos \phi = mg$
- $\Sigma F_y=0 \rightarrow T \sin \phi = F_K \rightarrow T \sin \phi = (mv^2)/R$
- $\tan \phi = v^2 / (gR) = 12^2 / (9.8 \times 0.3) = 49.0 \rightarrow \theta = \tan^{-1}(49.0) = \mathbf{88.8^\circ}$



Παράδειγμα 7

Μάζα m είναι προσδεμένη στο ένα άκρο ιδανικού νήματος μήκους L το οποίο εκτρέπεται αρχικά κατά μια γωνία θ_A και ακολούθως αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογισθεί α) η τάση του νήματος όταν το νήμα σχηματίζει τυχαία γωνία θ ως προς τη κατακόρυφο και β) το έργο ξεχωριστά της κάθε συνιστώσας του βάρους κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς και κατά μήκος του νήματος, από την αρχική γωνία $\theta=\theta_A$ έως τη γωνία $\theta=0$ όπου το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφο.

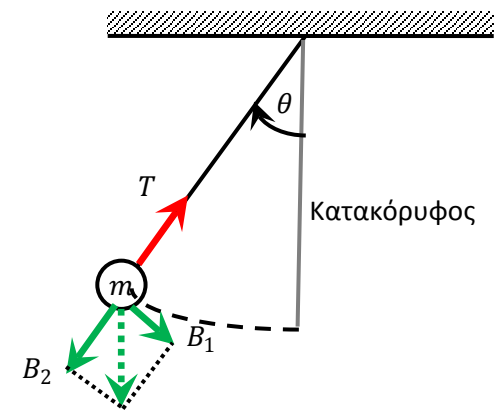
$$\alpha) \Delta y = y_A - y_B = L(\cos\theta - \cos\theta_0), B_1 = mg\sin\theta, B_2 = mg\cos\theta$$

$$T - B_2 = (mv^2)/L \rightarrow T = mg\cos\theta + (mv^2)/L$$

$$A.D.M.E., K_A + U_A + W_T = K_B + U_B \rightarrow 0 + mgy_A + 0 = 1/2mv_B^2 + mgy_B \rightarrow$$

$$v_B^2 = 2g\Delta y \rightarrow v_B^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) \rightarrow T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$$

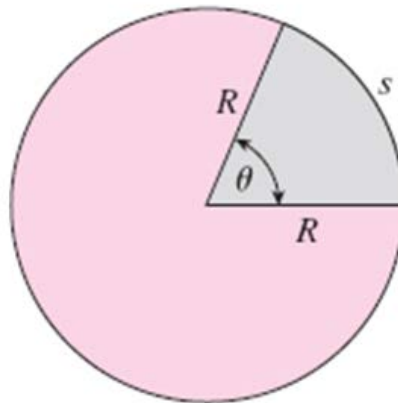


$$\beta) W_1 = \int_{\theta=\theta_A}^0 B_1 \cos 0^\circ dr = \int_{\theta=\theta_A}^0 mg \sin\theta dr = mgL \int_{\theta=\theta_A}^0 \sin\theta d\theta = mgL(1 - \cos\theta_A)$$



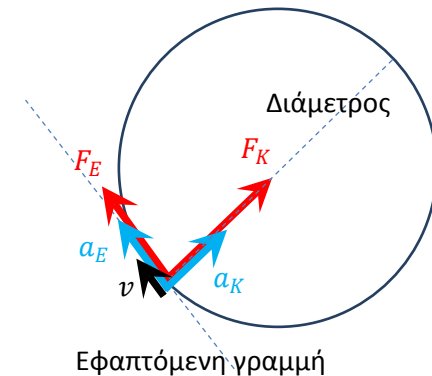
Σύνδεση με γραμμικά μεγέθη

Γραμμικό μέγεθος	Γωνιακό μέγεθος	Σχέση
x	θ	$x = R\theta$
v	ω	$v = R\omega$
α_E	α	$\alpha_E = R\alpha$



Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

- Το έργο της κεντρομόλου δύναμης είναι μηδέν κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς
 - Εφαπτόμενη στην τροχιά – κάθετα στη μετατόπιση
- Επιτρόχια δύναμη, F_E
 - Συγγραμική με την ταχύτητα



Γραμμική Κίνηση

$$v = v_0 + a_E t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_E t^2$$

$$2a_E(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$a_E = \frac{v - v_0}{t}$$

Γωνιακή Κίνηση

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$



Παραδείγματα

7. Μια ρόδα ακτίνας 15.0 cm βρίσκεται σε ηρεμία όταν ξαφνικά δέχεται μια ώθηση για 4 s. Κατά την διάρκεια αυτής της ώθησης εκτελεί 3 περιστροφές. Ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα; Ποια είναι η τελική γραμμική ταχύτητα σε ένα σημείο στην περιφέρεια της ρόδας;

$$R=15 \text{ cm}=0.15 \text{ m}, t=4 \text{ s}, \omega_0=0, \theta=6\pi$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+1/2 \alpha t^2 \rightarrow 6\pi=0+0 \times 4+1/2 \alpha \times 4^2 \rightarrow \alpha=3\pi/4 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega=\omega_0+\alpha t=0+3\pi/4 \times 4=3\pi \text{ rad/s}$$

$$v=\omega R=3\pi \times 0.15=1.413 \text{ m/s}$$

8. Ένα κυκλικό τύμπανο ακτίνας 40 εκατοστών το οποίο περιστρέφεται αρχικά στις 400 στροφές / λεπτό έρχεται σε πλήρη ηρεμία μετά από 50 στροφές. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση και ο χρόνος επιβράδυνσης;

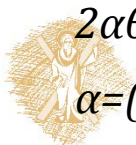
$$R=0.40 \text{ m}, f_0=400 \text{ rpm}, \omega=0, \theta=50 \times 2\pi=314 \text{ rad}$$

$$f_0=400 \text{ rev/min}=400 \text{ rev}/(60 \text{ s})=6.67 \text{ Hz}$$

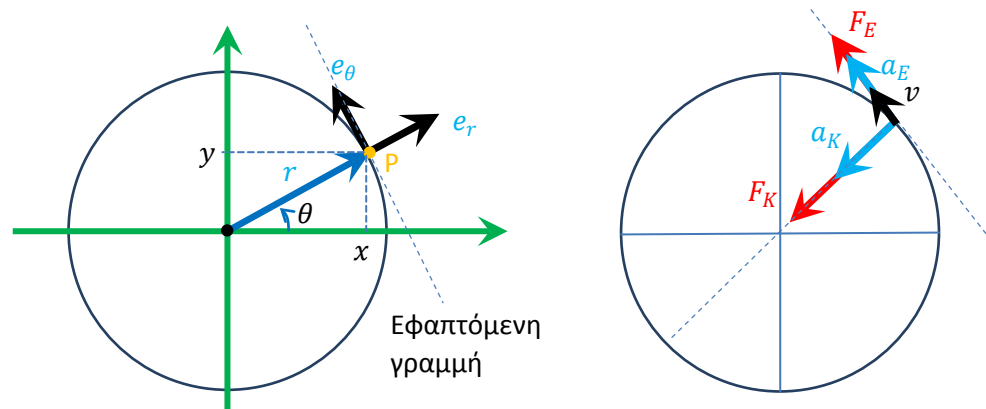
$$\omega_0=2\pi f_0=41.9 \text{ rad/s}$$

$$2\alpha\theta=\omega^2-\omega_0^2 \rightarrow 2\alpha \times 314=0-41.9^2 \rightarrow \alpha=-2.79 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha=(\omega_F-\omega_0)/t \rightarrow t=(\omega_F-\omega_0)/\alpha=(0-41.9)/(-2.79)=15 \text{ s}$$



Μοναδιαία διανύσματα στην κυκλική κίνηση



$$\vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\vec{F}_K = -F_K \vec{e}_r = -\frac{mv^2}{R} \vec{e}_r$$

$$\vec{a}_K = -a_K \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_\theta = \omega R \vec{e}_\theta$$



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.