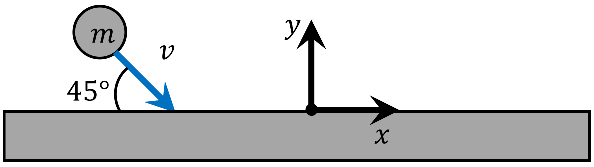
Α

Μεταλλική σφαίρα μάζας $m = \sqrt{2}\,kg$ και αμελητέας ακτίνας προσπίπτει κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα $v = 4\,m/s$ και γωνία $\theta = 45°$ σε επίπεδη επιφάνεια από πολυμερές, όπως στο παρακάτω σχήμα, και αναπηδάει αφού η επαφή της με τον τοίχο διαρκέσει χρόνο $t_0 = 2\,s$. Το υλικό της σφαίρας σε σχέση με το πολυμερές, έχει έναν συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0.25$. Πειραματικώς βρίσκεται ότι η κάθετη αντίδραση που δέχεται η σφαίρα από την επιφάνεια κατά τη διάρκεια της επαφής είναι ίση με

$$\vec{N} = -At(t - t_0)\vec{e}_y$$

όπου $A = 6\,N/s^2$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος ώθησης-ορμής στις δυο διαστάσεις, να βρεθεί η τελική γωνία της ταχύτητα της σφαίρας ως προς τον άξονα x κατά τη στιγμή $t = t_0$. Δεν υπάρχει βαρύτητα στο σχήμα.



<u>Λύση</u>:

Αναλύουμε την ταχύτητα σε x και y συνιστώσες

$$v_x = vcos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$v_y = -vsin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

και έτσι η αντίστοιχες συνιστώσες της αρχικής ορμής είναι οι

$$p_x = mv_x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}4 = 4\,kg\,m/s$$

$$p_y = mv_y = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}4 = -4\,kg\,m/s$$

Η ώθηση κατά τον άξονα y δίνεται από την έκφραση

$$\Omega_y = \int_0^{t_0} F_y dt = -A\int_0^{t_0} t(t - t_0)dt = -A\frac{-{t_0}^3}{6} = \frac{6}{6}2^3 = 8\,Ns$$

Λόγω του συντελεστή τριβής ολίσθησης, η σφαίρα δέχεται και οριζόντια δύναμη της τριβής T η οποία κατά τα γνωστά είναι ίση με

$$F_x = -T = -\mu N = -0.25N$$

δηλαδή το $1/4$ της κάθετης αντίδρασης N και άρα και η αντίστοιχη ώθηση κατά τον άξονα x θα είναι το $1/4$ της ώθησης κατά τον άξονα y αλλά με αρνητικό πρόσημο εφόσον πρόκειται για τριβή

$$\Omega_x = -\frac{\Omega_y}{4} = -2\ Ns$$

σύμφωνα με το θεώρημα ώθησης-ορμής, οι συνιστώσες της ορμής δίνονται από τις

$$p'_x = p_x + \Omega_x = 4 - 2 = 2\ kg\ m/s$$

$$p'_y = p_y + \Omega_y = -4 + 8 = 4\ kg\ m/s$$

Έτσι η τελική γωνία της ταχύτητας θα δίνεται από την

$$tan\theta' = \frac{v_y{}'}{v_x{}'} = \frac{p_y{}'}{p_x{}'} = 2$$

ή

$$\theta = 63.5°$$

B

Κινητό μάζας m κινείται στη μία διάσταση κάτω από την επίδραση μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης έτσι ώστε η δυναμική του ενέργεια να δίνεται από την έκφραση

$$U(x) = A(x - x_0)^2(x - x_1) + B$$

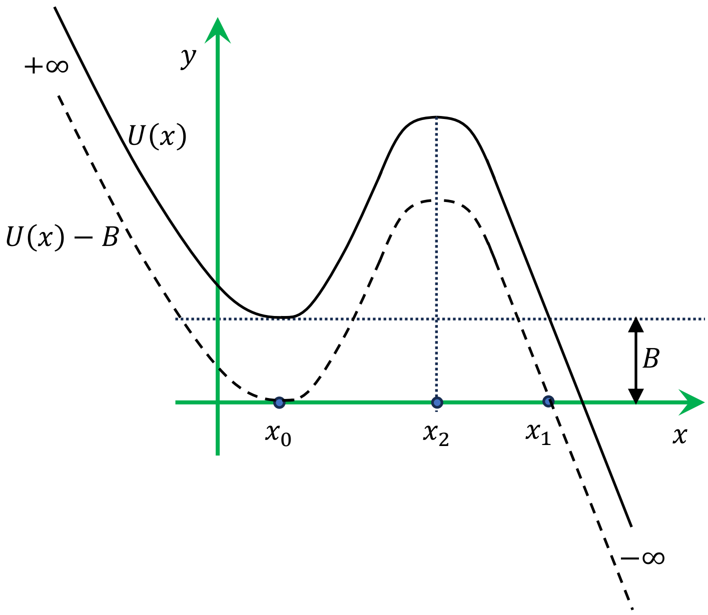
όπου $x_0 = 1\ m, x_1 = 2\ m$ και $A = -0.25\ J/m^3$. Εάν η κινητική του ενέργεια στο $x = x_0$ είναι ίση με $K_0 = 1/9\ \ Joules$, να βρεθεί αντίστοιχη κινητική του ενέργεια στο σημείο ασταθούς ισορροπίας της τροχιάς.

Λύση:

Η δεδομένη συνάρτηση $U(x)$ μπορεί εύκολα να αναπαρασταθεί σε γραφική παράσταση εάν θεωρήσουμε την παράλληλη της συνάρτηση $U(x) - B$ η οποία έχει διπλή ρίζα στο $x_0 = 1$, και άρα εφάπτεται εκεί στον άξονα x, και μονή στο $x_1 = 2$. Εφόσον ο συντελεστής A είναι αρνητικός, τότε στο $x \to -\infty$ η συνάρτηση έρχεται από το $+\infty$, ενώ αντιθέτως στο $x \to +\infty$ βυθίζεται στο $-\infty$, και επομένως θα μοιάζει όπως στο παρακάτω σχήμα. Περιμένουμε ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας x_2 με κλίση μηδέν κάπου ανάμεσα από το x_0 και το x_1.

Στο σημείο x_0 η δυναμική ενέργεια του κινητού είναι ίση με B ενώ από τα δεδομένα η κινητική του ενέργεια είναι ίση με $K_0 = 1/9\ J$ και άρα η συνολική του μηχανική ενέργεια σε *Joules* είναι ίση με

$$E = B + \frac{1}{9}$$



Το σημείο ασταθούς ισορροπίας το βρίσκουμε εύκολα θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν:

$$\frac{d}{dx}(U(x)-B)=0$$

$$\frac{d}{dx}(x-x_0)^2(x-x_1)=0$$

$$2(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)^2=0$$

Διαιρούμε με το $x-x_0$ στο οποίο επίσης η κλίση είναι μηδέν, αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

$$2(x_2-2)+(x_2-1)=0 => 3x_2=5$$

ή

$$x_2=\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$$

Η δυναμική σε αυτό το σημείο είναι ίση με

$$U_2=A(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)+B=-\frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}-1\right)^2\left(\frac{5}{3}-2\right)+B=\frac{1}{27}+B$$

Έτσι από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$U_2+K_2=E$$

$$\frac{1}{27}+B+K_2=B+\frac{1}{9}$$

ή

$$K_2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = \frac{2}{27}\, J$$

Γ

Κινητό μάζας $m = 0.25\, kg$ υποβάλλεται στην επίδραση μιας μοναδικής συντηρητικής δύναμης έτσι ώστε η δυναμική του ενέργεια να δίνεται από την έκφραση

$$U(x) = A(x - x_0)^2(x - x_1) + B$$

όπου $x_0 = 1\, m$, $x_1 = 4\, m$ και $A = 0.5\, J/m^3$. Εάν το σώμα αφήνεται σε ηρεμία στο $x = x_1$, να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του.

Λύση:

Η δεδομένη συνάρτηση $U(x)$ μπορεί εύκολα να αναπαρασταθεί σε γραφική παράσταση εάν θεωρήσουμε την παράλληλη της συνάρτηση $U(x) - B$ η οποία έχει διπλή ρίζα στο $x_0 = 1$, και άρα εφάπτεται εκεί στον άξονα x, και μονή στο $x_2 = 2$. Εφόσον ο συντελεστής A είναι θετικός, τότε στο $x \to -\infty$ η συνάρτηση έρχεται από το $-\infty$, ενώ αντιθέτως στο $x \to +\infty$ ύπταται στο $+\infty$, και επομένως θα μοιάζει όπως στο παρακάτω σχήμα. Περιμένουμε ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας x_2 με κλίση μηδέν κάπου ανάμεσα από το x_0 και το x_1.

Στο σημείο x_1 η δυναμική ενέργεια του κινητού είναι ίση με B και εφόσον από τα δεδομένα η κινητική του ενέργεια είναι ίση με 0 (ηρεμία) τότε η συνολική του μηχανική ενέργεια είναι ίση με

$$E = B + 0 = B$$

Η δυναμική ενέργεια U_0 στη θέση x_0 είναι ίση με αυτήν στη θέση x_1, όπως μπορεί να επαληθευτεί με απλή αντικατάσταση και έτσι από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας και η κινητική K_0 στο x_0 θα είναι όση και στο x_1, δηλαδή μηδέν, και άρα το κινητό εκτελεί δέσμια τροχιά μεταξύ των σημείων αυτών. Όπως φαίνεται και από την ποιοτική γραφική παράσταση στο σχήμα, η μέγιστη ταχύτητα θα εμφανίζεται προφανώς στο τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας στο σημείο x_2, το οποίο εύκολα μπορούμε να βρούμε παραγωγίζοντας την δεδομένη $U(x)$ και θέτοντάς την ίση με μηδέν αφού η κλίση εκεί είναι μηδενική

$$\frac{d}{dx}(U(x) - B) = 0$$

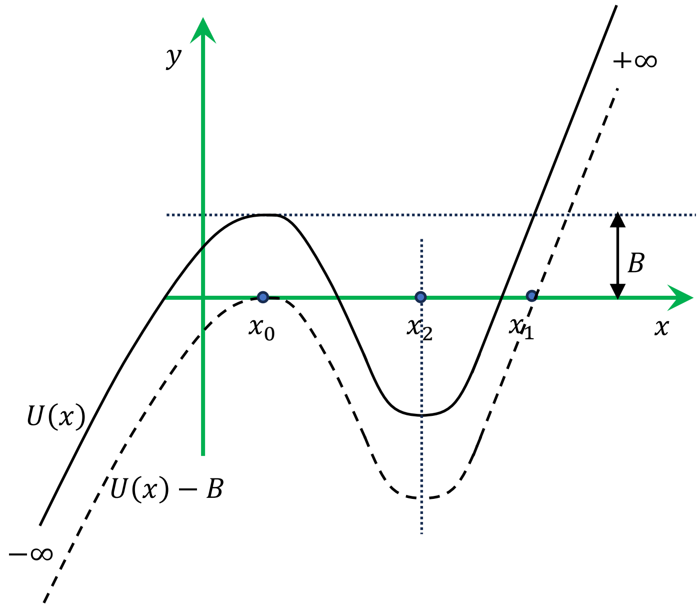
$$\frac{d}{dx}(x - x_0)^2(x - x_1) = 0$$

$$2(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)^2 = 0$$

Διαιρούμε με το $x - x_0$ στο οποίο επίσης η κλίση είναι μηδέν, αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

$$2(x_2 - 4) + (x_2 - 1) = 0 => 3x_2 = 9$$

ή $x_2 = 3$



Η δυναμική σε αυτό το σημείο είναι ίση με

$$U_2 = A(x_2 - x_0)^2(x_2 - x_1) + B = \frac{1}{2}(3-1)^2(3-4) + B = -2 + B$$

Έτσι από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$U_2 + K_2 = E$$

$$-2 + B + K_2 = B$$

ή

$$K_2 = 2\,J$$

Οπότε την ταχύτητα εκεί v_2 μπορούμε να την υπολογίσουμε από τον ορισμό της κινητικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 = K_2 = 2$$

ή

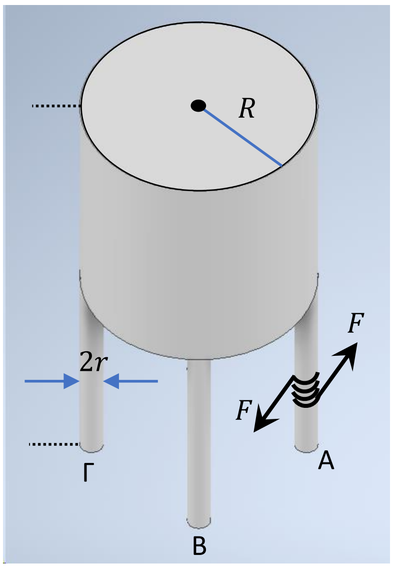
$$v_2 = 4\,m/s$$

Δ

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας φοιτητής χρησιμοποιεί ένα σκαμπό βάρους B κυλινδρικού σχήματος ακτίνας $R = \sqrt{2}/2\,m$, έχοντας ως πόδια τέσσερις λεπτούς συμμετρικούς κυλινδρικούς δοκούς Α, Β, Γ και Δ (ο τελευταίος δεν φαίνεται στο σχήμα) αμελητέας μάζας ο καθένας και ακτίνας $r = R/10$. Οι δοκοί αυτοί στο κάτω τους άκρο μπορούν και ολισθαίνουν ενάντια σε δάπεδο με συντελεστή τριβής ίσο με $\mu = 0.8$. Ο φοιτητής τυλίγει σφιχτά ένα κομμάτι νήμα (ώστε αυτό να μην ολισθαίνει) γύρω από την δοκό Α και ενώ το σκαμπό βρίσκεται σε ηρεμία, εφαρμόζει στο $t = 0$ ένα ζεύγος εφαπτομενικών δυνάμεων στο Α, με μέτρο η καθεμία ίσο με

$$F = 5B$$

όπου B το βάρος του σκαμπό. Εάν η δύναμη είναι τέτοια ώστε να επέρχεται στα κάτω άκρα των δοκών άμεση ολίσθηση ακόμα και στο $t = 0$, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του σκαμπό γύρω από το Α. Πάρτε $g = 10\,m/s^2$ για ευκολία. <u>Σημείωση</u>: Το r να θεωρηθεί ΑΜΕΛΗΤΕΟ εκτός από τις περιπτώσεις υπολογισμού της ροπής της F.



<u>Λύση</u>:

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία δείχνει μια κάτοψη του σώματος στο ύψος του δαπέδου, περιμένουμε λόγω συμμετρίας το βάρος του σώματος να κατανέμεται ομοιόμορφα και στα τέσσερα σημεία στήριξης Α. Έτσι η αντίστοιχη τριβή στο καθένα από αυτά τα σημεία θα είναι ίση με

$$T = \mu\frac{B}{4} = \frac{B}{5}$$

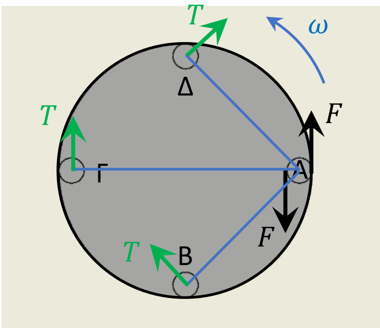
Λόγω διαφορετικής απόστασης των τριών δοκών Β, Γ και Δ από την Α που παίζει τον ρόλο του άξονα περιστροφής, οι παραπάνω τριβές δημιουργούν τρεις διαφορετικές ροπές, όλες αρνητικές, οι οποίες είναι οι εξής

$$\tau_B = -T(\mathrm{AB}) = -T\sqrt{2}R = -\frac{B}{5}$$

$$\tau_\Delta = -T(\mathrm{A\Delta}) = -T\sqrt{2}R = -\frac{B}{5}$$

$$\tau_\Gamma = -T(\mathrm{A\Gamma}) = -T2R = -\sqrt{2}\frac{B}{5}$$

όπου (α) σύμφωνα με την εκφώνηση, οι ακτίνες των δοκών θεωρήθηκαν αμελητέες στον υπολογισμό των παραπάνω αποστάσεων, (β) στις αποστάσεις (AB) και $(\mathrm{A\Delta})$ χρησιμοποιήθηκε το Πυθαγόρειο θεώραμα και (γ) παντού οι τριβές T είναι αντίθετες με την ταχύτητα και αφού αυτή είναι πάντα εφαπτομενική στην τροχιά, η οποία προφανώς είναι κυκλική για το κάθε πόδι, οι τριβές T τέμνουν πάντα κάθετα την αντίστοιχη ακτίνα περιστροφής, και έτσι στον υπολογισμό της ροπής τους παίρνουμε $sin\theta = sin90° = 1$.



Η ροπή της εφαρμοζόμενης δύναμης είναι απλά

$$\tau_F = 2Fr = 2 \cdot 5B\frac{1}{10}R = BR = \frac{\sqrt{2}}{2}B$$

Έτσι η συνολική ροπή θα ισούται με

$$\Sigma\tau = \frac{\sqrt{2}}{2}B - \frac{2+\sqrt{2}}{5}B$$

Από την άλλη μεριά, η ροπή αδράνειας κυλίνδρου μάζας m και ακτίνας R ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I_{KM} = \frac{1}{2}mR^2$$

Επειδή εδώ η περιστροφή γίνεται γύρω από το A το οποίο απέχει απόσταση R από το κέντρο μάζας, η παραπάνω ποσότητα πρέπει να προσαυξηθεί σύμφωνα με το θεώρημα Steiner κατά mR^2 και έτσι η ροπή αδράνειας ως προς το A ισούται με

$$I_A = I_{KM} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = \frac{3}{2}\frac{B}{g}R^2 = \frac{3}{20}BR^2 = \frac{3}{80}B$$

Από τον νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή, έχουμε για την γωνιακή επιτάχυνση α ότι

$$\Sigma\tau = I_A\alpha$$

ή

$$\alpha = \frac{\Sigma\tau}{I_A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}B - \frac{2+\sqrt{2}}{5}B}{\frac{3}{80}B} = \frac{40\sqrt{2} - 16(2+\sqrt{2})}{3} = \frac{24\sqrt{2} - 32}{3}$$

ή

$$\alpha = \frac{24\sqrt{2} - 32}{3} = 8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \approx 0.65\, rad/s$$

Ε

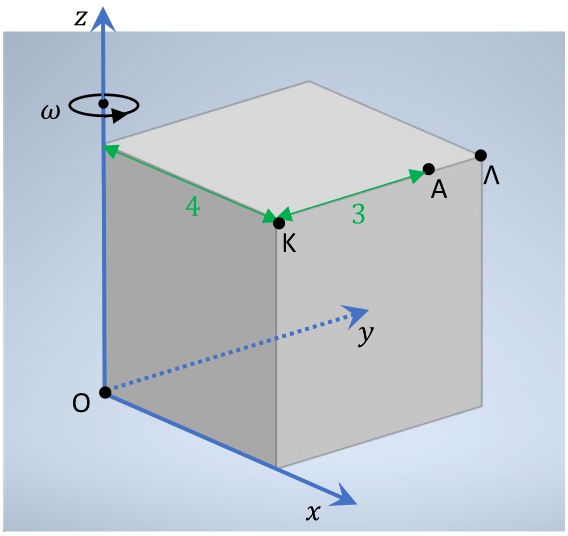
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ένας κύβος ακμής $a = 4\, m$ και μάζας $m = 0.6\, kg$ περιστρέφεται γύρω από την μια ακμή του που συμπίπτει με τον άξονα z με κάποια μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$. Ένας φοιτητής τοποθετεί έναν αισθητήρα ταχύτητας στο σημείο Α που βρίσκεται επάνω στην ακμή ΚΛ του κύβου και σε απόσταση $(\mathrm{KA}) = 3\, m$ από την άκρη της Κ και καταγράφει την συνιστώσα της ταχύτητας κατά μήκος της ακμής αυτής και βρίσκει ότι μεταβάλλεται με τον χρόνο t ως

$$v_{A\Lambda} = \gamma t^2 + \beta t$$

όπου $\gamma = 2$ και $\beta = 4$ σε μονάδες S.I. Εάν η ροπή αδράνειας του κύβου ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I = \frac{1}{6} m a^2$$

τότε να βρεθεί η ροπή που ασκείται στο κύβο για αυτή την περιστροφή κατά τη χρονική στιγμή $t = 2\, s$



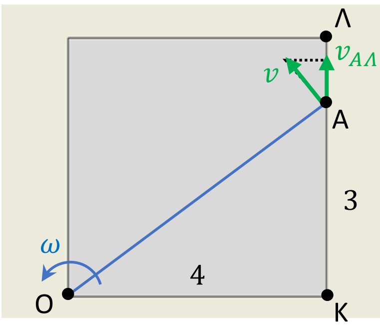
<u>Λύση</u>:

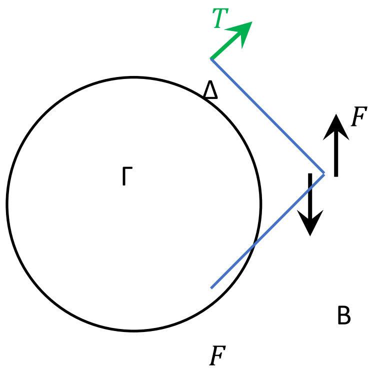
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία δείχνει μια κάτοψη του κύβου, το Α εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα ΟΑ γύρω από το Ο και έτσι η ταχύτητα του v θα είναι κάθεται σε αυτή την ακτίνα. Στο τρίγωνο ΚΟΑ εύκολα βρίσκουμε ότι το συνημίτονο της γωνίας Ο είναι ίσο με $4/5$. Η ταχύτητα v καθώς και η συνιστώσα της $v_{A\Lambda}$ είναι κάθετες αντίστοιχα στις πλευρές ΟΑ και ΟΚ του τριγώνου και άρα το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνία θ θα είναι και αυτό ίσο με $4/5$ που σημαίνει ότι

$$v_{A\Lambda} = v\,cos\theta = \frac{4}{5}v$$

ή λύνοντας αντίστροφα

$$v = \frac{5}{4}v_{A\Lambda} = \frac{5}{4}(\gamma t^2 + \beta t)$$





Στην περιστροφική κίνηση, η γωνιακή ταχύτητα ω σχετίζεται με την γραμμική ταχύτητα v σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$v = \omega r = \omega(\mathrm{OA})$$

Από Πυθαγόρειο εύκολα βρίσκουμε ότι $(\mathrm{OA}) = 5$ και έτσι

$$\omega = \frac{v}{5} = \frac{1}{4}(\gamma t^2 + \beta t)$$

Η παραγώγιση της παραπάνω μας δίνει τη γωνιακή επιτάχυνση α

$$\alpha_\Gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{4}(2\gamma t + \beta)$$

Αντικαθιστούμε και δεδομένες σταθερές γ και β καθώς και θέτουμε $t = 2\ s$ και έχουμε

$$\alpha_\Gamma(2) = 3\ rad/s^2$$

Από τον νόμο του Νεύτωνα στην περιστροφή, έχουμε για την γωνιακή επιτάχυνση α ότι

$$\tau = I_A \alpha_\Gamma$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την επιθυμητή ροπή, αρκεί να βρούμε την ροπή αδράνειας.

Μας δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κύβου ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με

$$I_{KM} = \frac{1}{6} m a^2$$

Επειδή εδώ η περιστροφή γίνεται γύρω από το O το οποίο απέχει απόσταση $d = \sqrt{2}a/2$ από το κέντρο μάζας, η παραπάνω ποσότητα πρέπει να προσαυξηθεί σύμφωνα με το θεώρημα Steiner κατά md^2 και έτσι η ροπή αδράνειας ως προς το O ισούται με

$$I_A = I_{KM} + md^2 = \frac{1}{6} m a^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} m a^2 + \frac{1}{2} m a^2 = \frac{2}{3} m a^2$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα

$$I_A = \frac{2}{3} 0.6 \times 4^2 = 6.4$$

Έτσι η δεδομένη ροπή ισούται με

$$\tau(2) = I_A \alpha_\Gamma(2) = 6.4 \times 3 = 19.2\ Nm$$