Συντηρητικές δυνάμεις: οι δυνάμεις των οποίων το έργο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή

Αποδεικνύεται ότι οι δυνάμεις οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τις συντεταγμένες $F(x)$ είναι συντηρητικές, δηλαδή αυτές οι οποίες δεν έχουν μέσα ταχύτητα ή χρόνο

Δηλαδή $F(x, y, z)$: συντηρητική

$F(x, v, t)$: μη συντηρητική

Π.χ. μια σταθερή τριβή ολίσθησης, στη μία διάσταση, έχει εξάρτηση από την ταχύτητα ως εξής

$$T = -|T| sgn(v)$$

Όπου sgn η συνάρτηση προσήμου στα μαθηματικά που ορίζεται ως εξής

$$sgn(v) = \begin{cases} -1, & v < 0 \\ +1, & v > 0 \end{cases}$$

Στις <u>συντηρητικές</u> δυνάμεις όπου $F = F(x)$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>:

Δύναμη ελατηρίου $F(x) = -kx$

αντίστοιχη δυναμική ενέργεια

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

<u>Παράδειγμα 2</u>:

Βαρυτική δύναμη

$$F(y) = -mg$$

αντίστοιχη δυναμική ενέργεια

$$U(y) = mgy$$

<u>Παράδειγμα 3</u>:

Ηλεκτροστατική δύναμη

$$F(x) = K \frac{q_1 q_2}{x^2}$$

αντίστοιχη δυναμική ενέργεια

$$U(x) = K\frac{q_1 q_2}{x}$$

Η αντίστροφη σχέση του ορισμού της δυναμικής ενέργειας είναι η

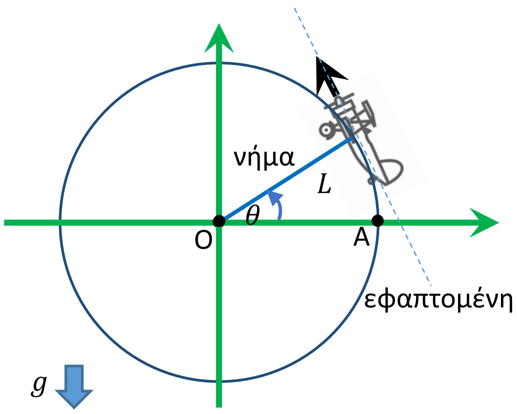
$$U(x) = -\int F(x)\,dx + c$$

Η φυσική σημασία της δυναμικής ενέργειας είναι ότι η ολική μηχανική ενέργεια μεταξύ δυο σημείων πάντα διατηρείται για μια συντηρητική δύναμη

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

Εάν στο σύστημα υπάρχουν τόσο συντηρητικές όσο και μη συντηρητικές δυνάμεις, τότε στην παραπάνω εξίσωση προσθέτουμε και τα έργα $W_{M\Sigma}$των μη συντηρητικών δυνάμεων

$$K_A + U_A + W_{M\Sigma} = K_B + U_B$$



<u>Παράδειγμα</u>: Μικρό παιχνίδι αεροπλανάκι μάζας $m = 2\ \ kg$ ιδανικό νήμα μήκους $L = 1.5\ m$. Το παιχνίδι τοποθετείται αρχικά κατακόρυφα σε ηρεμία στο σημείο Α και λόγω της προωθήσεως του έλικά του αλλά και του νήματος, διαγράφει <u>κατακόρυφη</u> κυκλική τροχιά (θετικής φοράς) και παραμένει εφαπτομενικό σε αυτή. Η δύναμη προωθήσεως του έλικα του παιχνιδιού δίνεται από την έκφραση $F = \lambda m(cos\theta + 2sin\theta)$ όπου $\lambda = 20\ N/kg$.

(α) Να βρεθεί το έργο της δύναμης αυτής μεταξύ του αρχικού σημείου Α και ενός σημείου Β με γωνία 60 μοίρες στο πρώτο τεταρτημόριο

(β) να βρεθεί η δυναμική ενέργεια αυτής της δύναμης με μεταβλητή μήκους το μήκος τόξου

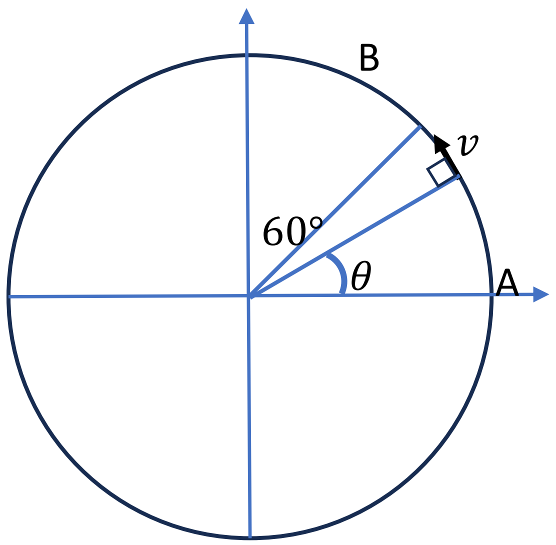
(γ) Να βρεθεί ταχύτητα στο σημείο β χρησιμοποιώντας το ΑΔΜΕ. Πάρτε για ευκολία $g = 10\ m/s^2$.

<u>Λύση</u>:

(α) αν τον ορισμό του έργου

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\,dr cos(0)$$

Τόσο η $\vec{F}$ όσο και η μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι εφαπτομενικά στην τροχιά και άρα είναι παράλληλα μεταξύ των



$$W = \int_{\theta=0}^{\pi/3} \lambda m(cos\theta + 2sin\theta)\, Ld\theta$$

$$W = L\lambda m[sin\theta - 2cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$W = L\lambda m(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 2\frac{1}{2} + 2)$$

$$W = \frac{1}{2}L\lambda m(\sqrt{3} + 2)$$

(β) Την δεδομένη δύναμη μπορώ να τη γράψω συνάρτηση του μήκους τόξου $s = L\theta$

$$F(\theta) = \lambda m(cos\theta + 2sin\theta)$$

$$F(s) = \lambda m(cos(s/L) + 2sin(s/L))$$

Η αντίστοιχη δυναμική ισούται με

$$U(s) = -\int F(s)ds =$$

$$U(s) = -\lambda m \int (cos(s/L) + 2sin(s/L)ds$$

$$U(s) = -L\lambda m \int (cos(s/L) + 2sin(s/L)d(s/L)$$

$$U(s) = -L\lambda m \left[sin\left(\frac{s}{L}\right) - 2cos\left(\frac{s}{L}\right)\right] + c$$

Μια λογική επιλογή του c είναι να μηδενίζει τη δυναμική στο αρχικό σημείο

$$U(0) = 0$$

$$-L\lambda m[sin0 - 2cos0] + c = 0$$

$$c = -2L\lambda m$$

Με αυτή την επιλογή η δυναμική γίνεται

$$U(s) = -L\lambda m\left[sin\left(\frac{s}{L}\right) - 2\left(cos\left(\frac{s}{L}\right) - 1\right)\right]$$

ή

$$U(\theta) = -L\lambda m[sin\theta - 2(cos\theta - 1)]$$

(γ) ΑΔΜΕ

$$K_B + U_B = K_A + U_A$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\pi/3) + mgh = 0 + 0 + U(0)$$

Όπου συμπεριλάβαμε και τη δυναμική του βάρους στην παραπάνω ΑΔΜΕ, με $h = Lsin(\pi/3)$.