

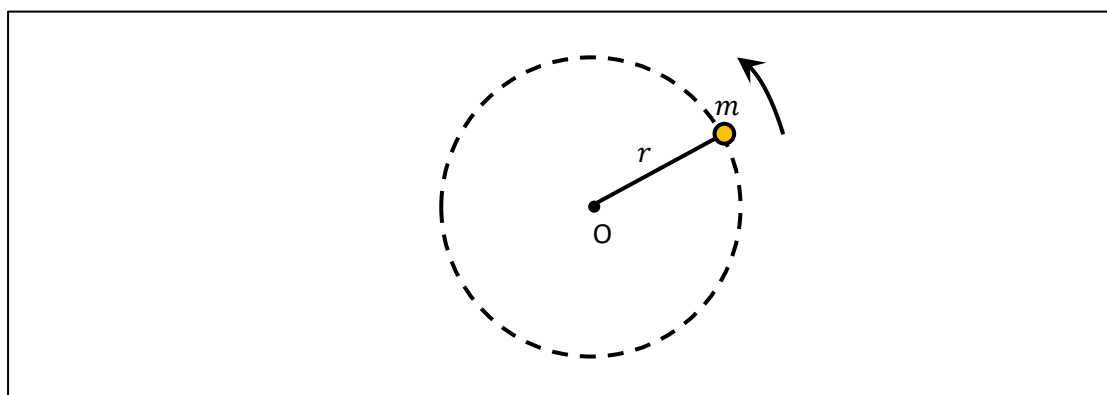
Ροπή Αδράνειας

Η ροπή αδράνειας I είναι το αντίστοιχο της μάζας στην ευθύγραμμη κίνηση, δηλαδή όπως η μάζα μου δείχνει την αδράνεια ενός σώματος κατά τη μετακίνησή του, έτσι και η ροπή αδράνειας μου δείχνει τη δυσκολία ενός σώματος να περιστραφεί.

Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τη μάζα του σώματος αλλά και από τη γεωμετρία του δηλαδή σώματα ίδιας μάζας έχουν γενικά διαφορετική ροπή αδράνειας εάν έχουν διαφορετική γεωμετρία.

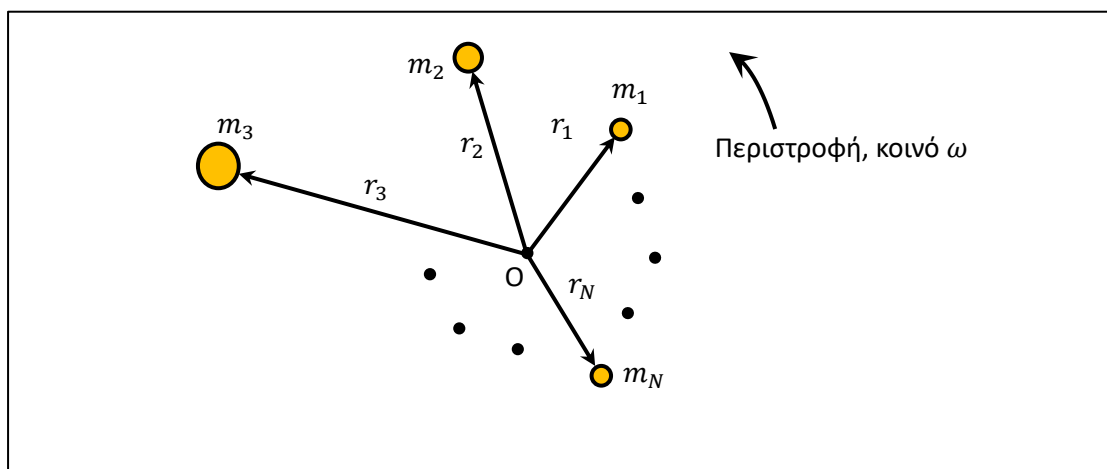
Θα ορίσουμε την ροπή αδράνειας πρώτα για μια σημειακή μάζα, μετά για σύνολο σημειακών μαζών και τελικά για στερεό σώμα

A. Σημειακή μάζα



$$I = mr^2$$

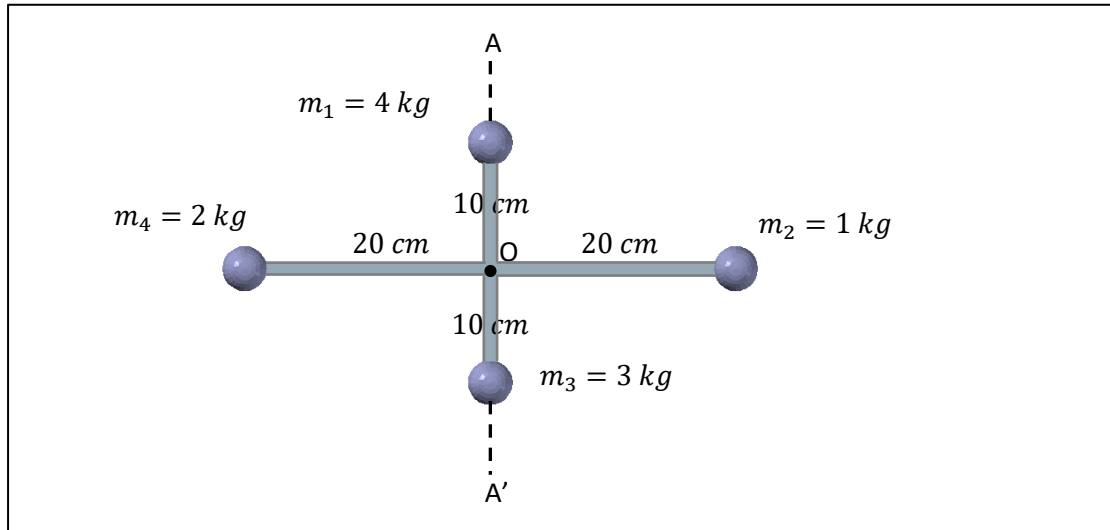
B. Για σύνολο σημειακών μαζών οι οποίες περιστρέφονται γύρω από κοινό άξονα η γενίκευση είναι προφανής



$$I = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2$$

Παράδειγμα 8.6

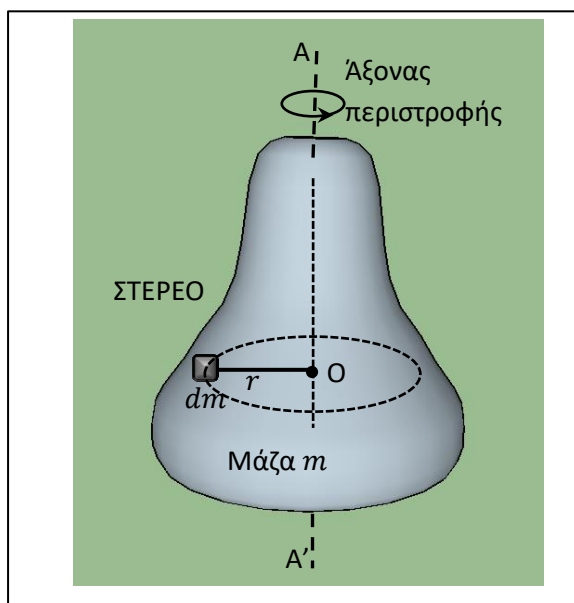
Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας α. γύρω από άξονα κάθετο στη σελίδα που διέρχεται από το Ο και β. για τον άξονα ΑΑ΄



α. $I_a = 4 \times 10^2 + 1 \times 20^2 + 3 \times 10^2 + 2 \times 20^2 = 1900 \text{ kg cm}^2$

β. $I_a = 4 \times 0^2 + 1 \times 20^2 + 3 \times 0^2 + 2 \times 20^2 = 1200 \text{ kg cm}^2$

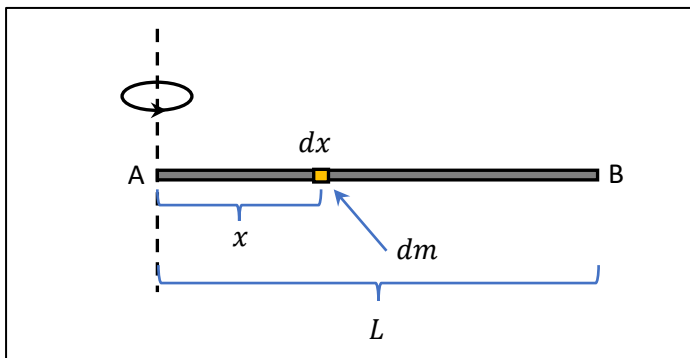
Γ. Στερεό



$$I = \int_{\text{στερεό}} r^2 dm$$

Παράδειγμα 8.7

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας της παρακάτω λεπτής ράβδου AB μήκους L , μάζας m και αμελητέας διατομής εάν περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος περνάει από το ένα άκρο της A όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Τεμαχίζω τη ράβδο σε μικρά κομματάκια μήκους dx τα οποία το καθένα περιέχει στοιχειώδη μάζα dm και γενικά το καθένα από αυτά θα απέχει απόσταση x από το σημείο περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας θα έχουμε

$$I = \int_{x=0}^L x^2 dm$$

Επειδή το σώμα είναι ομογενές η αναλογία μηκών είναι και αναλογία μαζών

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{L} \Rightarrow dm = \frac{m}{L} dx$$

Έτσι, το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \frac{m}{L} \int_{x=0}^L x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2$$

Στην πράξη καταφεύγουμε σε πίνακες

Σημειακή
μάζα m σε
απόσταση r
από τον άξονα
περιστροφής
 $I = mr^2$

Ράβδος μάζας m και μήκους L ,
άξονας περιστροφής στην άκρη
 $I = \frac{1}{3}mL^2$

Ράβδος μάζας m
και μήκους L ,
άξονας περιστρ.
στο Κ.Μ.
 $I = \frac{1}{12}mL^2$

Λεπτότοιχος σωλήνας μάζας m
και ακτίνας R , περιστροφή γύρω
από τον άξονα του σωλήνα
 $I = mR^2$

$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$

Σωλήνας μάζας m και
εσωτερικής ακτίνας R_1 και
εξωτερικής R_2 (άξονας σωλήνα)

$I = \frac{1}{2}mR^2$

Συμπαγής κύλινδρος μάζας m
και ακτίνας R , περιστροφή γύρω
από τον άξονα του σωλήνα

$I = \frac{m}{4}(R^2 + \frac{1}{3}L^2)$

Συμπαγής κύλινδρος μάζας m , ακτίνας R
και μήκους L , περιστροφή γύρω από το ΚΜ
κάθετα στον άξονα του κυλίνδρου

$I = \frac{2}{5}mR^2$

Συμπαγής σφαίρα
μάζας m και
ακτίνας R ,
περιστροφή γύρω
από μια διάμετρο

$I = \frac{2}{3}mR^2$

Κοίλη σφαίρα
μάζας m και
ακτίνας R ,
περιστροφή γύρω
από μια διάμετρο

Λεπτό φύλλο
μάζας m και
διαστάσεων $a \times b$,
περιστροφή γύρω
από κάθετο άξονα
στο ΚΜ
 $I = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$