



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Φυσική Ι

Ενότητα 5: Ορμή – Ώθηση

Κουζούδης Δημήτρης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση της έννοιας της ορμής και της μεταβολής της
- Κατανόηση της έννοιας της ώθησης
- Σύνδεση με το 2^ο Νόμο του Νεύτωνα και το θεώρημα ώθησης ορμής
- Ερμηνεία της αρχής διατήρησης της ορμής και χρήση της σε προβλήματα



Περιεχόμενα ενότητας

- Ορισμός ορμής
 - Παραδείγματα
- Θεώρημα ώθησης – ορμής
- Γενικευμένος 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα
 - Παραδείγματα
- Αρχή διατήρησης της ορμής
 - Παραδείγματα



Ορμή – ώθηση

Ορισμός ορμής

- Το γινόμενο της μάζας ενός σώματος επί την ταχύτητά του $\vec{p} = m\vec{v}$
- Διανυσματικό μέγεθος
- Χρήσιμο σε συγκρούσεις
- Γενικευμένος 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Μεταβολή ορμής

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$



Παραδείγματα

1. Μια σημειακή μάζα $m=0.6$ kg κινείται με ταχύτητα 5 m/s όταν ξαφνικά μια δύναμη ασκείται πάνω της κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας για 2 s και της προσδίδει επιτάχυνση 1.2 m/s². Να βρεθεί η μεταβολή της ορμής της μάζας πριν και μετά την δράση της δύναμης.

$$v = v_0 + at = 5 + 1.2 \times 2 = 7.4 \text{ m/s}$$

$$p = mv = 0.6 \times 7.4 = 4.44 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta p = p - p_0 = 4.44 - 3.00 = 1.44 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

2. Μια μπάλα ποδοσφαίρου μάζας $m=0.1$ kg έχει ταχύτητα 10 m/s αμέσως πριν κτυπήσει το οριζόντιο δοκάρρι. Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής αμέσως μετά – αμέσως πριν την πρόσκρουση με το δοκάρρι.

$$p_0 = mv_0 = 0.1 \times 10 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

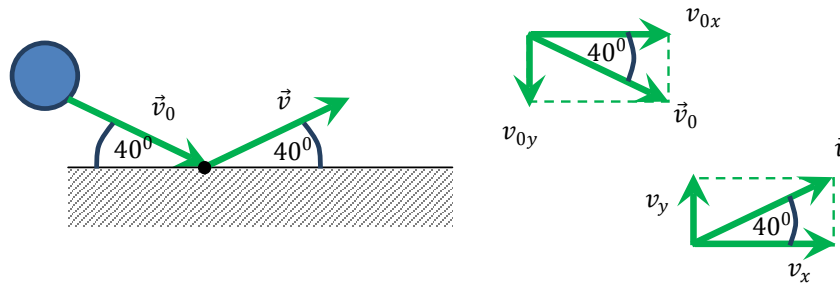
$$p = mv = -0.1 \times 10 = -1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta p = p - p_0 = -1 - 1 = -2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$



Παράδειγμα 3

Μια μπάλα του τένις μάζας 0.02 kg προσπίπτει στο έδαφος με ταχύτητα 25 m/s και γωνία 40° ως προς αυτό. Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής αμέσως μετά – αμέσως πριν την αναπήδηση με το έδαφος.



$$v_{0x} = v_0 \cos 40^\circ = 19.1 \text{ m/s}$$

$$p_{0x} = mv_{0x} = 0.02 \times 19.1 = 0.382 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$v_{0y} = -v_0 \sin 40^\circ = -16.1 \text{ m/s}$$

$$p_{0y} = mv_{0y} = -0.02 \times 16.1 = -0.322 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$v_x = v_0 \cos 40^\circ = 19.1 \text{ m/s}$$

$$p_x = mv_x = 0.02 \times 19.1 = 0.382 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

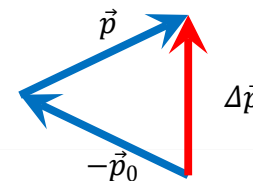
$$v_y = v_0 \sin 40^\circ = 16.1 \text{ m/s}$$

$$p_y = mv_y = 0.02 \times 16.1 = 0.322 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta p_x = p_x - p_{0x} = 0$$

$$\Delta p_y = p_y - p_{0y} = 0.322 - (-0.322) = 6.44 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} + (-\vec{p}_0)$$



Θεώρημα ώθησης-ορμής

- Από γενικευμένο 2^ο Ν. νεύτωνα

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = m d\vec{v}$$

- Ώθηση:

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

- Με ολοκλήρωση 2^{ου} Νόμου Νεύτωνα →
Θεώρημα ώθησης-ορμής

$$\vec{\Omega} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$



Παράδειγμα 4

Ένας αθλητής άλματος εις ύψος με μάζα 75 kg προσγειώνεται μετά το άλμα του με ταχύτητα 8 m/s σε στρώμα και έρχεται σε πλήρη ακινησία μετά από 3 s. α) Να υπολογισθεί η δύναμη που δέχεται από το στρώμα εάν αυτή θεωρηθεί σταθερή και β) Να γίνει το ίδιο εάν ο άλτης προσέπιπτε σε τσιμεντένιο επίπεδο με χρόνο επιβράδυνσης 0.25 s.

α)

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = p_2 - p_1$$

$$F \int_{t_1}^{t_2} dt = 0 - p_1 \Rightarrow F \Delta t = -mv \Rightarrow F = -\frac{mv}{\Delta t} = -\frac{75 \times (-8)}{3} = 200 \text{ N}$$

β)

$$F = -\frac{mv}{\Delta t} = -\frac{75 \times (-8)}{0.25} = 2400 \text{ N}$$



2^{ος} Ν. Νεύτωνα ως μεταβολή της ορμής

- Η δύναμη ισούται με τη χρονική μεταβολή της ορμής

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

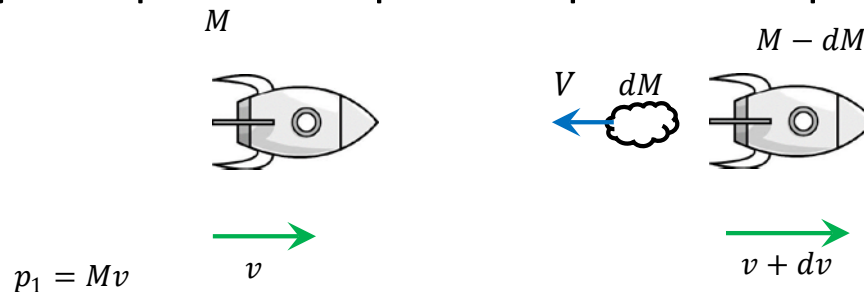
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Για σταθερή ή μεταβαλλόμενη μάζα



Παράδειγμα 5: Προώθηση πυραύλου

Πύραυλος μάζας M_0 κινείται στο διάστημα με σταθερή αρχική ταχύτητα v_0 χωρίς ενεργοποιημένο τον μηχανισμό προώθησης. Ξαφνικά στο $t=0$ ενεργοποιείται ο μηχανισμός ο οποίος καίει υδρογόνο με ρυθμό κ χιλιόγραμμα ανά δευτερόλεπτο (θετικός αριθμός) τα μόρια του οποίου εκτοξεύονται λόγω της υψηλής θερμοκρασίας στο διάστημα με μεγάλη ταχύτητα V σχετικά με τον πύραυλο. Να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ενόσω υπάρχει ακόμα διαθέσιμο καύσιμο στον πύραυλο.



$$p_2 = (M - dM)(v + dv) + (v - V)dM$$

$$dp = -vdM + Mdv + vdM - VdM = Mdv - VdM$$

$$F = \frac{dp}{dt} = M \frac{dv}{dt} - V \frac{dM}{dt}$$

$$F = 0$$

$$M \frac{dv}{dt} = V \frac{dM}{dt}$$

$$(M_0 - \kappa t) \frac{dv}{dt} = V\kappa$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V\kappa}{M_0 - \kappa t} = \frac{V}{\tau - t}$$

$$dv = -\frac{V}{\tau - t} d(\tau - t)$$

$$\int_{v_0}^v dv = -V \int_0^t \frac{d(\tau - t)}{\tau - t}$$

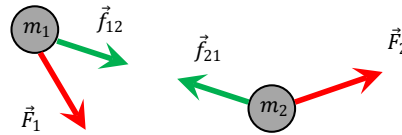
$$v = v_0 - V \ln(1 - t/\tau)$$

$$a = \frac{V}{\tau - t}$$



Αρχή διατήρησης της ορμής

- Απουσία δυνάμεων (1^{ος} Νόμος) \rightarrow διατήρηση ορμής
- Για περισσότερα σώματα



– $f_{12}^{\rightarrow}, f_{21}^{\rightarrow}$ (βαρυτικές, νήματος ή άλλο) είναι ίσες και αντίθετες

– Από 2^ο Νόμο: $\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$ και $\vec{F}_2 + \vec{f}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- Αρχή διατήρησης της ορμής

$$\Sigma \vec{F}_{EE} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Απουσία εξωτερικών δυνάμεων

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$



Παράδειγμα 6

Ένα κορίτσι 20 kg και ένα αγόρι αγνώστου μάζας κάνουν πατινάζ και αρχικά στέκονται αντικριστά. Ωθούν ο ένας τον άλλον όσο πιο δυνατά μπορούν, και το αγόρι κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα 2 m/s, ενώ η κοπέλα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 3 m/s. Πόση είναι η μάζα του αγοριού;

- Χωρίς εξωτερικές δυνάμεις → διατήρηση ορμής
- Όλες οι ταχύτητες είναι οριζόντιες

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s}$$

$$v_2 = -2 \text{ m/s}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

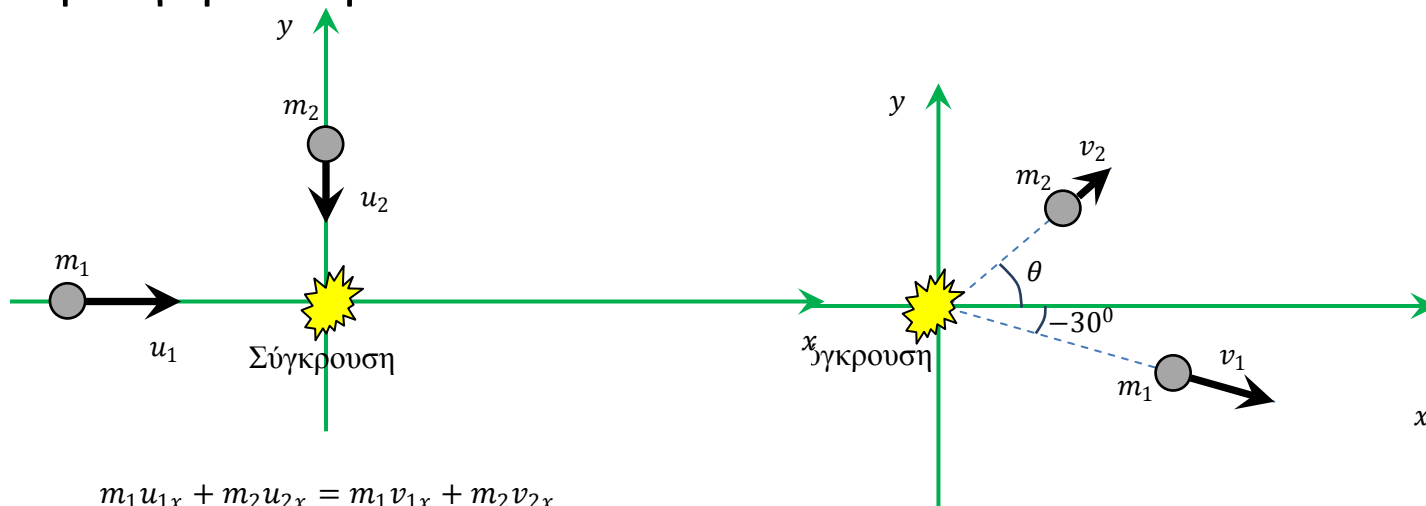
$$20 \times 3 + m_2(-2) = 0$$

$$m_2 = 30 \text{ kg}$$



Παράδειγμα 7

Δυο μικρές μπάλες κυλούν σε λείο έδαφος χωρίς τριβές και συναντιούνται κάθετα όπως στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται $m_1=0.2$ kg, $m_2=0.3$ kg, $u_1=2.5$ m/s και $u_2=1.5$ m/s πριν τη σύγκρουση. Εάν η m_1 αναδύεται με ταχύτητα $v_1=2.2$ m/s και γωνία -30° ως προς τον άξονα x , να βρεθεί η ταχύτητα της m_2 μετά τη σύγκρουση.



$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

$$v_{1x} = v_1 \cos(-30^\circ) = 2.2 \cos(-30^\circ) = 1.90 \text{ m/s}$$

$$v_{1y} = v_1 \sin(-30^\circ) = 2.2 \sin(-30^\circ) = -1.10 \text{ m/s}$$

$$v_{2x} = v_2 \cos \theta$$

$$v_{2y} = v_2 \sin \theta$$

$$0.2 \times 2.5 + 0 = 0.2 \times 1.90 + 0.3 \times v_2 \cos \theta \Rightarrow v_2 \cos \theta = 0.400$$

$$0 - 0.3 \times 1.5 = 0.2 \times (-1.1) + 0.3 \times v_2 \sin \theta \Rightarrow v_2 \sin \theta = -0.767$$

$$\tan \theta = -0.558 \Rightarrow \theta = -62.5^\circ$$

$$v_2 \cos(-62.5^\circ) = 0.40 \Rightarrow v_2 = 0.86 \text{ m/s}$$



Βιβλιογραφία

- Serway R.A., Jewett W. Jr., 2012, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς : μηχανική, ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα, θερμοδυναμική, σχετικότητα, Κλειδάριθμος, Αθήνα*
- Halliday D., Resnick R., Walker J., 2008, *Φυσική, τ.1. Μηχανική, Κυματική, Θερμοδυναμική, Gutenberg, Αθήνα*
- Young H.D., 1994, *Πανεπιστημιακή φυσική , 8^η έκδ., Παπαζήσης , Αθήνα*
- Kittel C., Knight W. D., Ruderman M.A., 1985, *Μηχανική, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων , Αθήνα*
- Wells D.A. , Slusher H. S., 1983, *Schaum's outline of theory and problems of physics for engineering and science, McGraw - Hill Book Company, New York*



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών

Δημήτριος Κουζούδης. «Φυσική Ι»

Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/CMNG2162/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.