Η δυναμική ενέργεια μιας συντηρητικής δύναμης η οποία δρα στη μια διάσταση, δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + \beta$ όπου $a = 3\,Joules/m^4$, $\beta = 2\,Joules$, $x_1 = 1.0\,m$ και $x_2 = 3.0\,m$. Μια σημειακή μάζα $m = 2\,kg$ βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο αυτής της δύναμης. Να βρεθούν τα εξής:

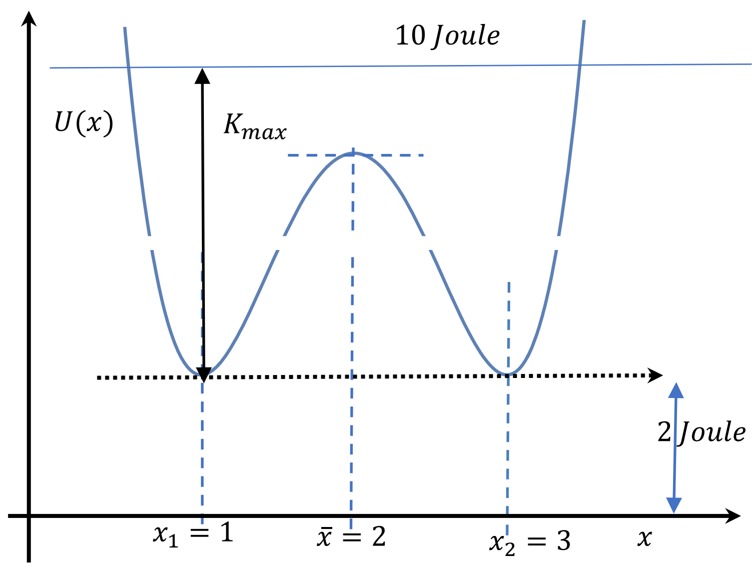
(α) Τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας της δυναμικής ενέργειας.

(β) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα της μάζας εάν η συνολική μηχανική ενέργεια της είναι ίση με $10\,Joules$

(γ) Να σχολιαστεί ποιοτικά το είδος της κίνησης της μάζας του προηγούμενου υπο-ερωτήματος

(δ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη μάζα στα σημεία αναστροφής (εκεί που η κίνηση αλλάζει κατεύθυνση) στο προηγούμενο υπο-ερώτημα.

(β)



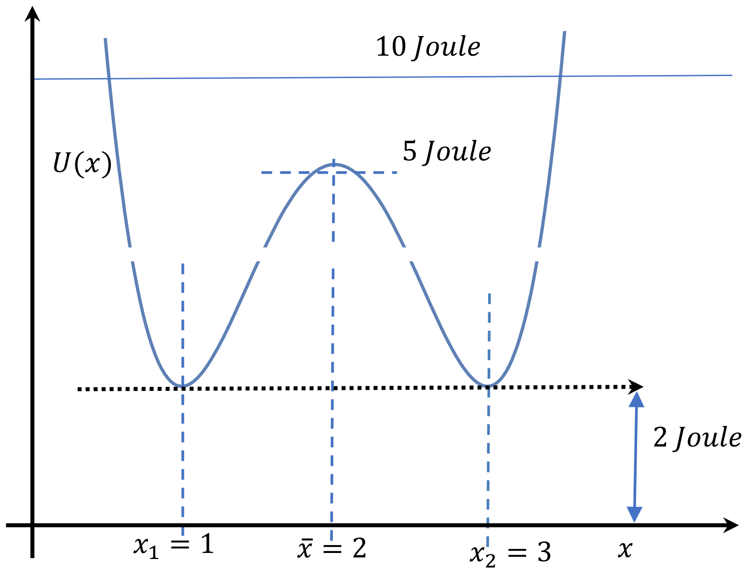
$$K_{max} = 10 - U(1) = 10 - (3(1-1)^2\,(1-3)^2 + 2)$$

$$K_{max} = 10 - 2 = 8\,Joules$$

$$\frac{1}{2} m {v_{max}}^2 = 8$$

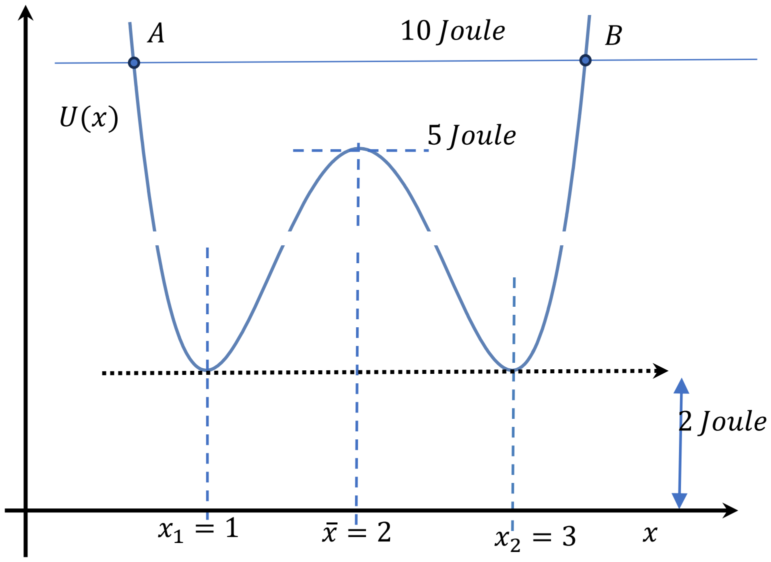
$$v_{max} = 2\sqrt{2}$$

(γ)



Η είναι όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση πάνω από το τοπικό μέγιστο των 5 και έτσι αν ξεκινήσουμε για παράδειγμα από το αριστερό σημείο ανακοπής η δύναμη είναι θετική θα επιταχύνει το σώμα το οποίο θα ξεπεράσει το μέγιστο γιατί έχει αρκετή κινητική, στη συνέχεια θα σταματήσει στο δεξί σημείο ανακοπής θα αναστρέψει την πορεία του και ούτω καθεξής

(δ)



Για να βρούμε τα σημεία αναστροφής Α,Β θέτουμε

$$U(x) = E = 10$$

$$3(x-1)^2(x-3)^2 + 2 = 10$$

$$3(x-1)^2(x-3)^2 = 8$$

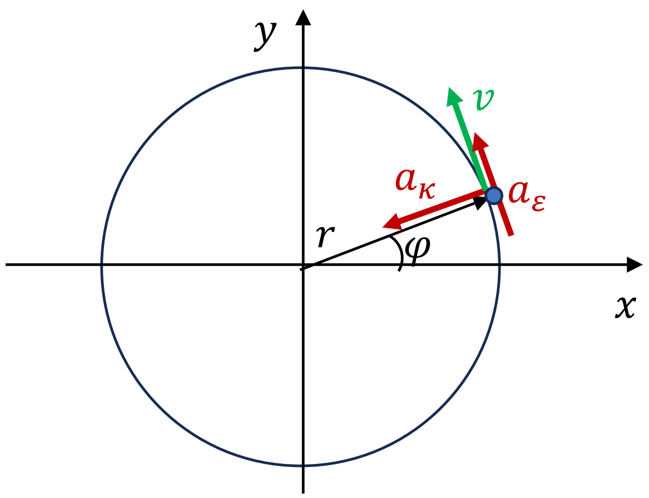
$$(x-1)^2(x-3)^2 = 8/3$$

$$(x-1)(x-3) = \sqrt{8/3}$$

δευτεροβαθμια θα προκύψουν 2 λύσεις που είναι τα σημεία αναστροφής, $x_A = 0.379$ και $x_B = 3.621$

$$F(x_A) = -\frac{dU(x_A)}{dx}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 κυκλική κίνηση



Για ομαλή κυκλική κίνηση ΟΚΚ $\varphi = \omega t$

Γενική κυκλική κίνηση $\varphi = \varphi(t)$

$$x = Rcos\varphi$$

$$y = Rsin\varphi$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -Rsin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = Rcos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

Ορίζω

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Γωνιακή ταχύτητα

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega(t)Rsin\varphi$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega(t)Rcos\varphi$$

Ορίζω

$$\vec{v} = \left(v_x, v_y\right) = \omega R(-sin\varphi, cos\varphi)$$

Θυμίζω

$$\vec{r} = R(cos\varphi, sin\varphi)$$

Ξαναπαραγωγίζω

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}Rsin\varphi - \omega Rcos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_x = -\alpha Rsin\varphi - \omega^2 Rcos\varphi$$

Ορίζω

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \alpha Rcos\varphi - \omega^2 Rsin\varphi$$

Διανυσματικώς

$$\vec{a} = \alpha R(-sin\varphi, cos\varphi) - \omega^2 R(cos\varphi, sin\varphi)$$

$$\vec{a} = \alpha R\vec{e}_\varphi - \omega^2 R\vec{e}_r$$

Η επιτάχυνση γενικά δηλαδή έχει 2 συνιστώσες, μία κατά μήκος της τροχιάς με μέτρο αR η οποία προφανώς είναι επιτρόχια και μια αντίθετα της ακτίνας με μέτρο $-\omega^2 R$ η οποία προφανώς είναι κεντρομολος

$$a_\varepsilon = \alpha R$$

$$a_\kappa = \omega^2 R$$

Παράδειγμα:

Σώμα μάζας $m = 2\ kg$είναι αναγκασμένο να κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά λόγω κάποιας κεντρομόλου δύναμης αλλά ταυτόχρονα ασκείται πάνω του και μια δύναμη κατά μήκος της τροχιάς του. Εάν η επιτάχυνση του που του προσδίδει αυτή η δεύτερη δύναμη είναι ίση με $a_\varepsilon = -bt^2 + ct$ όπου τα b και c είναι θετικές σταθερές να βρεθούν

α) Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος

β) ο αριθμός των στροφών που θα εκτελέσει μέχρι να έρθει σε πλήρη ακινησία εάν είχε αρχική γωνιακή ταχύτητα $2\ rad/s$ (στο $t = 0$)