Η δυναμική ενέργεια μιας συντηρητικής δύναμης η οποία δρα στη μια διάσταση, δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + \beta$ όπου $a = 3\, Joules/m^4$, $\beta = 2\, Joules$, $x_1 = 1.0\, m$ και $x_2 = 3.0\, m$. Μια σημειακή μάζα $m = 2\, kg$ βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο αυτής της δύναμης. Να βρεθούν τα εξής:

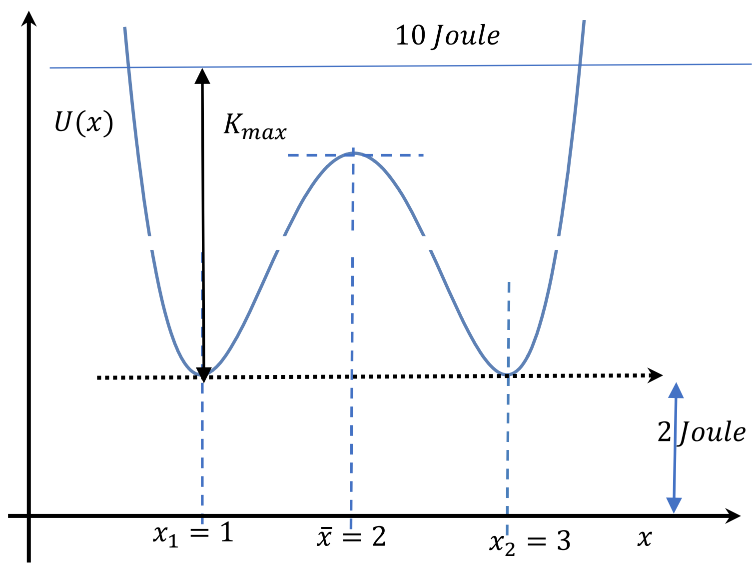
(α) Τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας της δυναμικής ενέργειας.

(β) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα της μάζας εάν η συνολική μηχανική ενέργεια της είναι ίση με $10\, Joules$

(γ) Να σχολιαστεί ποιοτικά το είδος της κίνησης της μάζας του προηγούμενου υπο-ερωτήματος

(δ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη μάζα στα σημεία αναστροφής (εκεί που η κίνηση αλλάζει κατεύθυνση) στο προηγούμενο υπο-ερώτημα.

(β)



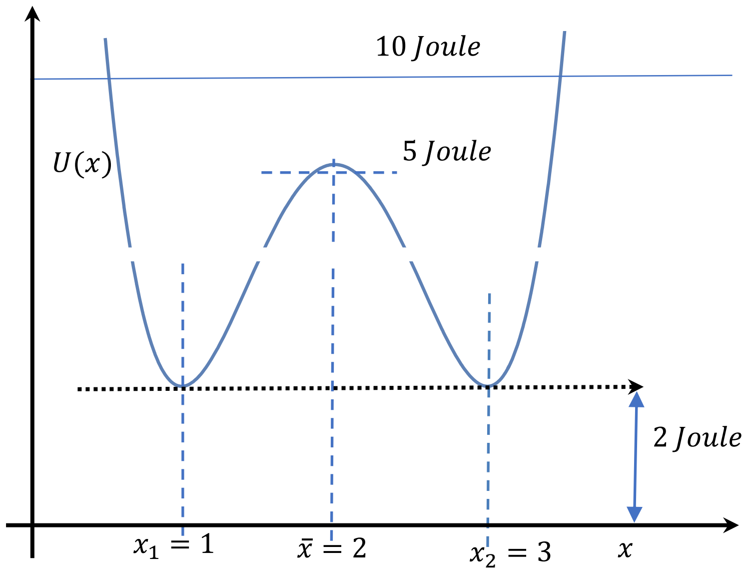
$$K_{max} = 10 - U(1) = 10 - (3(1-1)^2\,(1-3)^2 + 2)$$

$$K_{max} = 10 - 2 = 8\, Joules$$

$$\frac{1}{2} m {v_{max}}^2 = 8$$

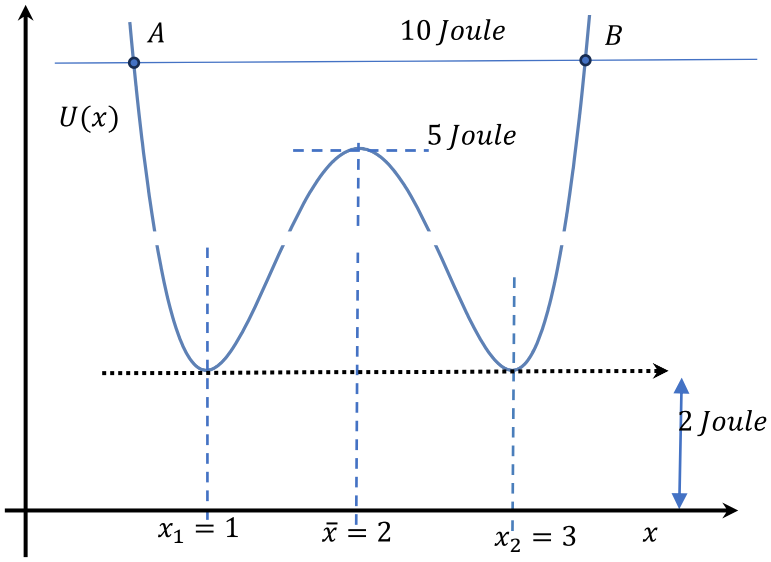
$$v_{max} = 2\sqrt{2}$$

(γ)



Η είναι όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση πάνω από το τοπικό μέγιστο των 5 και έτσι αν ξεκινήσουμε για παράδειγμα από το αριστερό σημείο ανακοπής η δύναμη είναι θετική θα επιταχύνει το σώμα το οποίο θα ξεπεράσει το μέγιστο γιατί έχει αρκετή κινητική, στη συνέχεια θα σταματήσει στο δεξί σημείο ανακοπής θα αναστρέψει την πορεία του και ούτω καθεξής

(δ)



Για να βρούμε τα σημεία αναστροφής Α,Β θέτουμε

$$U(x) = E = 10$$

$$3(x-1)^2(x-3)^2 + 2 = 10$$

$$3(x-1)^2(x-3)^2 = 8$$

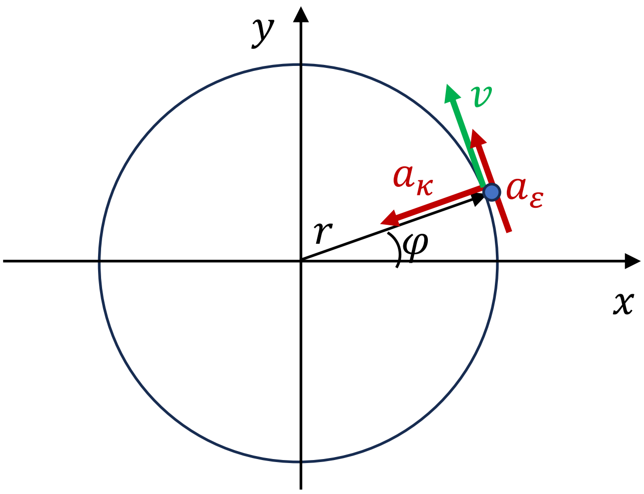
$$(x-1)^2(x-3)^2 = 8/3$$

$$(x-1)(x-3) = \sqrt{8/3}$$

δευτεροβαθμια θα προκύψουν 2 λύσεις που είναι τα σημεία αναστροφής, $x_A = 0.379$ και $x_B = 3.621$

$$F(x_A) = -\frac{dU(x_A)}{dx}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 κυκλική κίνηση



Για ομαλή κυκλική κίνηση ΟΚΚ $\varphi = \omega t$

Γενική κυκλική κίνηση $\varphi = \varphi(t)$

$$x = Rcos\varphi$$

$$y = Rsin\varphi$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -Rsin\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = Rcos\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

Ορίζω

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Γωνιακή ταχύτητα

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega(t)Rsin\varphi$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega(t)Rcos\varphi$$

Ορίζω

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y\right) = \omega R(-sin\varphi, cos\varphi)$$

Θυμίζω

$$\vec{r} = R(cos\varphi, sin\varphi)$$

Ξαναπαραγωγίζω

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}Rsin\varphi - \omega Rcos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = -\alpha Rsin\varphi - \omega^2 Rcos\varphi$$

Ορίζω

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \alpha Rcos\varphi - \omega^2 Rsin\varphi$$

Διανυσματικώς

$$\vec{a} = \alpha R(-sin\varphi, cos\varphi) - \omega^2 R(cos\varphi, sin\varphi)$$

$$\vec{a} = \alpha R\vec{e}_\varphi - \omega^2 R\vec{e}_r$$

Η επιτάχυνση γενικά δηλαδή έχει 2 συνιστώσες, μία κατά μήκος της τροχιάς με μέτρο αR η οποία προφανώς είναι επιτρόχια και μια αντίθετα της ακτίνας με μέτρο $-\omega^2 R$ η οποία προφανώς είναι κεντρομολος

$$a_\varepsilon = \alpha R$$

$$a_\kappa = \omega^2 R$$

Παράδειγμα:

Σώμα μάζας $m = 2\ kg$είναι αναγκασμένο να κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά με ακτίνα $R = 0.5\ m$ λόγω κάποιας κεντρομόλου δύναμης αλλά ταυτόχρονα ασκείται πάνω του και μια δύναμη κατά μήκος της τροχιάς του. Εάν η επιτάχυνση του που του προσδίδει αυτή η δεύτερη δύναμη είναι ίση με $a_\varepsilon = -bt^2 + ct$ όπου τα $b = 2$ και $c = 5$ είναι θετικές σταθερές να βρεθούν

α) Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος σε τυχαία χρονική στιγμή εάν είχε αρχική γωνιακή ταχύτητα $2\ rad/s$ (στο $t = 0$)

β) ο αριθμός των στροφών που θα εκτελέσει μέχρι να έρθει σε πλήρη ακινησία

Λύση:

Δίνεται

$$a_\varepsilon = -bt^2 + ct$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$$a_\varepsilon = \alpha R => \alpha = \frac{a_\varepsilon}{R} = 2(-bt^2 + ct)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \int \alpha dt = 2\left(-\frac{bt^3}{3} + \frac{ct^2}{2}\right) + c = 2\left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right) + c$$

Από αρχικές συνθήκες $\omega(0) = 2$

$$0 + 0 + c = 2 => c = 2$$

$$\omega = 2\left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right) + 2$$

β) Πλήρης ακινησία:

$$\omega = 0$$

Μπορώ να βρω τον χρόνο (δεν λύνεται αναλυτικά, μπορώ να το βρω αριθμητικά ή γραφικά)

$$2\left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right) + 2 = 0$$

Με την βοήθεια του MatLab

$$t = 3.85\ s$$

(Καλό Μαθηματικό Διαδικτυακό εργαλείο είναι το Wolfram Alpha)

Μπορώ να βρω τη γωνία πρώτα και να την αναγάγω σε αριθμό περιστροφών αφού μια περιστροφή είναι ίση με γωνία 2 π.

Από

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta = \int \omega\, dt = \int \left[2\left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right) + 2\right] dt = 2\left(-\frac{2t^4}{12} + \frac{5t^3}{6}\right) + 2t + \theta(0)$$

Για ευκολία $\theta(0) = 0$

$$\theta = -\frac{t^4}{3} + \frac{5t^3}{3} + 2t$$

Για

$$t = 3.85\ s$$

$$\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = 29.5\ rad$$

Γιατί σε rad και όχι μοίρες;

$$a_\varepsilon = \alpha R$$

είναι η γενίκευση της $s = \theta R$ (μήκος τόξου), εάν παραγωγίσω δυο φορές

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = R\omega$$

Ξανα

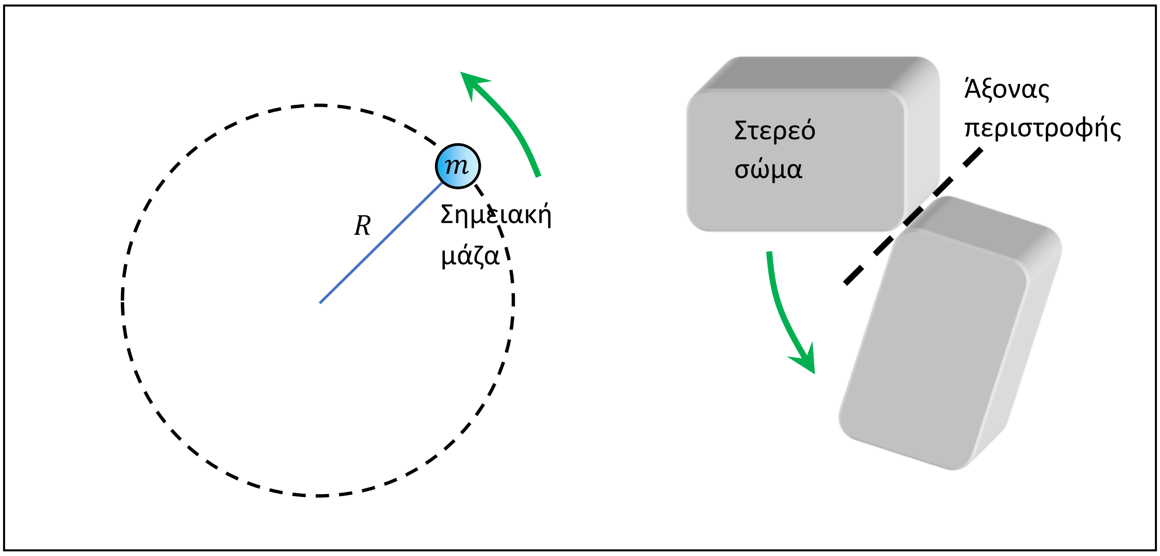
$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_\varepsilon = \alpha R$$

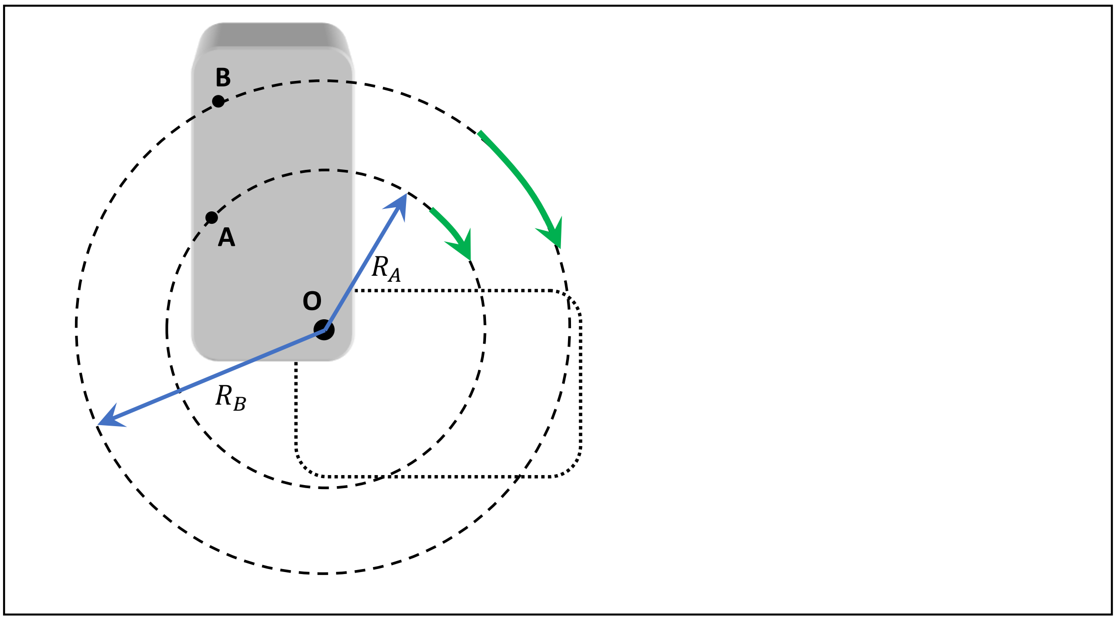
Ο αριθμός των περιστροφών ισούται με

$$n = \frac{\theta_{\tau\varepsilon\lambda}}{2\pi} = 4.7$$

ΚΕΦ 8, ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ – ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ



Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το στερεό το οποίο αποτελείται από άπειρα σημεία, κατά την περιστροφική κίνηση, μπορούμε να θεωρηθεί ότι το κάθε σημείο εκτελεί τη δικιά του κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα με κοινό ω αλλά διαφορετική ακτίνα r η οποία είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής



Σε ίσους χρόνους dt το κάθε σημείο σαρώνει την ίδια ακριβώς γωνία $d\theta$ και άρα όλα τα σημεία μοιράζονται το ίδιο

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

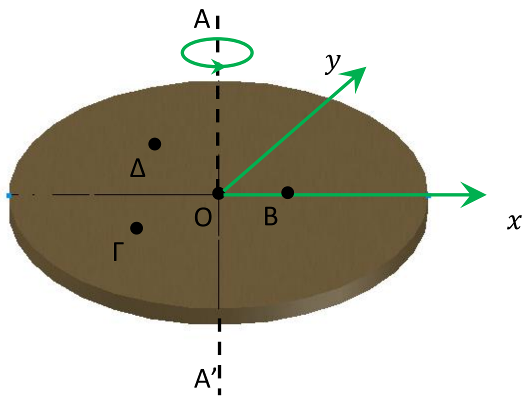
(γωνιακή ταχύτητα) αλλά το καθένα έχει διαφορετική γραμμική ταχύτητα

$$v = \omega r$$

Παρομοίως όλα τα σώματα μοιράζονται την ίδια γωνιακή επιτάχυνση που δίνεται από την

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

8.1 Ο παρακάτω δίσκος έχει απειροελάχιστο πάχος, βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία και τα τρία σημεία του $B(2,0)$, $\Gamma(-2,-3)$ και $\Delta(-3,3)$ έχουν συντεταγμένες που αναφέρονται σε σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο O του δίσκου και άξονες που βρίσκονται στο επίπεδο του δίσκου (όλα σε m). Στο $t = 0$ ο δίσκος τίθεται σε περιστροφή γύρω από τον άξονα AA’ ο οποίος τέμνει τον δίσκο κάθετα στο σημείο O, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 0.5\, rad/s^2$. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα των τριών σημείων την χρονική στιγμή $t = 2.4\, s$.



Λύση:

Πρέπει να βρούμε τις ακτίνες του κάθε σημείου

$$r_B = 2$$

$$r_\Gamma = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$r_\Delta = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Από την δεδομένη

$$\alpha = 0.5\, rad/s^2$$

Ολοκληρώνοντας

$$\omega = 0.5t + \omega_0 = 0.5t$$

(ηρεμία => $\omega_0 = 0$)

$$v_B = \omega r_B = 2\omega = 1.0t$$

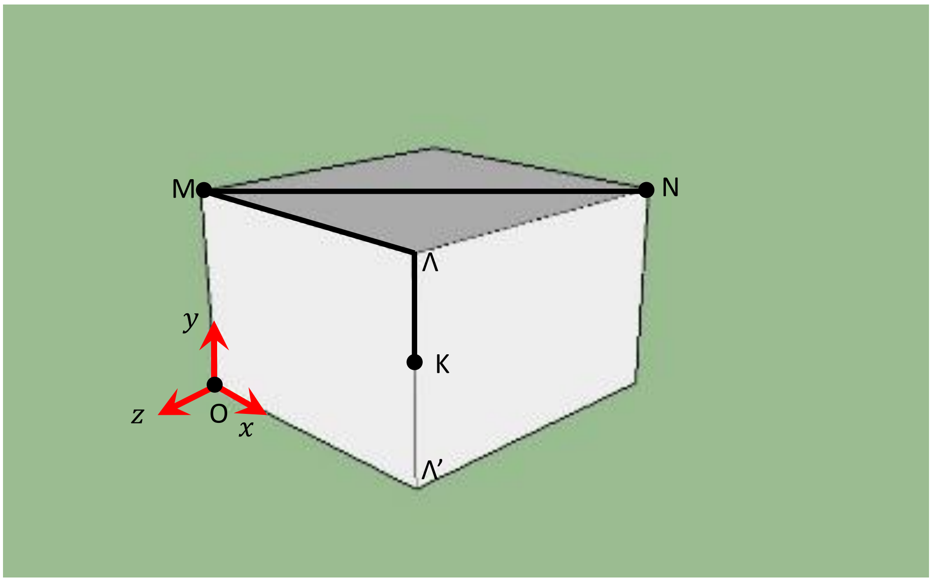
Στο $t = 2.4$

$$v_B = 2.4\, m/s$$

$$v_\Gamma = \omega r_\Gamma = \sqrt{13}\omega = 0.5\sqrt{13}t = 4.32\, m/s$$

$$v_\Delta = \omega r_\Gamma = 2\sqrt{3}\omega = 0.5 \times 3\sqrt{2}t = 5.1\, m/s$$

Για το σπίτι



$$\alpha(t) = bt + ft^2$$

Στο στερεό για σταθερή α

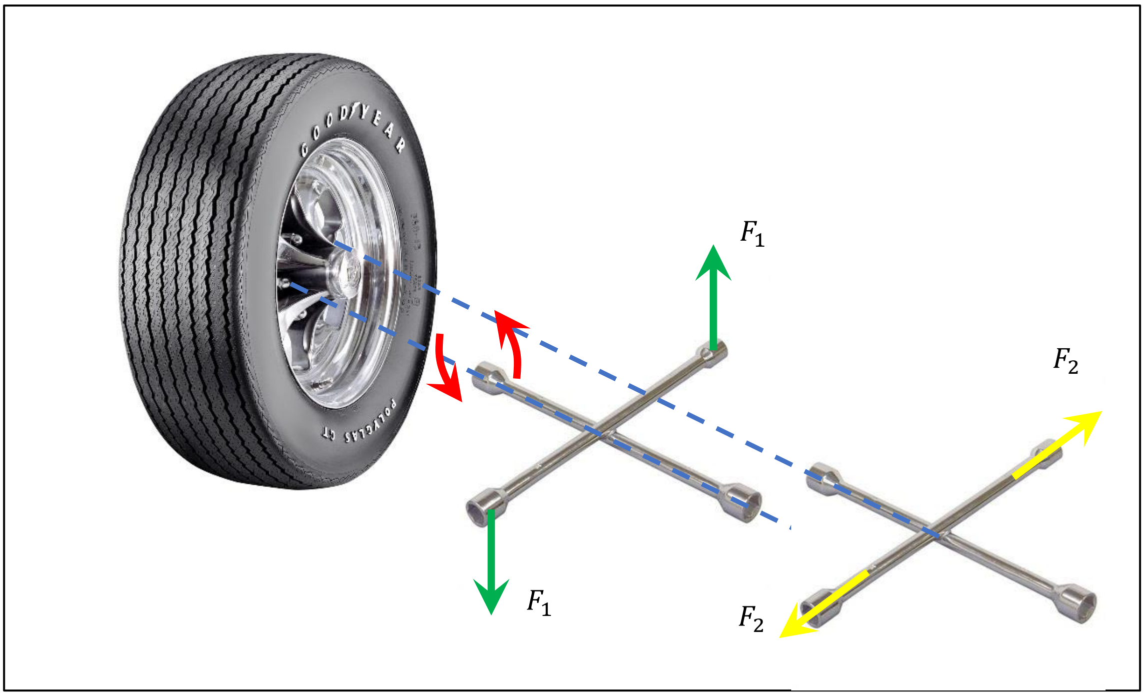
$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

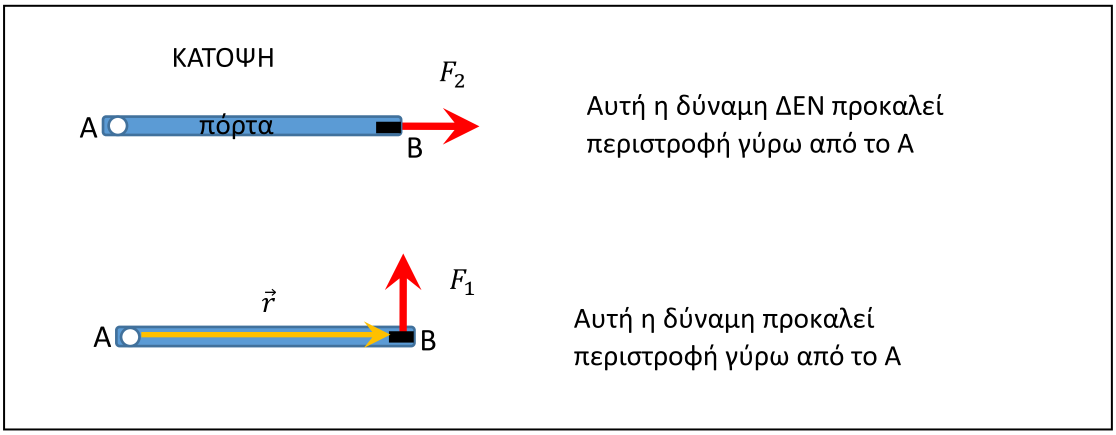
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

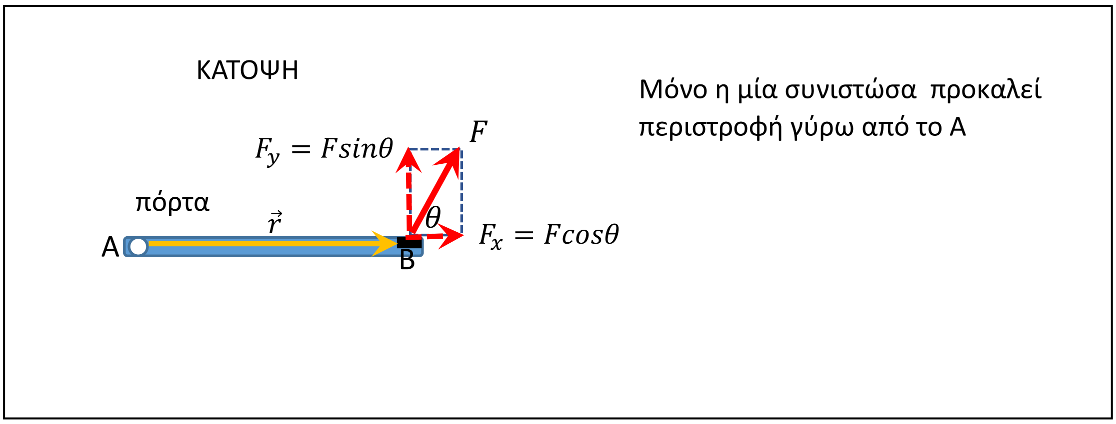
Το κάθε σημείο έχει το δικό του θ_0 αλλά δεν μας ενδιαφέρει αυτό συνήθως θεωρούμε το

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$

Ροπή Δύναμης στην περιστροφική κίνηση







Ροπή

$$\tau = F_{\kappa\alpha\theta}r = (Fsin\theta)r = Fsin\theta r = (Fsin\theta)r$$

Εναλλακτικά

$$\tau = F(r sin\theta) = F r_{\kappa\alpha\theta}$$