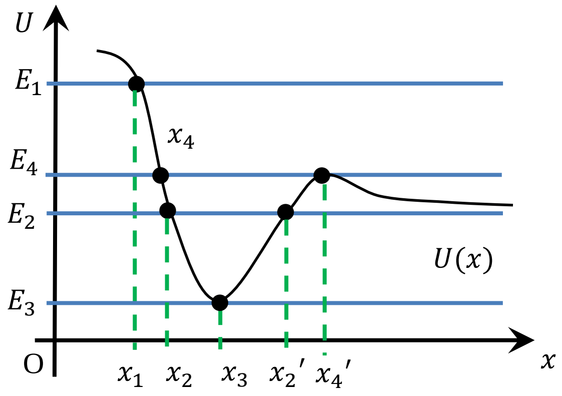
Είδαμε την περασμένη φορά ό τι από τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας μπορούμε να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα



Ανάλογα με την ολική ενέργεια η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε και διαφορετικές κίνησης. Για παράδειγμα εάν

$E = E_2$ Έχουμε δέσμια τροχιά μεταξύ των σημείων $x_2 \leq x \leq x_2'$.

Τα x_2 και x_2' ονομάζονται σημεία αναστροφής, εκεί η ταχύτητα μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο. Σε αυτά τα σημεία η γραφική παράσταση έχει κλίση και άρα υπάρχει δύναμις η οποία είναι πάντα αντίθετη με την κλίση έτσι επαναφέρει το σώμα πίσω στην τροχιά.

Εάν $E = E_4$ και μας δίνονται αρχικές συνθήκες $x = x_4$. Αφού εκεί είναι σημείο αναστροφής αναγκαστικά και η ταχύτητα είναι μηδέν αλλά υπάρχει επιτάχυνση γιατί υπάρχει δύναμη εφόσον η κλίση είναι διάφορη του μηδενός και μάλιστα η δύναμη είναι θετική γιατί η κλίση είναι αρνητική και άρα το σώμα θα κινηθεί προς τα δεξιά. Μέχρι πού θα κινηθεί το σώμα; θα φτάσει οριακά στο x_4' αλλά εκεί η δύναμη ισούται με μηδέν γιατί είναι σημείο ισορροπίας (μέγιστο) και άρα θα παραμείνει εκεί γιατί δεν υπάρχει δύναμη να το επιταχύνει. Αυτό το σημείο είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας επομένως αν υπήρχε η παραμικρή διέγερση θα είχε φύγει το σώμα από κει αλλά εδώ δεν υπάρχει άρα το σώμα μένει εκεί για πάντα.

Εάν στο x_4' δοθεί στο σώμα μια απειροελάχιστη ώθηση προς τα δεξιά, επειδή είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας, το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά γιατί η κινητική του αυξάνει συνεχώς αλλά επειδή η δυναμική φαίνεται να πιάνει πλατό (οριακά οριζόντια γραφική) τελικά στο άπειρο θα έχει σταθερή κινητική και άρα στο άπειρο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Εάν στο $x = x_4{}'$ δώσουμε ώθηση οριακά προς τα αριστερά τι είδους κίνηση θα κάνει το σώμα;

θα φύγει προς τα αριστερά επιταχυνόμενο γιατί δύναμη είναι προς τα αριστερά, μετά το ελάχιστο η δύναμη αλλάζει φορά αλλά το επιβραδύνει μέχρι και το σημείο x_4, εκεί αλλάζει φορά η ταχύτητα και θα φύγει προς τα δεξιά αλλά τώρα η ενέργειά του είναι οριακά πάνω από E_4, έστω $E_4 + dE$ και θα περάσει οριακά από το $x_4{}'$ και θα φύγει προς το άπειρο

Πρόβλημα 6.19 του βιβλίου

Η δυναμική ενέργεια μιας συντηρητικής δύναμης η οποία δρα στη μια διάσταση, δίνεται από την έκφραση $U(x) = a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + \beta$ όπου $a = 3\, Joules/m^4$, $\beta = 2\, Joules$, $x_1 = 1.0\, m$ και $x_2 = 3.0\, m$. Μια σημειακή μάζα $m = 2\, kg$ βρίσκεται υπό την επίδραση μόνο αυτής της δύναμης. Να βρεθούν τα εξής:

(α) Τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας της δυναμικής ενέργειας.

(β) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα της μάζας εάν η συνολική μηχανική ενέργεια της είναι ίση με $10\, Joules$

(γ) Να σχολιαστεί ποιοτικά το είδος της κίνησης της μάζας του προηγούμενου υπο-ερωτήματος

(δ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη μάζα στα σημεία αναστροφής (εκεί που η κίνηση αλλάζει κατεύθυνση) στο προηγούμενο υπο-ερώτημα.

Σημείωση: Παρότι που η $U(x)$ είναι τετάρτου βαθμού, λύνεται σχετικά εύκολα λόγω συμμετρίας. Επίσης μια γραφική παράσταση είναι αναγκαία για τη λύση του προβλήματος.

Λύση:

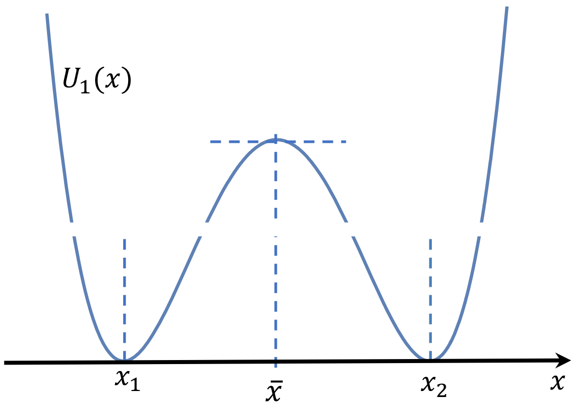
Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι ποιοτικά να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση

$$U(x) = 3(x - 1)^2(x - 3)^2 + 2$$

Για να την απλοποιήσουμε λίγο μελετάμε την πιο απλή συνάρτηση η οποία είναι παρόμοια και μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά 2 μονάδες

$$U_1(x) = 3(x - 1)^2(x - 3)^2$$

Η παραπάνω έχει διπλές ρίζες στο 1 και στο 3 και επειδή ο συντελεστής μπροστά είναι θετικός στα συγκεκριμένα σημεία η γραφική θα εμφανίζεται από την πάνω μεριά. Επειδή είναι πολυώνυμο, στα $x \to \pm\infty$ τείνει στο $3x^4 \to +\infty$ και άρα θα μοιάζει κάπως έτσι:


$U_1(x)$
x_1
$\bar{x}$
x_2
x